УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Г. Руткас, И. Г. Худошин

Харьков. нац. ун-т
Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4
e-mail:Anatoliy.G.Rutkas@univer.kharkov.ua
Ilya.G.Khudoshin@univer.kharkov.ua

The Cauchy problem for an abstract semilinear differential equation

$$\frac{d}{dt}\big(Au(t)\big) + Bu(t) = f(t,u(t)), \quad t_0 - T < t < t_0 + T,$$

is studied. Here A, B are closed degenerate linear operators from a Banach space X into a Banach space Y, $f(t,u)$ is a continiously differentiable function. The resolvent $(A+\mu B)^{-1}$ is supposed to have a pole of order not greater then two in the point $\mu = 0$. Global existence and uniqueness theorems for the Cauchy problem are obtained. The results are applied to an initial boudary-value problem for one nonlinear degenerate partial differential equation and to one system of differential-algebraic equations describing a nonlinear electric circuit.

Розглядається задача Коші для абстрактного напівлінійного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt}\big(Au(t)\big) + Bu(t) = f(t,u(t)), \quad t_0 - T < t < t_0 + T,$$

де A, B — лінійні замкнені, взагалі кажучи, вироджені оператори, що діють з банахова простору X в банахів простір Y, $f(t,u)$ — неперервно диференційовна функція. Вважається, що резольвента $(A+\mu B)^{-1}$ має в точці $\mu = 0$ полюс порядку не вище двох. Отримано глобальні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Результати застосовано до однієї нелінійної виродженої початково-крайової задачі з частинними похідними та до системи диференціально-алгебраїчних рівнянь нелінійного електричного ланцюга.

1. Предварительные сведения. Рассматривается абстрактное полулинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t,u(t)), \tag{1}$$

где A, B — линейные, замкнутые, вообще говоря, вырожденные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, определенные на линеалах D_A и D_B соответственно, $f(t,u) : J \times S \to Y$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$J = \{t \in \mathbf{R} : |t - t_0| < T\}, \tag{2}$$

$$S = \{u \in X : \|u - u_0\| < r\}. \tag{3}$$

Для уравнения (1) ставится задача Коши с начальным условием

$$u(t_0) = u_0. \tag{4}$$

Решением задачи Коши (1), (4) на отрезке J будем называть такую непрерывную функцию $u(t) : J \to D$, удовлетворяющую уравнению (1) при $t \in J$ и начальному условию (4), для которой функция $Au(t)$ непрерывно дифференцируема на J.

Фундаментальные результаты для линейного уравнения (1) (правая часть не зависит от u) в пространствах $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ получены К. Вейерштрассом и Л. Кронекером с помощью канонической формы пучка матриц [1]. Нестационарные линейные и нелинейные дифференциально-алгебраические уравнения, имеющие векторную форму (1) в конечномерном пространстве, интенсивно изучаются до настоящего времени (см., например, результаты и библиографию в [2–4]).

Уравнение (1) в бесконечномерных банаховых пространствах называется иногда полулинейным уравнением Соболева. Полученные для него теоремы существования обычно имеют локальный характер [5–8], включая более общий случай нестационарных операторов A, B [9]. В данной статье доказываются глобальные теоремы существования и единственности – на всем отрезке J или на заранее выделенной его части. В качестве приложения получены условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для одного нелинейного уравнения в частных производных, которая приводится к абстрактной форме (1), (4) с вырожденным оператором A.

2. Пример из физики. На рисунке изображен передающий четырехполюсник с нелинейными элементами. Колебания элементов четырехполюсника описываются следующими уравнениями относительно токов i_k и напряжений u_k:

$$u_1 = Ri_1 + \varphi_1(t, i_1), \tag{5}$$

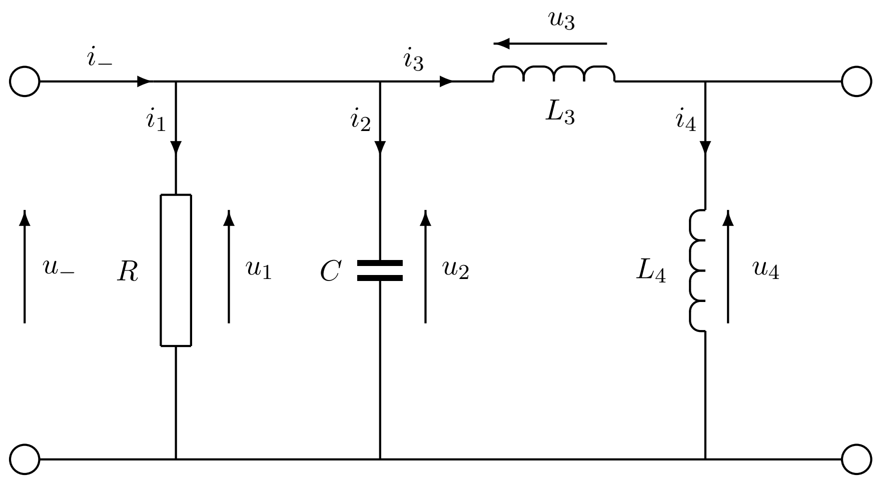
$$i_2 = C\frac{du_2}{dt} + \varphi_2(t, u_2), \tag{6}$$

$$u_3 = L_3\frac{di_3}{dt} + \varphi_3(t, i_3), \tag{7}$$

$$u_4 = L_4\frac{di_4}{dt} + \varphi_4(t, i_4). \tag{8}$$

Здесь φ_1 — нелинейная часть омического сопротивления, функция φ_2 характеризует нелинейную утечку тока в емкости, функции φ_3, φ_4 — омические потери в индуктивностях. Для данной схемы запишем следующие уравнения Кирхгофа:

$$u_1 = u_-, \; i_1 + i_2 + i_3 = i_-, \; u_3 + u_4 = u_-, \; u_2 = u_-. \tag{9}$$



Подставив значения переменных u_1, i_2, u_3, u_4 из уравнений элементов (5), (6), (7), (8) в уравнения Кирхгофа (9), получим следующую систему уравнений, описывающую распределение токов и напряжений в четырехполюснике:

$$
\begin{gathered}
Ri_1 = u_-(t) - \varphi_1(t, i_1), \\[2ex]
C\frac{du_2}{dt} + i_1 + i_3 = i_-(t) - \varphi_2(t, u_2), \\[2ex]
L_3\frac{di_3}{dt} + L_4\frac{di_4}{dt} = u_-(t) - \varphi_2(t, i_3) - \varphi_4(t, i_4), \\[2ex]
u_2 = u_-(t).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Входной ток $i_-(t)$ и входное напряжение $u_-(t)$ считаются известными функциями. Система (10) записывается в векторной форме (1), где

$$
u = \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}
$$

$$
f(t, u(t)) = \begin{pmatrix} u_-(t) - \varphi_1(t, i_1(t)) \\[1ex] i_-(t) - \varphi_2(t, u_2(t)) \\[1ex] u_-(t) - \varphi_3(t, i_3(t)) - \varphi_4(t, i_4(t)) \\[1ex] u_-(t) \end{pmatrix}. \tag{12}
$$

Обе матрицы A, B являются вырожденными и несимметричными, поэтому непосредственное применение глобальной теоремы существования решений явных дифференциальных уравнений вида $y' = F(t, y)$ здесь невозможно. Заметим, что исключение переменной u_2 из четвертого уравнения системы (10) также не приводит к явному уравнению.

3. Признак существования нелокальной неявной функции. Приведем глобальное условие существования неявной функции, необходимое в дальнейшем.

Пусть задана функция $\Phi(x, y) : X \times Y \to Z$ (X, Y, Z — банаховы пространства), непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных в области $G_x \times G_y$, где

$$G_x = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < R_x\}, \; G_y = \{y \in Y : \|y - y_0\|_Y < R_y\}. \tag{13}$$

Будем говорить, что функция $\Phi(x, y)$ *удовлетворяет гипотезе* **H** *по переменной* y *в области* $G_x \times G_y$, если для любых $x \in G_x$, $y \in G_y$ частные производные Фреше $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ и обратный оператор $\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)\right]^{-1} \in L[Z, Y]$ существуют и ограничены некоторыми константами M_1, M_2, M_3, M_4:

$$\left\| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)\right]^{-1} \right\| \le M_1, \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right\| \le M_2,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y) \right\| \le M_3, \qquad \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) \right\| \le M_4. \tag{\textbf{H}}$$

Здесь $L[Z, Y]$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Z в Y.

Лемма 1. *Пусть функция* $\Phi(x, y) \in C^2(G_x \times G_y\,; Z)$ *удовлетворяет гипотезе* ***H*** *по переменной* y *в области* $G_x \times G_y$ *(13) и* $\Phi(x_0, y_0) = 0$*. Тогда существует единственная функция* $\varphi(x)$*, непрерывно дифференцируемая в открытом шаре* $S(x_0, \rho)$*, где*

$$\rho = \min\left(R_x, \frac{R_y}{M}\right), \quad M = M_1 \max(M_2, M_3, M_4), \tag{14}$$

и принимающая значения в области G_y*, такая, что* $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$ *для любого* $x \in S(x_0, \rho)$.

Доказательство. Для малого $\delta > 0$ введем числа

$$\varepsilon = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \delta(1 + M)}, r_x = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon + M}, r_y = \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon + M)M}.$$

Выберем δ так, что $\varepsilon < 1$, $r_x \le \rho - \dfrac{\delta}{M}$, и покажем, что для любого такого δ искомая функция $\varphi(x)$ существует и определена на замкнутом шаре $S\Big[x_0, \rho - \dfrac{\delta}{M}\Big]$. Как обычно, для использования теорем о неподвижной точке переходим к функции

$$\Theta(x,y) = y - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1}\Phi(x,y) : G_x \times G_y \to Y,$$

для которой $\Theta(x,y) = y$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x,y) = 0$. Покажем сначала, что для любого $x \in S_x = S[x_0, r_x]$ функция $\Theta(x,y)$ отображает замкнутый шар $S_y = S[y_0, r_y]$ в себя. Действительно, для любых $x \in S_x$ и $y \in S_y$ выполняется

$$\begin{aligned}
\|\Theta(x,y) - y_0\| &\le \|\Theta(x,y_0) - y_0\| + \|\Theta(x,y_0) - \Theta(x,y)\| = \\
&= \|\Theta(x,y_0) - \Theta(x_0,y_0)\| + \|\Theta(x,y_0) - \Theta(x,y)\| \le \\
&\le \sup_{x\in S_x}\left\|\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,y_0)\right\|\|x - x_0\| + \sup_{x\in S_x,\, y\in S_y}\left\|\frac{\partial\Theta}{\partial y}(x,y)\right\|\|y - y_0\| \le \\
&\le \sup_{x\in S_x}\left\|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y_0)\right\| r_x + \\
&\quad + \sup_{x\in S_x,\, y\in S_y}\left\|E_Y - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right\| r_y \le \\
&\le M_1M_2r_x + \left\|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\| \sup_{x\in S_x, y\in S_y}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right\| r_y \le \\
&\le M_1M_2r_x + \left\|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\| \left(\sup_{x\in S_x, y\in S_y}\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y)\right\|\|x - x_0\| + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{x\in S_x, y\in S_y}\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x,y)\right\|\|y - y_0\|\right) r_y \le \\
&\le M_1M_2r_x + M_1(M_4r_x + M_3r_y)r_y \le Mr_x + M(r_x + r_y)r_y = r_y.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\Theta(x,y) \in S_y$. Отображение $\Theta(x,y) : S_y \to S_y$ является сжимающим равномерно по x относительно переменной y:

$$\|\Theta(x,y_1)-\Theta(x,y_2)\| \le$$

$$\le \sup_{x\in S_x,\, y\in S_y} \left\| E_Y - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) \right\| \|y_1-y_2\|_Y \le$$

$$\le M_1(M_4 r_x + M_3 r_y)\|y_1-y_2\| < \varepsilon\|y_1-y_2\|.$$

Поэтому для любого $x \in S_x$ отображение $\Theta(x,y)$ имеет единственную неподвижную точку $y=\varphi(x)\in S_y$, причем функция $\varphi(x)$ непрерывна на S_x. Поскольку $\Theta(x,\varphi(x)) = \varphi(x)$, то $\Phi(x,\varphi(x))=0$.

Доказательство того факта, что в любой точке области $S_x\times S_y$ функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную Фреше, проводится аналогично случаю классической теоремы о неявной функции (см., например, [10]).

Если для выбранного δ выполняется равенство $r_x = \rho - \dfrac{\delta}{M}$, то полученная функция $\varphi(x)$ определена на всем замкнутом шаре $S\Big[x_0, \rho-\dfrac{\delta}{M}\Big]$. В противном случае можно *продолжить функцию* $\varphi(x)$ на весь шар $S\Big[x_0,\rho-\dfrac{\delta}{M}\Big]$ следующим образом.

Если выполняется неравенство $2r_x \le \rho-\dfrac{\delta}{M}$, то выберем произвольную точку x_1 из G_x так, чтобы $\|x_1-x_0\| = r_x$. В случае $\dfrac{1}{2}\Big(\rho-\dfrac{\delta}{M}\Big) < r_x < \rho-\dfrac{\delta}{M}$ выберем x_1 так, чтобы $\|x_1-x_0\|+r_x = \rho-\dfrac{\delta}{M}$. Применив доказанное утверждение в точке $(x_1,\varphi(x_1))$, получим функцию $\varphi_1(x)$, удовлетворяющую равенству $\Phi(x,\varphi_1(x))=0$ при $x\in S[x_1,r_x]$ и принимающую значения в области $S[y_1,r_y]$.

Покажем, что $\varphi(x)=\varphi_1(x)$ для всех $x\in S_x\cap S[x_1,r_x]$. Предположим,что существует точка $\bar{x}\in S_x\cap S[x_1,r_x]$ такая, что $\varphi(\bar{x})\ne\varphi_1(\bar{x})$. В силу единственности неподвижной точки $\bar{y}=\varphi_1(\bar{x})\notin S_y$, т. е. $\|y_0-\bar{y}\|>r_y$.

С другой стороны,

$$\|y_0-\bar{y}\| \le \sup_{x\in S_x}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right\| \|x_0-\bar{x}\| \le M_1M_4r_x = Mr_x < r_y.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ единственным образом определена во всей области $x \in S_x\cup S[x_1,r_x]$.

Заметим, что для того чтобы в точке x_1 можно было применить доказанное локальное утверждение о неявной функции, необходимо, чтобы шар $S[\varphi(x_1),r_y]$ лежал в G_y. Докажем это. Для выбранной точки x_1 выполняется равенство

$$\|x_0-x_1\|+r_x \le \rho-\frac{\delta}{M}.$$

Для любого y из $S[\varphi(x_1), r_y]$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(x_1) - y\| \leq \|\varphi(x_0) - \varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_1) - y\| \leq$$

$$\leq M\|x_0 - x_1\| + r_y = M\|x_0 - x_1\| + \frac{Mr_x}{1-\varepsilon} =$$

$$= M\|x_0 - x_1\| + Mr_x + Mr_x\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} =$$

$$= M\left(\rho - \frac{\delta}{M}\right) + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon+M} = M\left(\rho - \frac{\delta}{M}\right) + \delta < M\rho < R_y.$$

Поскольку точка x_1 была выбрана произвольно, функцию $\varphi(x)$ можно продлить с сохранением свойств на весь шар $S\left[x_0, \rho - \dfrac{\delta}{M}\right]$ или на шар $S[x_0, 2r_x]$ в зависимости от выбранного δ.

Так как r_x и $\rho - \dfrac{\delta}{M}$ — конечные величины, за конечное число шагов получим искомую функцию $\varphi(x)$, определенную на всем замкнутом шаре $S\left[x_0, \rho - \dfrac{\delta}{M}\right]$. Выбирая последовательность $\delta_n \to 0$ и применяя доказанное утверждение для каждого $\rho - \dfrac{\delta_n}{M}$, получаем искомую функцию $\varphi(x)$, непрерывно дифференцируемую на $\bigcup\limits_n S\left[x_0, \rho - \dfrac{\delta_n}{M}\right] = S(x_0, \rho)$.

Лемма доказана.

Замечание 1. Лемма 1 выполняется, если в формулировке положить $R_y = \infty$ $(G_y = Y)$. В этом случае функция $\varphi(x)$ определена на шаре S_x. Если, кроме того, $R_x = \infty$ $(G_x = X)$, то функция $\varphi(x)$ определена на всем пространстве X.

Замечание 2. Если функция $\Phi(x, y)$ определена в области $G_X \times G_Y$, а гипотеза **H** выполняется лишь в меньшей по y области $G_X \times \hat{G}_Y$, $\hat{G}_Y \subset G_Y$, то согласно доказанной лемме существует единственная функция $\varphi(x)$, принимающая значения в $\hat{G}_Y$. Однако если эта функция $\varphi(x)$ определена на всей области G_X, то она является единственной при решении задачи во всей области $G_X \times G_Y$.

4. Глобальные теоремы разрешимости. Часть предположений относится к характеристическому многочлену линейной части уравнения (1) — операторному пучку $\lambda A + B$ с областью опеределения $D = D_A \cap D_B \subset X$ и областью значений в пространстве Y. Множество его регулярных точек $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых резольвента $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором из $L(Y, X)$, образует открытое множество $\rho = \rho(A, B)$ и $R(\lambda) : \rho \to L(Y, X)$ есть голоморфная оператор-функция [5]. Наше предположение заключается в том, что $R(\lambda)$ имеет *полюс первого порядка в точке* $\lambda = \infty$. Это равносильно тому, что резольвента $(A + \mu B)^{-1} = V(\mu)$ имеет *полюс второго порядка в точке* $\mu = 0$. Как известно [5, 11], в этом случае с помощью контурного интегрирования можно построить спектральные проекторы типа Рисса

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\lambda A + B)^{-1}A\,d\lambda, \;\; P_2 = I_X - P_1, \tag{15}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \; Q_2 = I_Y - Q_1. \tag{16}$$

Здесь Q_1 — ограниченный проектор в Y, P_1 — проектирующий (идемпотентный) оператор в X с областью определения $D_A \supset D$. Эти проекторы порождают такие прямые разложения пространства Y и линеала D в X, которые приводят пучок $\lambda A + B$:

$$D = D_1 \dot{+} D_2, \; Y = Y_1 \dot{+} Y_2 \; (D_k = P_k D, \; Y_k = Q_k Y),$$

$$A(D_k) \subset Y_k, \; B(D_k) \subset Y_k, \; k = 1, 2.$$

Сужения операторов A, B

$$A|_{D_k} \doteq A_k : D_k \to Y_k, \; B|_{D_k} \doteq B_k : D_k \to Y_k, \; k = 1, 2,$$

имеют следующие свойства. Резольвента $(\lambda A_1 + B_1)^{-1} \in L(Y_1, \bar{D}_1)$ голоморфна при $|\lambda| > K$, $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} (\lambda A_1 + B_1)^{-1} = 0$, так что спектр пучка $\lambda A_1 + B_1$ ограничен в $\mathbf{C} \cup \infty$. Спектр пучка $\lambda A_2 + B_2$ состоит из единственной точки $\lambda = \infty$, причем $\lambda = \infty$ есть полюс первого порядка резольвенты $(\lambda A_2 + B_2)^{-1}$. У операторов $A_1 : D_1 \to Y_1$ и $B_2 : D_2 \to Y_2$ существуют ограниченные обратные, $A_1^{-1} \in L(Y_1, \bar{D}_1)$, $B_2^{-1} \in L(Y_2, \bar{D}_2)$ (см. [11]). Обозначим

$$D_{20} = D \cap \operatorname{Ker} A.$$

Будем говорить, что выполняется условие *нормальной разложимости спектрального подпространства* Y_2 *пучка* $A + \mu B$ *в точке* $\mu = 0$, если подпространство $Y_{20} = B(D_{20})$ замкнуто и имеет замкнутое прямое дополнение Y_{21} в пространстве Y_2:

$$Y_2 = Y_{20} \dot{+} Y_{21}. \tag{17}$$

В частности, это заведомо так в случае конечномерности аннулятора $\operatorname{Ker} A$ оператора A и типично для дифференциальных операторов с компактными резольвентами. В дальнейшем будем предполагать, что условие спектральной разложимости (17) выполнено. В этом случае в пространстве Y существуют ограниченные проекторы $Q_{2k} : Y \to Y_{2k}$, $k = 0, 1$, такие, что $Q_{20} + Q_{21} = Q_2$, $Q_{20} Q_{21} = 0$. На линеале D определены проектирующие операторы $P_{20} = B_2^{-1} Q_{20} B$, $P_{21} = B_2^{-1} Q_{21} B$ такие, что $P_{20} + P_{21} = P_2|_D$ и $P_{20} P_{21} = 0$. Обозначим $D_{21} = P_{21}(D)$.

Операторы $B A_1^{-1} : Y_1 \to Y_1$, $A B_2^{-1} : Y_2 \to Y_2$ также ограничены. Образ сужения оператора $A B_2^{-1}$ на подпространство Y_{21} лежит в Y_{20}, и по построению $A B_2^{-1} Q_{20} = 0$.

Будем говорить, что выполняется условие *усиленной нормальной разложимости спектрального подпространства* Y_2 *пучка* $A + \mu B$ *в точке* $\mu = 0$, если дополнительно к нормальной разложимости известно, что замкнутое подпространство $E_0 = A B_2^{-1}(Y_{21})$ имеет замкнутое прямое дополнение E_1 в пространстве Y_{20} :

$$Y_{20} = E_0 \dot{+} E_1. \tag{18}$$

В этом случае в пространстве Y_{20} существуют ограниченные проекторы $\Sigma_k : Y_{20} \to E_k$, $k = 0, 1$, такие, что $\Sigma_0 + \Sigma_1 = Q_{20}$, $\Sigma_0\Sigma_1 = 0$, а оператор $AB_2^{-1} : Y_{21} \to E_0$ ограниченно обратим.

Замечание 3. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A, B)$ и $T = A(\lambda_0 A + B)^{-1}$. Тогда $T \in L(Y, Y)$ и указанные требования спектральной разложимости (17) и (18) пространства Y_2 эквивалентны свойству *нормальной разложимости собственного нильпотента* $T_2 = T|_{Y_2}$ оператора T, которое использовалось в [7] и позже в [8] при исследовании вырожденного уравнения $Tv' + v = f(t, Nv)$ в пространстве Y. При этом в (17) подпространство Y_0 состоит из собственных векторов оператора, подпространство Y_1 — из корневых (присоединенных) векторов оператора T, соответствующих нулевому собственному числу.

Согласно определению функция $f(t, u) : J \times S \to Y$ и пучок $A + \mu B$ *спектрально согласованы*, если для любых $t \in J$, $u \in S \cap D$ выполняются условия

$$Q_{20}(f(t, u) - f(t, (P_{20} + P_{21})u)) = 0, \tag{19}$$

$$Q_{21}(f(t, u) - f(t, P_{21}u)) = 0. \tag{20}$$

Замечание 4. Любая функция f, не зависящая от u, спектрально согласована с пучком $A + \mu B$, так что для линейных уравнений вида (1) условия (19), (20) всегда выполнены. Точно так же для невырожденного полулинейного уравнения с единичным оператором $A (= E)$ условия спектральной согласованности формально выполнены, так как $Q_{20} = 0$, $Q_{21} = 0$. Если функция f достаточно гладкая, то вместо условий (19), (20) достаточно проверить выполнение равенств

$$Q_{20}\frac{\partial f}{\partial u}(P_{20} + P_{21}) = 0, \qquad Q_{21}\frac{\partial f}{\partial u}P_{21} = 0.$$

Хотя данные условия выглядят достаточно жесткими, они часто выполняются в уравнениях, описывающих механические системы или электрические цепи.

Утверждение 1. *Спектральная согласованность функции $f(t, u)$ и операторного пучка $A + \mu B$ не зависит от выбора Y_{21} — прямого дополнения к Y_{20} в (17) и, соответственно, от неоднозначности проектирующих операторов P_{2i}, Q_{2i}.*

Будем говорить, что выполняется *условие собственной фазовой согласованности начальных данных* (t_0, u_0) *с уравнением (1)*, если $u_0 \in D$ и

$$Q_{21}(Bu_0 - f(t_0, u_0)) = 0. \tag{21}$$

Далее, будем говорить, что выполняется *условие корневой фазовой согласованности начальных данных* (t_0, u_0) *с уравнением (1)*, если $u_0 \in D$, существуют производные Фреше $\frac{\partial f}{\partial u}(t_0, u_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, u_0)$, оператор $\left[Q_{21}\frac{\partial f}{\partial u}(t_0, u_0) - B_2\right] : D_{21} \to Y_{21}$ обратим и выполняется равенство

$$Q_{20}(Bu_0 - f(t_0, u_0)) = A\left(Q_{21}\frac{\partial f}{\partial u}(t_0, u_0) - B_2\right)^{-1} Q_{21}\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, u_0). \tag{22}$$

Замечание 5. В случае линейного уравнения вида (1) в конечномерном пространстве условия (21), (22) принимают вид

$$Q_{21}Bu_0 = Q_{21}f(t_0), \ AB_2^{-1}Q_{21}\frac{df}{dt}(t_0) + Q_{20}Bu_0 = Q_{20}f(t_0),$$

и являются *необходимыми условиями существования и единственности решения задачи Коши (1), (4)* (ср. с [1]).

В практических задачах условия (21), (22) часто представляют собой естественные требования, налагаемые на начальные данные спецификой задачи.

Теорема 1. *Предположим, что пучок $A + \mu B$ имеет в точке $\mu = 0$ полюс порядка не выше двух и спектрально согласован в смысле (19), (20) с правой частью уравнения (1) $f(t, u) \in C^1(J \times X; Y)$. Пусть, далее, выполняются условия (21), (22) фазовой согласованности начальных данных (t_0, u_0) с уравнением (1) и условие (17) нормальной разложимости спектрального подпространства пучка $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$, а функция*

$$F(t, v) = Q_{21}f(t, B_2^{-1}v) - v : J \times Y_{21} \to Y_{21} \tag{23}$$

*удовлетворяет гипотезе **H** по переменной v в области $J \times Y_{21}$. Пусть, наконец, выполняются условия:*

1^0) $\|Q_{20}(f(t, u_1+w) - f(t, u_2+w))\| \le L_1\|u_1 - u_2\| \quad \forall t \in J \ \forall u_1, u_2 \in D_{20} \ \forall w \in D_{21}$;

2^0) $\|Q_1(f(t, u_1) - f(t, u_2))\| \le L_2\|u_1 - u_2\| \ \forall\, t \in J \ \forall\, u_1, u_2 \in X$;

3^0) $\|Q_1 f(t, u)\| \le L_3 + L_4\|u\| \ \forall\, t \in J \ \forall\, u \in X$,

с некоторыми постоянными L_2, L_3, L_4, $L_1 < \dfrac{1}{\|B_2^{-1}\|}$.

Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи (1), (4), определенное на всем отрезке J.

Доказательство. Поскольку резольвента $(A + \mu B)^{-1}$ имеет в точке $\mu = 0$ полюс второго порядка, то линеал D_{20} состоит из собственных векторов, а линеал D_{21} содержит только присоединенные векторы высоты один для пучка $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$. При этом присоединенных векторов высоты два и более в этой точке не существует. Следовательно, $A(D_{21}) \subset Y_{20} = B(D_{20})$.

Оператор $K = A_1^{-1}Q_1 + B_2^{-1}Q_2$ непрерывно отображает пространство Y в линеал D. Выполним в уравнении (1) замену $u = Kv$ и подействуем на уравнение проекторами Q_1, Q_{20}, Q_{21}. Воспользовавшись свойством спектральной согласованности, получим эквивалентную уравнению (1) систему уравнений

$$\frac{dv_1(t)}{dt} + BA_1^{-1}v_1(t) = Q_1 f(t, K(v_1(t) + v_{20}(t) + v_{21}(t))), \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}(AB_2^{-1}v_{21}(t)) + v_{20}(t) = Q_{20}f(t, B_2^{-1}(v_{20}(t) + v_{21}(t))), \tag{25}$$

$$v_{21}(t) = Q_{21}f(t, B_2^{-1}v_{21}(t)), \tag{26}$$

где $v_1 = Q_1 v, v_{2k} = Q_{2k}v, k = 0, 1$.

В силу условия (21) собственной фазовой согласованности начальных данных (t_0, u_0) и уравнения (1) выполняется равенство $F(t_0, BP_{21}u_0) = 0$. Следовательно, для функции $F(t, v)$ выполняются условия леммы 1 в области $J \times Y_{21}$. Значит, существует и единственна функция $g(t)$, непрерывно дифференцируемая на J, принимающая значения в Y_{21}, удовлетворяющая условию $g(t_0) = BP_{21}u_0$ и такая, что для любого t из J выполняется равенство

$$g(t) = Q_{21}f(t, B_2^{-1}g(t)). \tag{27}$$

Подставляя в уравнение (25) вместо v_{21} полученную функцию $g(t)$, обозначая $v_{20}(t) = h(t)$ и перенося первое слагаемое в правую часть, получаем уравнение

$$h(t) = Q_{20}f(t, B_2^{-1}(h(t) + g(t))) - \frac{d}{dt}(AB_2^{-1}g(t)). \tag{28}$$

Правая часть уравнения (28) непрерывна по $t,\ h$ в области $J \times Y_{20}$ и в силу условия 1^0 теоремы является равномерным по t сжимающим отображением на Y_{20}. Согласно теореме о неподвижной точке существует и единственна функция $h(t)$, непрерывная на J и принимающая значения в Y_{20}, которая для любого t из J удовлетворяет равенству (28). В силу условия (22) корневой фазовой согласованности начальных данных (t_0, u_0) и уравнения (1) выполняется равенство $h(t_0) = BP_{20}u_0$.

Подставляя в уравнение (24) вместо $v_{20}(t)$ и $v_{21}(t)$ соответственно $h(t)$ и $g(t)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с правой частью, непрерывной по $t,\ v_1$ в области $J \times Y_1$. В силу свойств $2^0,\ 3^0$ полученное уравнение удовлетворяет условиям теоремы 1.2 [12] (гл. VII) о глобальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, а значит, имеет единственное решение $k(t)$, непрерывно дифференцируемое на J и удовлетворяющее начальному условию $k(t_0) = AP_1u_0$.

Функция $u(t) = K(k(t) + h(t) + g(t))$ непрерывна на J, определена единственным образом, удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (4). Функция $Au(t) = k(t) + AB_2^{-1}g(t)$ непрерывно дифференцируема на J. Следовательно, функция $u(t)$ является единственным решением задачи Коши (1) , (4).

Теорема доказана.

Замечание 6. В случае, когда подпространство Y_{21} одномерно, условия теоремы 1 можно ослабить, воспользовавшись вариантом теоремы о неявной функции, доказанным в работе В. Г. Самойленко и Ю. И. Каплун [13] (теорема 2). Соответствующее утверждение приведено ниже в теореме 2. Ситуация $\dim Y_{21} = 1$ встречается в конкретных несамосопряженных задачах для уравнений в частных производных (см., например, приложение 5.2).

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1, кроме гипотезы $\boldsymbol{H}$, а подпространство Y_{21} одномерно : $Y_{21} =$ л. о. $\{\eta\}$. Определим функцию $F_0(t, s) : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ равенством $F_0(t, s)\eta = F(t, s\eta)$, где $F(t, v)$ — функция (23). Предположим, что функция $F_0(t, s)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1^0) $F_0(t, s)$ непрерывно дифференцируема по своим переменным на $J \times \boldsymbol{R}$;

2^0) $\dfrac{\partial F_0}{\partial s}(t, s) \neq 0$ для всех $t \in J, s \in \boldsymbol{R}$.

Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи (1), (4), определенное на всем отрезке J.

Для формулировки еще одного признака нелокальной разрешимости введем обозначения следующих множеств векторов:

$$S_{2i}(\rho) = \{u \in D_{2i} \,:\, \|u - P_{2i}u_0\| < \rho\} \subset X,$$

$$\hat{S}_{2i}(\rho) = \{v \in Y_{2i} \,:\, \|v - B_2 P_{2i} v_0\| < \rho\} \subset Y, \quad i = 0, 1.$$

Теорема 3. *Предположим, что пучок $A + \mu B$ имеет в точке $\mu = 0$ полюс порядка не выше двух и спектрально согласован в смысле (19), (20) с правой частью уравнения (1) $f(t,u) \in C^1(J \times S; Y)$. Пусть, далее, выполняются условия (21), (22) фазовой согласованности начальных данных (t_0, u_0) с уравнением (1) и условие нормальной разложимости (17) спектрального подпространства пучка $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$. Предположим также, что радиус r шара S (3) представляется в виде $r = r_1 + r_{20} + r_{21}$ так, что функция*

$$F(t,v) = Q_{21} f(t, B_2^{-1} v) - v \,:\, J \times Y_{21} \to Y_{21}$$

*удовлетворяет гипотезе **H** по переменной v в области $J \times \hat{S}_{21}\left(\dfrac{r_{21}}{\|B_2^{-1}\|}\right)$. Пусть, наконец, выполняются условия:*

1^0) $\exists\, L_1 < \dfrac{1}{\|B_2^{-1}\|} \,:\, \|Q_{20}(f(t, u_1 + w) - f(t, u_2 + w))\| \le L_1 \|u_1 - u_2\| \;\; \forall\, t \in J \;\forall\, w \in S_{21}(r_{21}) \;\forall\, u_1, u_2 \in S_{20}(r_{20})$;

2^0) $Q_{20} f(t, u + w) + A\left(Q_{21} \dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u) - B_2\right)^{-1} Q_{21} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u) \in \hat{S}_{20}\left(\dfrac{r_{20}}{\|B_2^{-1}\|}\right) \;\forall\, t \in J \;\forall\, u \in S_{21}(r_{21}) \;\forall\, w \in S_{20}(r_{20})$;

3^0) $\|Q_1 f(t,u) - B P_1 u\| \le \dfrac{r_1}{T \|B_2^{-1}\|} \;\forall\, t \in J \;\forall\, u \in S(u_0, r)$;

4^0) $\exists\, L_2 > 0 \,:\, \|Q_1(f(t,u_1) - f(t,u_2))\| \le L_2 \|u_1 - u_2\| \;\forall\, t \in J \;\forall\, u_1, u_2 \in D$.

Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи (1), (4), определенное на отрезке $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$, где ρ — постоянная (14).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Замечание 7. В теоремах 1, 3 можно отказаться от условия корневой фазовой согласованности (22). *Оставшиеся условия будут достаточными для существования глобального на J непрерывного решения уравнения* (1), удовлетворяющего начальному условию

$$(P_1 + P_{21})(u(t_0) - u_0) = 0. \tag{29}$$

Локальные условия разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с аналогичными начальными условиями в конечномерных пространствах рассматривались в [3].

Замечание 8. Если точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A + \mu B)^{-1}$, то подпространство Y_{21} и линеал D_{21} тривиальны. В этом случае $P_{21} = 0$, $Q_{21} = 0$, и *гипотеза **H** не выполняется.* Тем не менее в теоремах 1, 3 можно отказаться от гипотезы **H**, и оставшиеся условия оказываются достаточными для существования глобального решения задачи (1), (4) на отрезке J.

В отличие от локальных теорем разрешимости, полученных в работе [8], в доказанных теоремах появились новые условия в виде гипотезы **H** и условий 2^0, 3^0 теоремы 3, необходимые для существования глобального решения. Условия спектральной и фазовой согласованности, а также условие 1^0 в теоремах 1, 3 являются необходимыми для локальной разрешимости начальной задачи для вырожденного полулинейного уравнения. Условия 2^0, 3^0 теоремы 1 и условие 4^0 теоремы 3 являются стандартными в классических теоремах существования и единственности для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной.

Следует заметить, что полученные теоремы о нелокальной разрешимости являются новыми в случае конечномерных пространств X, Y. В этом случае гипотезу **H** достаточно проверить для функции $Q_{21}f(t,u) - Bu \ : \ J \times X_{21} \to Y_{21}$, где $X_{21} = P_{21}X$, условия собственной и корневой фазовой согласованности (21), (22) записываются в более простой форме (см. замечание 5), а условие нормальной разложимости (17) выполняется автоматически.

5. Приложения. ***5.1.*** Вернемся к электрической цепи, приведенной на рисунке. Как показано в пункте 2, данная цепь описывается системой уравнений вида (1) с элементами (11), (12). Резольвента $(A+\mu B)^{-1}$ имеет полюс второго порядка в точке $\mu = 0$. Условие (17) нормальной разложимости спектрального подпространства выполнено в силу конечномерности задачи: $X = Y = \mathbf{R}^4$. Проекторы $P_{2k},\ Q_{2k}$ ищутся в виде

$$P_{20}u = (u, f_0)\varphi_0,\ P_{21}u = (u, f_1)\varphi_1,$$

$$Q_{20}v = (v, g_0)\psi_0,\ Q_{21}v = (v, g_1)\psi_1,$$

где φ_k, ψ_k — собственные и присоединенные векторы операторных пучков $A + \mu B$, $A^* + {}+\mu B^*$ в точке $\mu = 0$, соответственно, $f_k = B\varphi_k$, $g_k = B^*\psi_k$, $k = 0, 1$ [14]. В данном случае проекторы имеют вид

$$P_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{L_3}{L_4} & 0 \end{pmatrix},\ P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{L_3}{L_4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что условия спектральной согласованности (19), (20) пучка $A + \mu B$ и правой части f (12) выполнены.

Условия собственной (21) и корневой (22) фазовой согласованности имеют вид

$$u_2^0 = u_-(t_0),$$

$$Ri_1^0 + \varphi_1(t_0, i_1^0) - u_-(t_0) = 0, \tag{30}$$

$$i_1^0 + i_3^0 + \varphi_2(t_0, u_2^0) - i_-(t_0) - C\dot{u}_-(t_0) = 0.$$

Очевидно, что они представляют собой уравнения Кирхгофа, записанные в начальный момент времени. Следовательно, собственная и корневая фазовые согласованности имеют физический смысл.

Начальные данные назовем *допустимыми*, если они удовлетворяют уравнениям Кирхгофа (30). Гипотеза **H** выполняется на любом отрезке времени при любых допустимых начальных данных. При достаточно гладких функциях $\varphi_k,\ k = 1, \ldots, 4$, а именно, дважды непрерывно дифференцируемых, условия $2^0, 3^0$ теоремы 1 выполняются. Условие 1^0 теоремы 1 выполнено, если функции $\varphi_1,\ \varphi_2$ липшицевы с константой Липшица $L < \dfrac{1}{\|B_2^{-1}\|}$, где $\|B_2^{-1}\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{R_2} + 1\right)\left(\dfrac{L_3}{L_4} + 1\right) + 1}$. В этом случае исходная система уравнений однозначно разрешима на любом ограниченном отрезке времени при любых допустимых начальных данных.

5.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для эволюционного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)u(t,x) = f(t, u(t,x)), \tag{31}$$

$$2u(t,1) - 2u(t,0) - \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = 0, \tag{33}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{34}$$

$$t \in \mathbf{R}, x \in [0,1].$$

Запишем эту задачу в виде задачи Коши для неявного полулинейного уравнения в гильбертовом пространстве

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t, u(t)),$$

где $u(t)$ при каждом t есть функция из $L_2[0,1]$, операторы A и B задаются дифференциальными выражениями

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1,$$

а областью определения операторов является линеал $D_A = D_B = \{y(x)\}$ таких функций, что $y'(x)$ абсолютно непрерывна при $0 \leq x \leq 1$, $y'' \in L_2[0,1]$ и выполняются граничные условия $\frac{dy}{dx}(0) = 0, 2y(1) - 2y(0) - \frac{dy}{dx}(1) = 0$.

Точка $\mu = 0$ является полюсом второго порядка резольвенты $(A + \mu B)^{-1}$. Ядро $\operatorname{Ker} A$ оператора A одномерно, следовательно, для пучка $A + \mu B$ выполняется условие нормальной разложимости спектрального подпространства. Спектральные проекторы, как и в предыдущем примере, записываются в виде

$$P_{20}u = (u, f_0)\varphi_0, \; P_{21}u = (u, f_1)\varphi_1, \; Q_{20}v = (v, g_0)\psi_0, \; Q_{21}v = (v, g_1)\psi_1,$$

$$\varphi_0 = 1, \; \varphi_1 = \sqrt{5}x^2, \; \psi_0 = 1, \; \psi_1 = \sqrt{5}(x^2 + 2),$$

$$g_0 = 4x^3 - 6x^2 + 4x, \; g_1 = \frac{12}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$f_0 = 4x^3 - 6x^2 + 28x - 12, \; f_1 = \frac{12}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В качестве примера правой части, удовлетворяющей условиям теоремы 2, можно указать функцию

$$f(t, u(t,x)) = -\left(\int_0^1 u(t,\xi)\Big(\xi - \frac{1}{2}\Big)d\xi\right)^3 (x^2 + 2). \tag{35}$$

Данную функцию можно записать в виде $f(t,u) = -\frac{\sqrt{5}}{144}(u, f_1)^3\psi_1$. Легко убедиться, что эта функция спектрально согласована с операторным пучком и выполняются условия фазовой согласованности (21), (22) начальных данных из (34) с уравнением (31), (35). Соответствующая функция $F_0(t,s)$ из условия теоремы 2 имеет вид $F_0(t,s) = -\frac{\sqrt{5}}{72}s^3 - s$. Очевидно, что условия $1^0 - 3^0$ теоремы 1 выполняются автоматически. Таким образом, задача (31), (35), (32), (33), (34) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и, следовательно, имеет единственное решение при всех $t \in \mathbf{R}$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
2. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. — Pitman, 1980. — 176 p.
3. *Marz R.* On linear differential-algebraic equations and linearizations // Appl. Numer. Math. — 1994. — **1**. — P. 279–292.

4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навч. посіб. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.

5. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $A\frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. — 1975. — **11**, №11. — С. 1996 – 2010.

6. *Favini A., Plazzi P.* Some results concernong the abstract nonlinear equation $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ // Circuits, Systems, Signal Proc. — 1986. — P. 261 – 274.

7. *Rutkas A.* The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space // Spectral and Evolut. Problems: Proc. Sixth Crim. Fall Math. School-Symp. (Simferopol). — 1996. — **6**. — P. 317 – 320.

8. *Favini A., Rutkas A.* Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equation // Different. Integr. Equat. — 1999. — **4**, № 12. — P. 373 – 394.

9. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 252 – 263.

10. *Канторович А. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах: — М.: Физматгиз, 1959.

11. *Радбель Н. И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax\prime(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференц. уравнения. — 1979. — **15**, № 6.

12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1979. —534 с.

13. *Самойленко В. Г., Каплун Ю. І.* Рівняння $g(t, x) = 0$: існування та продовжуваність його розв'язків // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 372 – 382.

14. *Худошин И. Г.* Начальная задача для некоторых квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. — 1999. — № 458. — С. 159 – 164.

Получено 13.01.2004