УДК 517.9

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. Н. Ронто

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: ar@imath.kiev.ua

М. Ронто

Inst. Math., Univ. Miskolc
3515, Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, Hungary
e-mail: matronto@gold.uni-miskolc.hu

Н. М. Щобак

Ужгород. нац. ун-т
Украина, Ужгород, ул. Университетская, 14
e-mail: math1@univ.uzhgorod.ua

A three-point boundary-value problem for a system of nonlinear differential equations is transformed to a certain family of two-point problems, whose solutions are investigated by using numerical-analytic techniques.
Триточкова крайова задача для системи нелінійних диференціальних рівнянь зводиться до сім'ї двоточкових задач, розв'язки яких досліджуються із застосуванням чисельно-аналітичної техніки.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается один подход к исследованию системы n нелинейных дифференциальных уравнений, подчиненных n линейным трехточечным условиям, основанный на сведении исходной задачи к n-параметрическому семейству подходящих двухточечных задач. Строится численно-аналитическая схема исследования существования решения и приближенного его нахождения с помощью метода итеративного типа, часть вычислений по которому выполняется в аналитическом виде.

Известны различные методы изучения краевых задач, в том числе содержащих неизвестные параметры. Так, разнообразные итерационные схемы используются в [1 – 4]. В [5, 6] применяются метод осреднения функциональных поправок и другие проекционно-итеративные методы. Оценки числа решений некоторых сингулярных двухточечных задач с параметрами получены в [7] топологическими методами. Различные варианты метода продолжения по параметру исследовались в [8]. Имеется большое количество работ, в которых различные двухточечные и многоточечные краевые задачи исследуются численными методами (см., например, работы [9, 10] и приведенную в них библиографию).

Заметим, что техника большинства исследований, посвященных численному отысканию решений краевых задач, основывается на методе пристрелки (см., например, [9 – 12]). В частности, в [9] рассматривается двухточечная задача вида

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \qquad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

$$Ay(a) + By(b) = \gamma, \tag{1.2}$$

где $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, A и B — некоторые заданные матрицы размерности $(m+n) \times n$, а λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ — неизвестные параметры. Метод пристрелки для задачи (1.1), (1.2) состоит в том, что эта двухточечная задача заменяется задачей Коши для того же уравнения с условиями

$$y(a) = s, \tag{1.3}$$

причем значения неизвестных параметров $\lambda = \operatorname{col}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ и $s = \operatorname{col}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ в решении $y(\cdot, s, \lambda)$ задачи (1.1), (1.3) требуется определить из $n+m$ уравнений

$$Ay(a, s, \lambda) + By(b, s, \lambda) = \gamma. \tag{1.4}$$

Утверждается, что двухточечная задача (1.1), (1.2) имеет столько же решений, сколько система уравнений (1.4). Главным в этом подходе является численное составление и исследование уравнения (1.4), что возможно, очевидно, лишь тогда, когда начальные задачи (1.1), (1.3) имеют на отрезке $[a,b]$ единственное решение при произвольных значениях λ и s. В связи с этим обычно предполагают, что функция f в правой части (1.1) непрерывна на всем пространстве и везде удовлетворяет условию Липшица по $y \in \mathbb{R}^n$.

При использовании численных методов, как правило, не рассматриваются случаи, когда ищутся решения, принимающие значения в заданном (возможно, ограниченном) замкнутом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, и, соответственно, подходящие условия регулярности накладываются на функцию f только на множестве $[a,b] \times D \times \mathbb{R}^m$. Например, в случае скалярной двухточечной задачи (1.2) для уравнения

$$y'(x) = y^2(x), \qquad x \in [a,b], \tag{1.5}$$

глобальному условию Липшица правая часть (1.5), очевидно, не удовлетворяет. Локальное решение соответствующей задачи Коши (1.5), (1.3) имеет вид

$$y(x,s) = -\frac{1}{x - s^{-1} - a}, \qquad x \in [a,b].$$

Следовательно, если $0 \le s^{-1} \le b - a$, то решение начальной задачи (1.5), (1.3) непродолжимо на весь промежуток $[a,b]$, и поэтому даже составление уравнения (1.4) не имеет смысла.

Указанные трудности в ряде случаев можно преодолеть с использованием подходящих численно-аналитических методов (см., например, [13–18]).

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехточечную краевую задачу с неразделяющимися линейными краевыми условиями вида

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

$$Ax(0) + Bx(\xi) + x(T) = d, \tag{2.2}$$

где $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$, D — замыкание ограниченной области в $\mathbb{R}^n$, $\{A, B\} \subset GL_n(\mathbb{R})$, $\xi \in (0,T)$. В данной работе указывается один способ исследования разрешимости задачи (2.1), (2.2), основанный на введении в краевые условия подходящего числа параметров и позволяющий в аналитическом виде строить приближенные решения.

Предполагается, что функция $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и, кроме того, найдется такая постоянная матрица K с неотрицательными компонентами $\{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$, что при произвольных $\{u, v\} \subset D$ имеет место неравенство

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K|u - v|. \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее знаки $\le$, $\ge$, $|\cdot|$, $\max$ и $\min$ понимаются покомпонентно.

К виду (2.2), очевидно, всегда можно привести трехточечное краевое условие

$$Ax(0) + Bx(\xi) + Cx(T) = d$$

с неособенной матрицей C (достаточно заменить A, B и d в (2.2) на $C^{-1}A$, $C^{-1}B$ и $C^{-1}d$ соответственно). Условие (2.2) неразделяющееся, если только обе матрицы A и B не равны нулю.

Определение 2.1. *Для произвольного вектора $\rho = \mathrm{col}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ с неотрицательными компонентами под открытой ρ-окрестностью вектора $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем понимать множество $B(x,\rho)$, состоящее из тех $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, для которых выполняются неравенства*

$$|y_k - x_k| < \rho_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Принадлежность вектора y замкнутой ρ-окрестности $\bar{B}(x,\rho)$ вектора x определяется неравенствами

$$|y_k - x_k| \le \rho_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Покомпонентные оценки типа (2.3), (2.4), как правило, точнее соответствующих неравенств в терминах норм, поскольку полнее используют алгебраическую структуру пространства $\mathbb{R}^n$.

По заданной функции f определим вектор

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right]. \tag{2.5}$$

Справедлива оценка [16, 19]

$$\delta_D(f) \le \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f(t,x)|. \tag{2.6}$$

Напомним, что операции вычисления абсолютной величины, максимума и минимума здесь понимаются в покомпонентном смысле. Равенство в (2.6) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f_k(t,x) = -\min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f_k(t,x)$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Далее, для $\{z, \lambda\} \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d - B\lambda - (A + \mathbf{1}_n)z|, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{1}_n$ — единичная матрица размерности n.

Ограничимся рассмотрением класса краевых задач вида (2.1), (2.2), для которых максимальное собственное значение $r(K)$ неотрицательной матрицы K в условии Липшица (2.3) удовлетворяет условию*

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{2.8}$$

3. Преобразование к двухточечной задаче с параметром в краевых условиях. Заменим значение искомого решения задачи (2.1), (2.2) в точке ξ вектором n параметров $(\lambda_k)_{k=1}^n$, принимающим значения в некотором множестве $\Lambda \subset D$:

$$x(\xi) = \lambda. \tag{3.1}$$

Любая функция x, для которой справедливы соотношения (3.1) и (2.2), очевидно, удовлетворяет равенству

$$Ax(0) + x(T) = d - B\lambda. \tag{3.2}$$

Будем рассматривать задачу (2.1), (3.2), в которой двухточечное краевое условие (3.2) содержит неизвестный параметр $\lambda \in \Lambda$.

Замечание 3.1. Ясно, что множество решений исходной трехточечной задачи (2.1), (2.2) совпадает с множеством тех решений n-параметрического семейства двухточечных задач (2.1), (3.2), которые удовлетворяют дополнительному условию (3.1).

Допустим, что определенное формулой

$$\Gamma := \big\{ z \in D : B(z, \beta(z,\lambda)) \subset D \text{ для всех } \lambda \in \Lambda \big\}, \tag{3.3}$$

где $\beta : D \times \Lambda \to \mathbb{R}^n_+$ задано равенством (2.7), подмножество Γ множества D непусто: $\Gamma \neq \varnothing$.

Свяжем с параметризованной задачей (2.1), (3.2) последовательность функций

$$x_{m+1}(t,z,\lambda) := z + \int\limits_0^t f(s, x_m(s,z,\lambda))ds - tT^{-1}\int\limits_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))ds +$$
$$+ tT^{-1}[d - B\lambda - Az - z], \tag{3.4}$$

где $\lambda \in \Lambda$, $z \in \Gamma$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t,z,\lambda) \equiv z$. Нетрудно проверить, что при каждом $m \geq 0$ и всех значениях параметров $\lambda \in \Lambda$ и $z \in \Gamma$ справедливо равенство $x_m(0,z,\lambda) = z$ и, кроме того,

$$x_m(T,z,\lambda) = d - B\lambda - Az, \tag{3.5}$$

*См. п. 4, замечание 4.4.

т. е. функция (3.4) удовлетворяет двухточечному условию (3.2).

Замечание 3.2. Двухточечное условие (3.2), очевидно, содержит в явном виде только некоторые p из параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, где $p = \operatorname{rank} B$. Поэтому соотношение (3.1), согласно которому осуществляется переход от трехточечного условия (2.2) к двухточечному условию (3.2), можно заменить равенством

$$Bx(\xi) = B\lambda. \tag{3.6}$$

Иными словами, достаточно рассматривать только те решения двухточечной задачи (2.1), (3.2), для которых выполнено дополнительное условие (3.6). При этом сразу исключаются из рассмотрения те $n-p$ параметров, значения которых определять не требуется. В случае, когда $p = n$ (т. е. $\det B \neq 0$), условия (3.6) и (3.1), очевидно, означают одно и то же.

Можно было бы также построить подобную схему, заменив трехточечное условие (2.2) условием

$$Ax(0) + x(T) = d - \mu \tag{3.7}$$

и искать те решения x двухточечной задачи (2.1), (3.7), для которых $Bx(\xi) = \mu$.

4. Сходимость последовательных приближений. Укажем условия, достаточные для равномерной сходимости рекуррентной последовательности функций (3.4), и установим связь ее предела с множествами решений задач (2.1), (2.2) и (2.1), (3.2).

Теорема 4.1. *Предположим, что для непрерывной функции $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ выполнено условие (2.3) с матрицей K, для которой имеет место неравенство (2.8). Пусть, кроме того, матрицы A, B и вектор d таковы, что $\Gamma \neq \varnothing$. Тогда:*

1) последовательность (3.4) сходится равномерно по $t \in [0,T]$ при всех $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$;

2) предельная функция

$$x^*(t,z,\lambda) := \lim_{m\to+\infty} x_m(t,z,\lambda) \tag{4.1}$$

последовательности (3.4) при всех $(z,\lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ представляет собой единственное решение интегрального уравнения

$$x(t) := z + \int_0^t f(s,x(s))ds - tT^{-1}\int_0^T f(s,x(s))ds + \\ + tT^{-1}[d - B\lambda - Az - z], \qquad t \in [0,T], \tag{4.2}$$

или, что то же, единственное решение интегро-дифференциального уравнения

$$x'(t) = f(t,x(t)) + T^{-1}\Delta(z,\lambda), \qquad t \in [0,T], \tag{4.3}$$

где

$$\Delta(z,\lambda) := d - B\lambda - Az - z - \int_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda))ds \tag{4.4}$$

для $(z,\lambda)\in\Gamma\times\Lambda$*, удовлетворяющее краевым условиям (3.2);*

3) для всех $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times\Gamma\times\Lambda$ *справедлива оценка*

$$|x^*(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)|\le h(t,z,\lambda), \tag{4.5}$$

где

$$h(t,z,\lambda):=\frac{20t}{9}\left(1-\frac{t}{T}\right)Q^m(\mathbf{1}_n-Q)^{-1}[\delta_D(f)+K|d-B\lambda-Az-z|]$$

и $Q:=\dfrac{3T}{10}K.$

Доказательство. Будем рассуждать стандартным образом, т. е. покажем, что последовательность (3.4) является фундаментальной последовательностью в банаховом пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ с обычной нормой. Докажем сначала, что при $(z,\lambda)\in\Gamma\times\Lambda$ значения всех функций (3.4) содержатся в D. Для каждой непрерывной функции $x:[0,T]\to\to\mathbb{R}^n$ имеет место оценка (см., например, [17], лемма 4, случай $\theta(t)=t$)

$$\left|\int\limits_0^t\left(x(\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(s)ds\right)d\tau\right|\le\frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{\tau\in[0,T]}x(\tau)-\min_{\tau\in[0,T]}x(\tau)\right],$$

где

$$\alpha_1(t):=2t\left(1-tT^{-1}\right),\qquad t\in[0,T]. \tag{4.6}$$

Очевидно, $\max_{t\in[0,T]}\alpha_1(t)=T/2$. Поэтому при $m=0$ из (3.4), в силу (2.5) и (2.7), вытекает, что для произвольных $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times\Gamma\times\Lambda$

$$|x_1(t,z,\lambda)-z|\le\alpha_1(t)\delta_D(f)+|d-B\lambda-z-Az|\le\beta(z,\lambda).$$

Следовательно, в силу (3.3), при всех таких (t,z,λ) имеем $x_m(t,z,\lambda)\in D$, $m=0,1,2,\ldots$. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1 из [20], можно показать, что при всех $m\ge 0$, $j\ge 0$ и $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times\Gamma\times\Lambda$

$$|x_{m+j}(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)|\le\frac{10t}{9}\alpha_1(t)Q^m\left[\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f)+\right.$$
$$\left.+K\sum_{i=0}^{j-1}Q^{i-1}|d-B\lambda-z-Az|\right]. \tag{4.7}$$

Поскольку, в силу (2.8), $\lim_{m\to+\infty}Q^m=0$ и $\sum_{i=0}^{+\infty}Q^i=(\mathbf{1}_n-Q)^{-1}$, из (4.7) очевидно, что последовательность (3.4) фундаментальна в равномерной метрике. Устремляя в (4.7) j к $+\infty$, получаем, что равномерный предел (4.1) последовательности (3.4) удовлетворяет неравенству (4.5). Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в (3.4) и (3.5), убеждаемся, что функция (4.1) удовлетворяет уравнениям (4.2), (4.3) и условию (3.2).

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Из вида уравнения (4.2) ясно, что его единственное в условиях теоремы 4.1 решение (4.1) при всех $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ удовлетворяет условию

$$x^*(0, z, \lambda) = z. \tag{4.8}$$

Замечание 4.2. При исследовании содержащих параметры задач типа (2.1), (3.2) в некоторых работах строятся два разных итерационных процесса для неизвестной функции и для вектора параметров [3, 14, 15].

Вид „возмущенного” уравнения (4.3) наводит на мысль, что параметризованную краевую задачу (2.1), (3.2) можно интерпретировать как семейство задач Коши

$$x(0) = z \tag{4.9}$$

для дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \mu, \qquad t \in [0, T], \tag{4.10}$$

где вектор параметров μ принимает значения в соответствующем множестве. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.1. Пусть $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ и $\mu \in \mathbb{R}^n$. Тогда для того чтобы некоторое решение задачи Коши (4.10), (4.9) удовлетворяло также и двухточечным условиям (3.2), необходимо и достаточно, чтобы параметр μ в (4.10) был задан равенством*

$$\mu = \frac{1}{T}\Delta(z, \lambda), \tag{4.11}$$

где $\Delta : \Gamma \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ — функция, определенная формулой (4.4).

Замечание 4.3. Из теоремы 4.1 вытекает, что в указанных выше условиях при всех $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ существует предельная функция (4.1) рекуррентной последовательности (3.4), и, следовательно, отображение (4.4) определено однозначным образом.

Доказательство теоремы 4.2. *Достаточность.* Пусть в (4.10) $\mu = T^{-1}\Delta(z, \lambda)$, где z и λ — некоторые заданные векторы из Γ и Λ соответственно, а Δ определено формулой (4.4). Согласно замечанию 4.3, выражение $\Delta(z, \lambda)$ имеет смысл при всех $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$. Из теоремы 4.1 следует, что при заданных z и λ равномерный предел (4.1) соответствующей последовательности (3.4) является единственным решением двухточечной задачи (4.3), (3.2). Как указано в замечании 4.1, эта функция удовлетворяет и начальному условию (4.8), т. е. является решением задачи Коши (4.10), (4.9) при заданном формулой (4.11) значении параметра μ.

Необходимость. Пусть $z \in \Gamma$, $\lambda \in \Lambda$ и $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ — произвольным образом заданные векторы и $\bar{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши (4.9) для уравнения

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \bar{\mu}, \qquad t \in [0, T], \tag{4.12}$$

при заданном значении λ удовлетворяющее двухточечному условию (3.2). Предположим, что найдется некоторое другое значение $\bar{\bar{\mu}}$, при котором некоторое решение $\bar{\bar{x}}$ задачи (4.9) для уравнения

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \bar{\bar{\mu}}, \qquad t \in [0, T], \tag{4.13}$$

удовлетворяет двухточечному условию (3.2). Из (4.9), (4.12) и (4.13) очевидно, что функции $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\bar{x}(t) = z + \int\limits_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t, \qquad t \in [0, T], \tag{4.14}$$

и

$$\bar{\bar{x}}(t) = z + \int\limits_0^t f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds + \bar{\bar{\mu}}t, \qquad t \in [0, T], \tag{4.15}$$

соответственно. При $t = T$ из (4.14), (4.15) вытекают соотношения

$$T\bar{\mu} = \bar{x}(T) - z - \int\limits_0^T f(s, \bar{x}(s))ds \tag{4.16}$$

и

$$T\bar{\bar{\mu}} = \bar{\bar{x}}(T) - z - \int\limits_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds. \tag{4.17}$$

Функция $\bar{x}$, по предположению, удовлетворяет двухточечному условию (3.2),

$$A\bar{x}(0) + \bar{x}(T) = d - B\lambda,$$

и условию Коши $\bar{x}(0) = z$, откуда следует равенство

$$\bar{x}(T) = d - B\lambda - Az.$$

Аналогично проверяется равенство

$$\bar{\bar{x}}(T) = d - B\lambda - Az.$$

Следовательно, из (4.16) и (4.17) вытекает

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}\left[d - B\lambda - Az - z - \int\limits_0^T f(s, \bar{x}(s))ds\right] \tag{4.18}$$

и

$$\bar{\bar{\mu}} = \frac{1}{T}\left[d - B\lambda - Az - z - \int\limits_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds\right]. \tag{4.19}$$

Внося (4.18) и (4.19) соответственно в (4.14) и (4.15), получаем, что для каждого $t \in [0, T]$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[d - B\lambda - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds\right] \tag{4.20}$$

и

$$\bar{\bar{x}}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[d - B\lambda - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds\right]. \tag{4.21}$$

Напомним, что здесь $z \in \Gamma$, а $\lambda \in \Lambda$. Следовательно, аналогично доказательству теоремы 4.1, исходя из вида уравнений (4.20), (4.21) и определения (3.3) множества Γ, можно показать, что все значения функций $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{x}$ содержатся в множестве D:

$$\bar{x}([0, T]) \cup \bar{\bar{x}}([0, T]) \subset D. \tag{4.22}$$

Из (4.20) и (4.21) очевидно, что

$$\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t \left[f(s, \bar{\bar{x}}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\right] ds -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^T \left[f(s, \bar{\bar{x}}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\right] ds, \qquad t \in [0, T],$$

и поэтому, в силу соотношения (4.22) и условия Липшица (2.3), функция

$$r(t) := |\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t)|, \qquad t \in [0, T],$$

удовлетворяет интегральному неравенству

$$r(t) \le K\left[\int_0^t r(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T r(s)ds\right] \le$$

$$\le K\alpha_1(t) \max_{s \in [a,b]} r(s), \qquad t \in [a, b], \tag{4.23}$$

где функция α_1 задана формулой (4.6). Используя (4.23) рекуррентно, приходим к неравенству

$$r(t) \le K^m \alpha_m(t) \max_{s \in [a,b]} r(s), \qquad t \in [a, b], \tag{4.24}$$

где натуральное m произвольно, а

$$\alpha_k(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_{k-1}(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T \alpha_{k-1}(s)ds \tag{4.25}$$

для всех t из $[0, T]$ и $k = 2, 3, \ldots$. Согласно лемме 2.4 из [16], функции (4.25) при всех $t \in [0, T]$ и $k = 1, 2, \ldots$ допускают оценку

$$\alpha_k(t) \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)\left(\frac{3T}{10}\right)^{k-1}. \tag{4.26}$$

Поэтому из (4.24) вытекает, что при каждом натуральном m

$$r(t) \leq \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1}\max_{s\in[a,b]} r(s), \qquad t \in [a, b].$$

Устремляя m в последнем неравенстве к $+\infty$ и учитывая условие (2.8), заключаем, что $r \equiv 0$ на $[0, T]$, т. е. функции $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ совпадают, и поэтому $\bar{\mu} = \bar{\bar{\mu}}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu = T^{-1}\Delta(z, \lambda)$ — единственное значение параметра μ в уравнении (4.10), при котором решение задачи Коши (4.10), (4.9) удовлетворяет двухточечному условию (3.2).

Теорема доказана.

Замечание 4.4. Из леммы 3 работы [17] вытекает, что при произвольно малом положительном ε всегда найдется такой номер k_ε, что все функции (4.25), начиная с k_ε-й, допускают оценку

$$\alpha_k(t) \leq \left(\frac{T}{q} + \varepsilon\right)^{k-k_\varepsilon}\alpha_{k_\varepsilon}(t), \qquad t \in [0, T], \quad k \geq k_\varepsilon,$$

где $q \approx 3{,}416131$. Воспользовавшись этим неравенством вместо оценки (4.26) и соответствующим образом изменив доказательства теорем 4.1 и 4.2, можно показать, что неравенство (2.8) с сохранением всех установленных здесь утверждений можно заменить несколько менее ограничительным условием

$$r(K) < \frac{q}{T}.$$

При этом изменятся некоторые технические детали (например, вид функции h в оценке (4.5)).

Выясним связь определенной в условиях теорем 4.1 и 4.2 функции (4.1) с множеством решений двухточечной задачи (2.1), (3.2), содержащей свободный параметр $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 4.3. *В условиях теоремы 4.1 зависящая от параметров $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ функция $x^*(\cdot, z, \lambda)$, заданная формулой (4.1), является решением двухточечной задачи (2.1), (3.2) с параметром λ тогда и только тогда, когда z и λ удовлетворяют соотношениям*

$$\int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda))ds = d - B\lambda - Az - z. \tag{4.27}$$

Функция (4.1) является решением исходной трехточечной задачи (2.1), (2.2) тогда и только тогда, когда пара (z, λ) удовлетворяет условию (4.27), и, кроме того,

$$x^*(\xi, z, \lambda) = \lambda. \tag{4.28}$$

Доказательство. Из теоремы 4.1 следует, что при всех $(z,\lambda) \in \Gamma\times\Lambda$ функция $x^*(\cdot,z,\lambda)$ является решением двухточечной задачи (4.3), (3.2). Уравнение (4.3) совпадает с уравнением (2.1) тогда и только тогда, когда z и λ удовлетворяют условию $\Delta(z,\lambda) = 0$, т. е. выполнено равенство (4.27). Второе утверждение теоремы вытекает из замечания 3.1.

При практической реализации рассматриваемой численно-аналитической схемы естественно фиксировать некоторый номер итерации m в (3.4) и использовать $x_m(\cdot,z,\lambda)$ в качестве приближения к неизвестной функции $x^*(\cdot,z,\lambda)$, существование которой утверждается в теореме 4.1. При этом вместо (4.27), (4.28) возникают „приближенные определяющие уравнения”

$$\int\limits_0^T f(s,x_m(s,z,\lambda))ds = d - B\lambda - Az - z \tag{4.29}$$

и

$$z + \int\limits_0^t f(s,x_m(s,z,\lambda))ds - tT^{-1}\int\limits_0^T f(s,x_m(s,z,\lambda))ds +$$

$$+\, tT^{-1}[d - B\lambda - Az - z] = \lambda, \tag{4.30}$$

из которых можно искать подходящие значения пары параметров $(z,\lambda) \in \Gamma\times\Lambda$. Если система $2n$ уравнений (4.29), (4.30) имеет изолированное решение $(\bar z,\bar\lambda) \in \Gamma\times\Lambda$, с использованием топологических и функционально-аналитических методов (см., например, теорему 3.1 из [16] и теорему 19.2 в [21]) при соответствующих дополнительных предположениях можно доказать разрешимость и системы (4.27), (4.28), тем самым установив существование решения исходной трехточечной задачи. При этом функцию

$$\bar x_m(t) := x_m(\cdot,\bar z,\bar\lambda) \tag{4.31}$$

можно рассматривать как приближение к одному из решений задачи (2.1), (2.2).

5. Пример двумерной трехточечной задачи. Рассмотрим следующую трехточечную задачу:

$$x_1'(t) = x_2(t), \tag{5.1$_\mathrm{a}$}$$

$$x_2'(t) = \frac{1}{8}\,t\,x_2 - \frac{1}{2}\,{x_2}^2 - \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{9}{32} + \frac{1}{16}\,t^2, \qquad t \in [0,1]; \tag{5.1$_\mathrm{b}$}$$

$$x_2(0) + x_1\left(\frac{1}{2}\right) + x_1(1) = \frac{9}{32}, \tag{5.1$_\mathrm{c}$}$$

$$x_1(0) + x_2(1) = \frac{5}{16}. \tag{5.1$_\mathrm{d}$}$$

Условия (5.1_c), (5.1_d), очевидно, можно записать в виде (2.2) с $T = 1$ и

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d := \begin{bmatrix} \frac{9}{32} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}, \quad \xi := \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

Ограничимся рассмотрением тех решений системы (5.1_a), (5.1_b), все значения которых содержатся во множестве

$$D := \left\{(x_1, x_2) : |x_1| \le 1,\ |x_2| \le \frac{3}{4}\right\}. \tag{5.3}$$

Нетрудно проверить, что для функции $f : [0,1] \times D \to \mathbb{R}^2$, заданной формулой

$$f(t, x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{8}\, t\, x_2 - \frac{1}{2}\, {x_2}^2 - \frac{1}{2}\, x_1 + \frac{9}{32} + \frac{t^2}{16} \end{bmatrix}, \quad (t, x_1, x_2) \in [0,1] \times D,$$

условие Липшица (2.3) при всех $t \in [0,1]$ и $\{u, v\} \subset D$ выполнено с матрицей

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Максимальное собственное число матрицы (5.4) равно $(7 + \sqrt{177})/16 \approx 1{,}27$, что меньше $\frac{10}{3}$, и, значит, выполняется неравенство (2.8).

Будем искать решения трехточечной задачи (5.1) среди решений системы (5.1_a), (5.1_b), удовлетворяющих параметризованным двухточечным условиям

$$x_2(0) + x_1(1) = \frac{9}{32} - \lambda_1, \tag{5.5}$$

$$x_1(0) + x_2(1) = \frac{5}{16}. \tag{5.6}$$

Условия (5.5), (5.6), очевидно, совпадают с (3.2) при заданных равенствами (5.2) матрицах A, B и векторе d. За область изменения двумерного вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ примем, например, содержащийся в множестве (5.3) прямоугольник

$$\Lambda := \left\{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1| \le \frac{1}{4},\ |\lambda_2| \le \frac{1}{2}\right\}. \tag{5.7}$$

Решение (x_1, x_2) задачи (5.1_a), (5.1_b), (5.5), (5.6) является решением исходной трехточечной задачи (5.1) тогда и только тогда, когда выполняются дополнительные условия $x_1\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda_1$ и $x_2\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda_2$.

Воспользуемся подходом, основанным на теореме 4.1, для чего проверим выполнение ее условий. Величина (2.5) в рассматриваемом случае задается равенством

$$\delta_D(f) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{185}{64} \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

в чем можно убедиться непосредственными вычислениями. Далее, из (5.3), (5.7), (5.2) и (5.8) ясно, что компоненты определенной формулой (2.7) функции $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : D \times \Lambda \to \mathbb{R}^2$ для данной задачи имеют вид

$$\beta_1(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{3}{8} + \left| \frac{9}{32} - \lambda_1 - z_1 - z_2 \right|,$$

$$\beta_1(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{185}{512} + \left| \frac{5}{15} - z_1 - z_2 \right|.$$

Следовательно, согласно определению (3.3) множества Γ, необходимое и достаточное условие принадлежности этому множеству некоторой точки (z_1, z_2) из D состоит в том, чтобы при всех $\lambda_1 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ выполнялись неравенства

$$\left| \frac{9}{32} - \lambda_1 - z_1 - z_2 \right| \le \frac{5}{8}, \tag{5.9}$$

$$\left| \frac{5}{15} - z_1 - z_2 \right| \le \frac{199}{512}. \tag{5.10}$$

Множество Γ таких пар $(z_1, z_2) \in D$, очевидно, непусто. Таким образом, все условия теоремы 4.1 в данном случае выполнены, и поэтому при всех $(z, \lambda) \in \Gamma \times \Lambda$ на $[0, 1]$ задана функция (4.1), о которой идет речь в теоремах 4.2 и 4.3.

Замечание 5.1. В некоторых более ранних работах (см., например, [13]) в определении множеств типа (3.3) вместо величины вида (2.5) рассматривался вектор из правой части оценки (2.6). В данном примере правая часть (2.6) равна $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Вследствие этого вместо (5.9), (5.10) нужно было бы потребовать выполнения более жестких неравенств, которые в данном примере не имеют места, и, следовательно, множество Γ оказалось бы пустым.

Построим приближенные решения задачи (5.1), воспользовавшись подходом, указанным в конце п. 4. Для этого вычислим некоторые из функций рекуррентной последовательности (3.4) с применением пакета символических вычислений Maple. Положим нулевую итерацию тождественно равной z, $z \in \Gamma$. Тогда при $m = 1$ из (3.4) получим

$$x_{11}(t, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = z_1 + \frac{9}{32}\, t - t\, \lambda_1 - z_1\, t - z_2\, t, \tag{5.11}$$

$$x_{12}(t, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = z_2 + \frac{7}{24}\, t + \frac{1}{48}\, t^3 + \frac{1}{16}\, z_2\, t^2 - \frac{17}{16}\, z_2\, t - z_1\, t \tag{5.12}$$

для всех $t \in [0, 1]$, $(z_1, z_2) \in \Gamma$ и λ_1, λ_2, удовлетворяющих неравенствам

$$|\lambda_1| \le \frac{1}{4}, \quad |\lambda_2| \le \frac{1}{2}.$$

Здесь и ниже символами x_{k1} и x_{k2} обозначены соответственно первая и вторая компоненты вектора x_k.

Система приближенных определяющих уравнений (4.29), (4.30) для задачи (5.1) при $m = 1$ имеет вид

$$\frac{25}{192} - \frac{143}{96} z_2 - \frac{1}{2} z_1 - \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{40391}{483840} - \frac{28157}{23040} z_2 - \frac{583}{720} z_1 + \frac{827}{5120} z_2^2 - \frac{31}{192} z_2 z_1 + \frac{1}{6} z_1^2 - \frac{1}{4} \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{5}{8} z_1 + \frac{313}{3072} - \frac{3}{8} z_2 - \frac{3}{2} \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{129067}{294912} z_2 + \frac{98569}{589824} - \frac{899}{1536} z_1 - \frac{63}{1024} z_2^2 + \frac{1}{1024} z_2 z_1 + \frac{1}{16} z_1^2 - \frac{1}{16} \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Замечание 5.2. Ранг матрицы B, соответствующей двухточечным условиям (5.1_{c}), (5.1_{d}) при их записи в виде (2.2), равен 1 $\left(\text{условия не содержат в явном виде } x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Поэтому, в силу замечания 3.2, как приведенные выше, так и все прочие определяющие уравнения можно не решать относительно параметра λ_2, ибо его значение в данной задаче не играет никакой роли. В настоящем примере для иллюстрации подхода мы записываем все уравнения полностью.

Приближенно решая последнюю систему уравнений, получаем

$$z_1 \approx 0{,}06775109879, \quad z_2 \approx 0{,}006168107627, \tag{5.13}$$

$$\lambda_1 \approx 0{,}08714487359, \quad \lambda_2 \approx 0{,}125. \tag{5.14}$$

Подставляя (5.13), (5.14) в (5.11) и (5.12), находим функцию вида (4.31) — „первое приближение” к решению трехточечной задачи (5.1), соответствующую вычисленным значениям (5.13), (5.14) параметров z_1, z_2 и λ_1, λ_2:

$$\begin{gathered} \bar{x}_{11}(t) = 0{,}06775109879 + 0{,}1201859200\, t, \\ \bar{x}_{12}(t) = 0,006168107627 + 0{,}2173619535\, t + \frac{t^3}{48} + 0{,}0003855067267\, t^2. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Заметим, что данная трехточечная задача (5.1) имеет решение

$$x_1(t) = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{16}, \qquad x_2(t) = \frac{t}{4}, \qquad t \in [0,1], \tag{5.16}$$

проходящее в момент времени 0 через точку $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$ множества Г.

На рис. 1 и 2 изображены графики соответственно первой и второй компонент точного решения (5.16) задачи (5.1) (крестики) и его „первого приближения” (5.15) (сплошная линия). Компоненты отклонения „первого приближения” (5.15) от решения (5.16), т. е. функции $x_1 - \bar{x}_{11}$ и $x_2 - \bar{x}_{12}$, показаны соответственно на рис. 3 и 4.

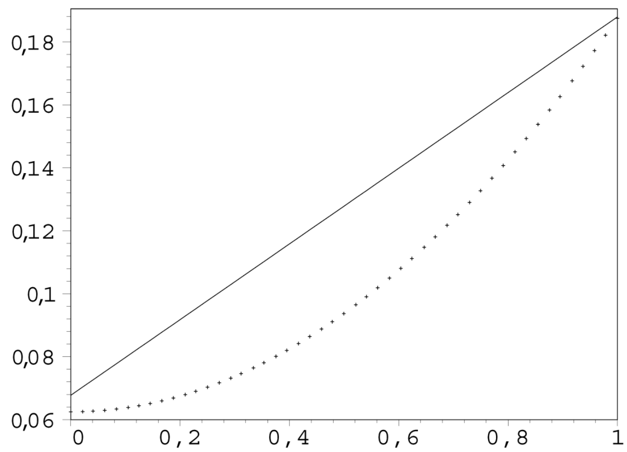

Рис. 1. Первая компонента точного решения (5.16) и его „первого приближения” (5.15).

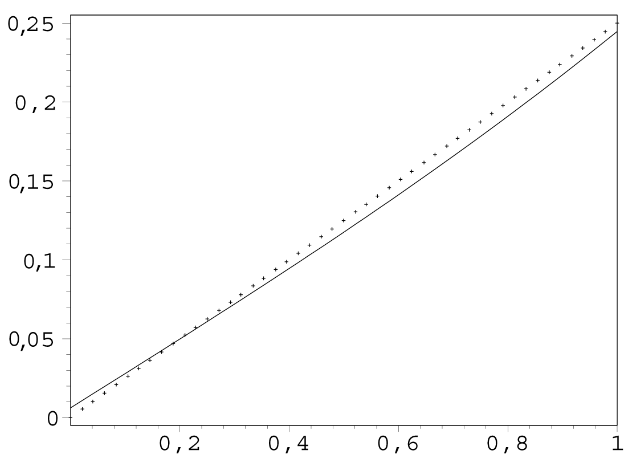

Рис. 2. Вторая компонента точного решения (5.16) и его „первого приближения” (5.15).

С использованием найденных выше формул (5.11), (5.12) для первой итерации можно аналогично построить вторую итерацию $x_2(\cdot, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ($m = 2$ в формуле (3.4)), компоненты которой имеют вид

$$x_{21}(t, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = z_1 + \frac{t^4}{192} + \frac{t^3}{48} z_2 + \frac{7t^2}{48} - \frac{17t^2}{32} z_2 - \frac{t^2}{2} z_1 -$$

$$- \frac{47t}{96} z_2 + \frac{25t}{192} - \frac{t}{2} z_1 - t\lambda_1, \qquad t \in [0, 1], \tag{5.17}$$

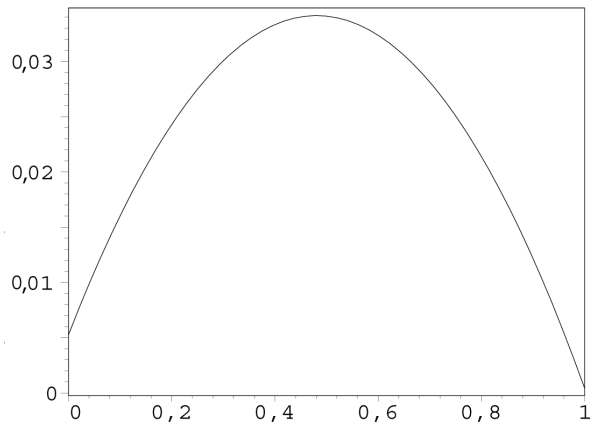

Рис. 3.Погрешность первой компоненты „первого приближения” (5.15) по отношению к решению (5.16).

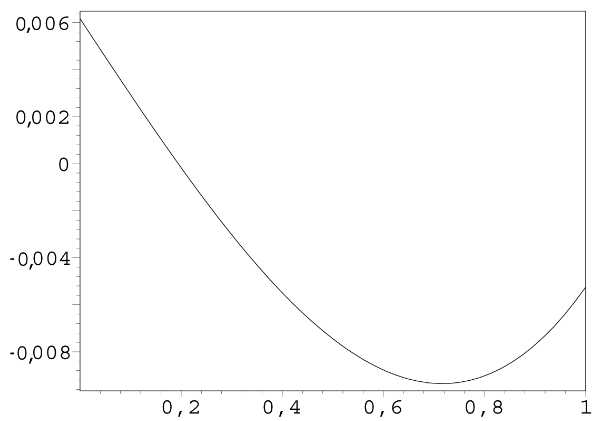

Рис. 4. Погрешность второй компоненты „первого приближения” (5.15) по отношению к решению (5.16).

и

$$
\begin{aligned}
x_{22}(t, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2) = {} & z_2 + \frac{176471}{483840}\, t - \frac{28157}{23040}\, z_2 t + \frac{17\, t^3}{288}\, z_2 + \frac{t^2}{6}\, z_2 + \frac{t^2}{4}\, z_1 - \\
& - \frac{t^6 z_2}{4608} - \frac{943\, t}{720}\, z_1 - \frac{1733}{5120}\, z_2^2 t + \frac{17\, t^5 z_2}{3840} + \frac{t^5 z_1}{240} - \frac{t^5 z_2^2}{2560} - \\
& - \frac{t^4 z_2}{128} + \frac{17\, t^4 z_2^2}{1024} - \frac{107\, t^3 z_2^2}{512} + \frac{t^3 z_1}{18} - \frac{t^3 z_1^2}{6} + \frac{65\, t^3}{3456} - \frac{9\, t^2}{128} - \\
& - \frac{t^5}{1440} - \frac{t^7}{32256} + \frac{t^2}{2}\, z_2 z_1 + \frac{17\, t^2}{32}\, z_2^2 + \frac{t^2}{4}\, \lambda_1 + \frac{t}{6}\, z_1^2 - \\
& - \frac{t}{4}\, \lambda_1 + \frac{t^4}{64}\, z_2 z_1 - \frac{31}{192}\, t z_2 z_1 - \frac{17}{48}\, t^3 z_2 z_1, \qquad t \in [0, 1], \quad (5.18)
\end{aligned}
$$

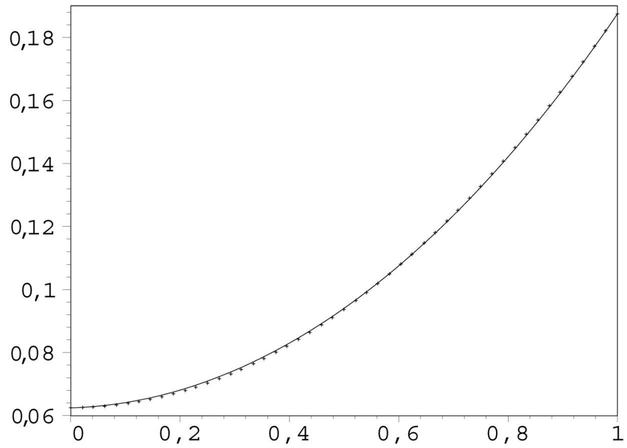

Рис. 5. Первая компонента решения (5.16) и ее „второе приближение” (5.21).

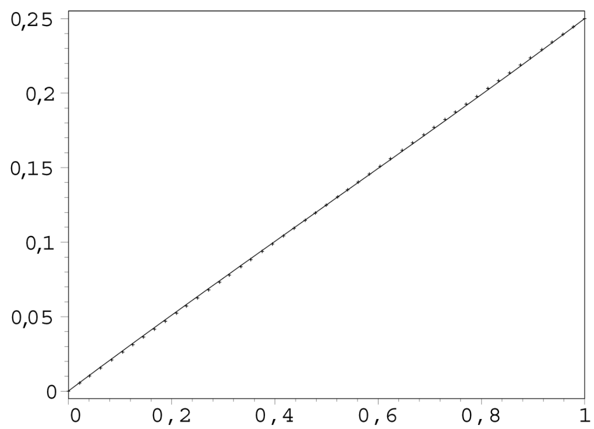

Рис. 6. Вторая компонента решения (5.16) и ее „второе приближение” (5.22).

и записать соответствующую систему уравнений (4.29), (4.30) для нахождения значений z_1, z_2, λ_1, λ_2. Последняя система, как показывают вычисления, имеет приближенное решение

$$z_1 \approx 0{,}06242777432, \quad z_2 \approx 0{,}0001215436768, \tag{5.19}$$

$$\lambda_2 \approx 0{,}125, \quad \lambda_1 \approx 0{,}09364329365. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.19), (5.20) в (5.17) и (5.18), получаем „второе приближение”, компоненты которого имеют вид

$$\bar{x}_{21}(t) = 0{,}06242777432 + \frac{t^4}{192} + 0{,}2532159933 \cdot 10^{-5}\, t^3 + \\ + 0{,}1145548760\, t^2 + 0{,}0052916467\, t, \qquad t \in [0,1], \tag{5.21}$$

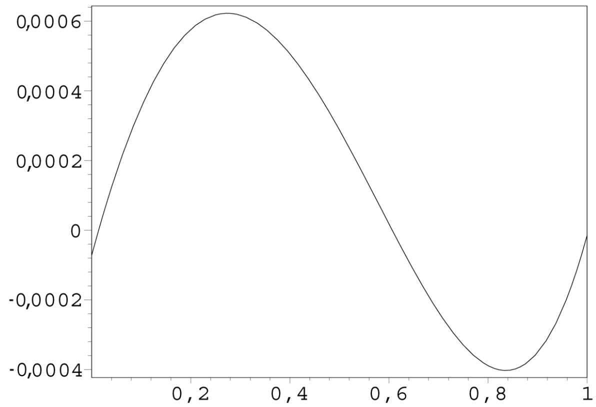

Рис. 7. Погрешность „второго приближения” (5.21) первой компоненты решения (5.16).

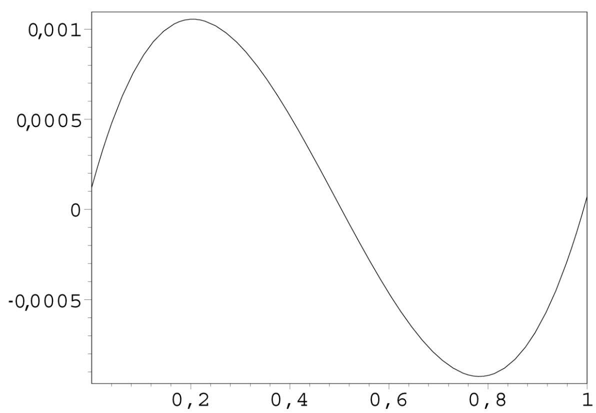

Рис. 8. Погрешность „второго приближения” (5.22) второй компоненты решения (5.16).

и

$$\begin{aligned}\bar{x}_{22}(t) = {} & -0{,}2637666597 \cdot 10^{-7}\, t^6 + 0{,}2600559795\, t + 0{,}0001215436768 - \\ & - 0{,}8307568908 \cdot 10^{-6}\, t^4 + 0{,}02163102627\, t^3 - 0{,}03127067403\, t^2 - \\ & - 0{,}0004337906399\, t^5 - \frac{t^7}{32256}, \qquad t \in [0,1], \quad (5.22)\end{aligned}$$

соответственно.

На рис. 5 изображены графики первой компоненты решения (5.16) задачи (5.1) (крестики) и ее „второго приближения” (5.21) (сплошная линия), а на рис. 6 — графики второй компоненты решения (5.16) (крестики) и ее „второго приближения” (5.22) (сплошная линия). Графики компонент отклонения „второго приближения” (5.21) и (5.22) от решения (5.16), т. е. функции $x_1 - \bar{x}_{21}$ и $x_2 - \bar{x}_{22}$, изображены соответственно на рис. 7 и 8.

Расчеты показывают, что абсолютная погрешность построенного по указанной схеме третьего приближения составляет $0{,}00035$ для первой компоненты решения и $0{,}0001$ для второй его компоненты.

1. *Goma I. A.* Method of successive approximations in a two-point boundary problem with parameter // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, № 6. — С. 594 – 599.
2. *Хосабеков О.* Достаточные условия сходимости метода Ньютона – Канторовича для краевой задачи с параметром // Докл. АН ТаджССР. — 1973. — **16**, № 8. — С. 14 – 17.
3. *Курпель Н. С., Марусяк А. Г.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами // Укр. мат. журн. – 1980. — **32**, № 2. — С. 223 – 226.
4. *Лучка А. Ю.* Применение итерационных процессов к краевым задачам для дифференциальных уравнений с параметрами // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 10. — С. 22 – 27.
5. *Ахмедов К. Т., Сваричевская Н. А., Ягубов М. А.* Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок // Докл. АН АзССР. — 1973. — **29**, № 8. — С. 3 – 7.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993.
7. *Fečkan M.* Parametrized singular boundary value problems // J. Math. Anal. and Appl. — 1994. — **188**, № 2. — P. 417 – 425.
8. *Gaines R. E., Mawhin J. L.* Coincidence degree, and nonlinear differential equations // Lect. Notes Math. — Berlin etc.: Springer, 1977. — **568**.
9. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point boundary-value problems. — New York: Dover Publ., Inc., 1992.
10. *Ascher U. M., Mattheij R. M., and Russell R. D.* Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations // Clas. in Appl. Math. — Philadelphia: SIAM, 1995. — № 13.
11. *Bhattacharyya T., Binding P. A., and Seddighi K.* Multiparameter Sturm – Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. — 2001. — **264**, № 2. — P. 560 – 576.
12. *Abramov A., Ul'yanova V., and Yukhno L.* A method for solving the multiparameter eigenvalue problem for certain systems of differential equations // Comput. Math. Math. Phys. — 2000. — **40**, № 1. — P. 18 – 26.
13. *Samoilenko A. M., Ronto N. I.* Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. — Moscow: Mir, 1980.
14. *Собкович Р.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений первого порядка с параметрами // Укр. мат. журн. — 1981. — **33**, № 6. — С. 828 – 834.
15. *Собкович Р.* Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения первого порядка с несколькими параметрами // Там же. — 1982. — **34**, № 6. — С. 796 – 802.
16. *Rontó M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations. — Singapore: World Sci., 2001.
17. *Ronto A., Rontó M.* A note on the numerical-analytic method for non-linear two-point boundary value problems // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 1. — P. 112 – 128.
18. *Ronto A., Rontó M.*On the investigation of some boundary value problems with non-linear conditions // Miskolc Math. Notes. — 2000. — **1**, № 1. — P. 45 – 57.
19. *Ронто М., Месарош Й.* Некоторые замечания о сходимости численно-аналитического метода последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 1. — С. 90 – 95.
20. *Rontó M., Shchobak N.* On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 4. — С. 482 – 510.
21. *Krasnoselskii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Y. B., and Stetsenko V. Y.* Approximate solution of operator equations. — Groningen: Noordhoff, 1972.

Получено 19.07.2004