УДК 31.534

ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ПЕРЕРІЗІ СУДИННОЇ СТІНКИ

В. В. Новицький, Н. С. Браніцька

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We give some nonlinear mathematical models for oscillating processes in a cross-section of the wall of the vessel.

Наведено деякі нелінійні математичні моделі коливних процесів при поперечному перерізі судинної стінки.

Відомо, що в людини серце, кровоносні і лімфатичні судини утворюють серцево-судинну систему. До кровоносних судин належать: артерії, артеріоли, капіляри, венули і вени.

Стінка великих артерій і вен складається з трьох головних шарів (оболонок): внутрішня (інтима), середня (медія) і зовнішня (адвентиція).

Ендотелій, підендотеліальний шар та внутрішня еластична мембрана утворюють внутрішню оболонку. Каркас середньої оболонки (медії) утворюють від 40 до 60 з'єднаних між собою концентричних еластичних мембран. Пружинноподібна структура медії забезпечує повернення судинної стінки у початкове положення після розтягу її пульсовою хвилею крові. Ця оболонка переважно являє собою найтовстіший шар стінки судини, будова і властивості якого суттєво відрізняються в різних областях системи кровообігу. Саме тому в літературі артерії поділяють на артерії еластичного і м'язевого типів. Відомо, що в нормі співвідношення товщини внутрішньої і середньої оболонок складає приблизно 1 : 10. Вважається, що в усіх малих артеріях середній шар є головною структурою, яка утворює стінку судини [1 – 4].

Зовнішня оболонка (адвентиція) деяких артерій може бути такою ж товстою, як і середня, або навіть товщою, і складається з рихлої з'єднувальної тканини з рідкими еластиновими і колагеновими волокнами.

Відомо, що пружні властивості стінок артерій є нелінійними і їхній модуль пружності Юнга збільшується з віддаленням від серця [3, 5]. Що стосується складових стінки судини, то еластин — це гумоподібний матеріал, модуль пружності Юнга якого дорівнює приблизно $3{\cdot}10^5$ Н$\cdot$м$^{-2}$. Колаген жорсткіший за еластин, його модуль Юнга дорівнює приблизно 10^8 Н$\cdot$м$^{-2}$. Модуль пружності Юнга для гладких м'язів приблизно такий, як і в еластину. Його значення залежить від рівня фізіологічної активності і може змінюватися від $1{\cdot}10^5$ Н$\cdot$м$^{-2}$ (повністю розслаблені гладкі м'язи) до $2{\cdot}10^6$ Н$\cdot$м$^{-2}$ (в активному стані) [3].

Будова стінки великих вен аналогічна будові стінки артерій, проте вони мають певні відмінності: середня оболонка венозної стінки значно тонша за аналогічну в артеріальній, а зовнішня (адвентиція) складається переважно з колагенових волокон і є основою венозної стінки [1, 3]. Венозна стінка тонша за артеріальну і є менш пружною.

Вивченням загальних механічних властивостей судинної стінки і їх змін при патологічних станах вчені займалися досить давно. Так, Ю. А. Владимиров та ін. (1983 р.) не тільки досліджували ізольовані стінки судини (визначали криві розтягу при тангенціальній та поздовжній деформаціях), але й вивчали деформацію цілої судини [5]. Пружні властивості стінок судин вивчали К. Каро, Т. Педлі, Р. Шротер, У. Сід [3].

Сьогодні експериментальними дослідженнями поведінки стінок кровоносних судин та їх математичним моделюванням займаються А. Вольмір, М. Ґерштейн, Б. Пуріня, П. І. Бєгун, Ю А. Шукейло та ін [1, 6]. Автори побудували просту розрахункову схему для визначення напруг у стінці судини при її малих та великих деформаціях, описали схему багатошарової оболонки, в якій тече в'язка рідина, дослідили піддатливість судинної стінки в поперечному та поздовжньому напрямках як основу для створення штучного замінника та ін.

Побудуємо нелінійну математичну модель коливних процесів при поперечному перерізі судинної стінки.

Уявимо динамічну модель поперечного перерізу судини у вигляді шестимасової ($2m_i$, $i=\overline{1,6}$) системи. Поперечним перерізом судини є коло із центром у точці $(0;0)$ в системі координат Oxy.

Між масами встановлюємо 6 пружин із різними жорсткостями ($c_i, i=\overline{1,6}$) та відповідно 6 пружин між масами та центром у точці $(0;0)$ ($c_{0i}, i=\overline{1,6}$).

Дана система має 12 степенів вільності, оскільки положення кожної маси ($2m_i, i = \overline{1,6}$) в системі координат Oxy характеризується двома незалежними координатами відповідно ($(x_i, y_i), i=\overline{1,6}$). Тому узагальнені координати системи будуть такими: $q_1 = x_1, q_2 = y_1, q_3 = x_2, q_4 = y_2, q_5 = x_3, q_6 = y_3, q_7 = x_4, q_8 = y_4, q_9 = x_5, q_{10} = y_5$, $q_{11} = x_6, q_{12} = y_6$.

Розглянемо власні коливання системи з 12 степенями вільності без урахування тертя. Для отримання відповідних диференціальних рівнянь руху скористаємося рівняннями Лагранжа II роду [7, 8]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_i}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i=\overline{1,n,}$$

де q_i — узагальнені координати, T — кінетична енергія системи, Π — потенціальна енергія.

У положенні рівноваги цю систему можна описати таким чином: коло вибраного радіуса R ділимо на 6 рівносторонніх трикутників, на колі розміщуємо 6 мас (при цьому маси $2m_1$ та $2m_4$ знаходяться на осі Ox). У положенні рівноваги початкова довжина усіх пружин системи дорівнює R.

Запишемо кінетичну та потенціальну енергії [9] досліджуваної моделі у вигляді (вважаємо, що $c_0 = c_6, y_0 = y_6, x_0 = x_6, y_7 = y_1, x_7 = x_1$)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} 2m_i\dot{y}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} 2m_i\dot{x}_i^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{6} 2c_i\left(\sqrt{(y_{i+1}-y_i)^2+(x_{i+1}-x_i)^2} - R\right)^2 + \sum_{i=1}^{6} 2c_{0i}\left(\sqrt{y_i^2+x_i^2} - R\right)^2\right),$$

де $2m_i$ — маси, (x_i, y_i) — відповідні координати мас $2m_i$, c$_i$ та c$_{0i}$ — відповідні жорсткості між масами та центром $(0,0)$ системи, R — початкова довжина пружин системи, $i = \overline{1,6}$.

Із рівнянь Лагранжа II роду після відповідних обчислень та перетворень одержимо рівняння руху

$$\begin{gathered}
m_i\dot{x}_i - c_{i-1}R\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + c_iR\frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \\
- c_{0i}R\frac{x_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}} + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - c_i(x_{i+1} - x_i) + c_{0i}x_i = 0, \\
m_i\dot{y}_i - c_{i-1}R\frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + c_iR\frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \\
- c_{0i}R\frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}} + c_{i-1}(y_i - y_{i-1}) - c_i(y_{i+1} - y_i) + c_{0i}y_i = 0, \\
i = \overline{1,6}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Введемо позначення

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix}$$

і запишемо рівняння (1) у матричній формі

$$A\ddot{q} + Cq + N(q) = 0, \tag{2}$$

де $A = \operatorname{diag}\{A, A\}$, $A = \operatorname{diag}\{m_1, m_2, \ldots, m_6\}$,

$$C = \operatorname{diag}\{C, C\}, \quad \text{де} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$C_{ij} = \begin{cases} c_{i-1} + c_i + c_{0i}, & i = j, \quad j = \overline{1,6}, \\ -c_{i-1}, & 1 \le i < j \le 6, \quad j = i+1, \\ -c_{i-1}, & i = 1, \quad j = 6. \end{cases}$$

Нелінійну частину (2) запишемо у вигляді

$$N(q) = \begin{bmatrix} N^x \\ N^y \end{bmatrix},$$

де

$$N^x = -c_{i-1}R\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} +$$

$$+ c_iR\frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - c_{0i}R\frac{x_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}},$$

$$N^y = -c_{i-1}R\frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} +$$

$$+ c_iR\frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - c_{0i}R\frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}},$$

$$i = \overline{1, 6}.$$

Розглянемо випадок, коли стінка судини є однорідною та ізотропною і серцево-судинна система людини функціонує в нормі, зокрема коливання судинної стінки є ідеальними, тобто такими, які відповідають рухові мас у напрямку відповідних променів. У цьому випадку $m_i = m, c_i = c, c_{0i} = c_0, i = \overline{1, 6}$, і маємо такі геометричні в'язі:

$$\begin{gathered} y_1 = 0, \quad y_2 = -\sqrt{3}x_2, \quad y_3 = \sqrt{3}x_3, \\ y_4 = 0, \quad y_5 = -\sqrt{3}x_5, \quad y_6 = \sqrt{3}x_6. \end{gathered} \tag{3}$$

Оскільки в початковий момент часу усі маси знаходяться на колі радіуса R_0 і закони коливань усіх мас однакові по відношенню до центра, то

$$x_1(t) = -x(t), \quad x_2(t) = x_6(t) = -\frac{1}{2}x(t), \quad x_3(t) = x_5(t) = \frac{1}{2}x(t), \quad x_4(t) = x(t), \tag{4}$$

$$x_1(0) = -R_0, \quad x_2(0) = x_6(0) = -\frac{1}{2}R_0, \quad x_3(0) = x_5(0) = \frac{1}{2}R_0, \quad x_4(0) = R_0,$$

$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_6(0) = -\frac{1}{2}\dot{x}_0, \quad \dot{x}_3(0) = \dot{x}_5(0) = \frac{1}{2}\dot{x}_0, \quad \dot{x}_4(0) = \dot{x}_0. \tag{5}$$

Підставивши (3) та (4) в систему рівнянь (1), отримаємо дванадцять однакових лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, а саме:

$$m\ddot{x} + (c + c_0)x - (c + c_0)R = 0.$$

Розв'язок такого рівняння має вигляд

$$x(t) = R + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = R + D \sin(\omega t + \varphi),$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{c_0 + c}{m}}, \quad C_1 = \frac{V}{\omega}, \quad C_2 = R_0 - R, \quad \tan \varphi = \frac{C_2}{C_1}, \quad D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

оскільки з початкових умов при $t = t_0$ усі маси знаходяться на колі радіуса R_0 і швидкість при $t = t_0$ усіх мас дорівнює V.

Одержимо систему рівнянь збуреного руху, врахувавши, що незбурений рух $x^*(t)$ має вигляд

$$x^*(t) = R + D \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x_1^*(t) = -x^*(t), \quad x_2^*(t) = x_6^*(t) = -\frac{1}{2}x^*(t),$$
$$x_3^*(t) = x_5^*(t) = \frac{1}{2}x^*(t), \quad x_4^*(t) = x^*(t), \tag{6}$$
$$y_1^*(t) = y_4^*(t) = 0, \quad y_2^*(t) = y_3^*(t) = y_5^*(t) = y_6^*(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^*(t).$$

Тоді узагальнені координати у збуреному русі запишуться так:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i^*(t) + \xi_i(t), \\ y_i(t) &= y_i^*(t) + \eta_i(t), i = \overline{1,6}, \end{aligned} \tag{7}$$

де x_i^* та y_i^* — відповідні координати в незбуреному русі (6), а ξ_i та η_i — збурення.

Підставивши (7) у систему (1), отримаємо рівняння

$$m_i(x_i^* + \xi_i)^{\cdot\cdot} - c_{i-1}R\frac{(x_i^* + \xi_i) - (x_{i-1}^* + \xi_{i-1})}{\sqrt{((y_i^* + \eta_i) - (y_{i-1}^* + \eta_{i-1}))^2 + ((x_i^* + \xi_i) - (x_{i-1}^* + \xi_{i-1}))^2}} +$$

$$+ c_iR\frac{(x_{i+1}^* + \xi_{i+1}) - (x_i^* + \xi_i)}{\sqrt{((y_{i+1}^* + \eta_{i+1}) - (y_i^* + \eta_i))^2 + ((x_{i+1}^* + \xi_{i+1}) - (x_i^* + \xi_i))^2}} -$$

$$- c_{0i}R\frac{x_i^* + \xi_i}{\sqrt{(y_i^* + \eta_i)^2 + (x_i^* + \xi_i)^2}} + c_{i-1}((x_i^* + \xi_i) - (x_{i-1}^* + \xi_{i-1})) -$$

$$- c_i(x_{i+1}^* + \xi_{i+1}) - (x_i^* + \xi_i) + c_{0i}(x_i^* + \xi_i) = 0,$$

$$m_i(y_i^* + \eta_i)^{\cdot\cdot} - c_{i-1}R\frac{(y_i^* + \eta_i) - (y_{i-1}^* + \eta_{i-1})}{\sqrt{((y_i^* + \eta_i) - (y_{i-1}^* + \eta_{i-1}))^2 + ((x_i^* + \xi_i) - (x_{i-1}^* + \xi_{i-1}))^2}} +$$

$$+ c_iR\frac{(y_{i+1}^* + \eta_{i+1}) - (y_i^* + \eta_i)}{\sqrt{((y_{i+1}^* + \eta_{i+1}) - (y_i^* + \eta_i))^2 + ((x_{i+1}^* + \xi_{i+1}) - (x_i^* + \xi_i))^2}} -$$

$$- c_{0i}R\frac{y_i^* + \eta_i}{\sqrt{(y_i^* + \eta_i)^2 + (x_i^* + \xi_i)^2}} + c_{i-1}((y_i^* + \eta_i) - (y_{i-1}^* + \eta_{i-1})) -$$

$$- c_i(y_{i+1}^* + \eta_{i+1}) - (y_i^* + \eta_i) + c_{0i}(y_i^* + \eta_i) = 0,$$

$$i = \overline{1,6}.$$

Використавши мализну збурень, розкладемо нелінійні функції в ряд Тейлора в околі точки $(\xi_i, \eta_i) = (0, 0)$. В результаті отримаємо лінійну нестаціонарну систему

$$\begin{aligned} &m_i\xi_i^{\cdot\cdot} - c_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1})(Rf_{1i}(t) - 1) + c_i(\xi_{i+1} - \xi_i)(Rf_{3i}(t) - 1) - c_{0i}\xi_i(Rf_{5i}(t) - 1) + \\ &\quad + c_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})Rf_{2i}(t) - c_i(\eta_{i+1} - \eta_i)Rf_{4i}(t) + c_{0i}\eta_iRf_{6i}(t) = 0, \\ &m_i\eta_i^{\cdot\cdot} - c_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})(Rh_{1i}(t) - 1) + c_i(\eta_{i+1} - \eta_i)(Rh_{3i}(t) - 1) - c_{0i}\eta_i(Rh_{5i}(t) - 1) + \\ &\quad + c_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1})Rf_{2i}(t) - c_i(\xi_{i+1} - \xi_i)Rf_{4i}(t) + c_{0i}\xi_iRf_{6i}(t) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$i = \overline{1,6},$$

де

$$f_{1i}(t) = \frac{(y_i^* - y_{i-1}^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}}, \quad f_{2i}(t) = \frac{(x_i^* - x_{i-1}^*)(y_i^* - y_{i-1}^*)}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$f_{3i}(t) = \frac{(y_{i+1}^* - y_i^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}}, \quad f_{4i}(t) = \frac{(x_{i+1}^* - x_i^*)(y_{i+1}^* - y_i^*)}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$f_{5i}(t) = \frac{y_i^{*2}}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}}, \quad f_{6i}(t) = \frac{x_i^*y_i^*}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}},$$

$$h_{1i}(t) = \frac{(x_i^* - x_{i-1}^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}}, \quad h_{3i}(t) = \frac{(x_{i+1}^* - x_i^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$h_{5i}(t) = \frac{x_i^{*2}}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}}, \qquad h_{6i}(t) = f_{6i}(t),$$

$$i = \overline{1,6}.$$

Запишемо (8) у матричному вигляді

$$A\ddot{g} + (C + C_1(t))g = 0,$$

де

$$g = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \qquad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_6 \end{bmatrix},$$

матриці A і C описано в (2), $C_1(t) = \begin{bmatrix} C^\xi & C^* \\ C^* & C^\eta \end{bmatrix}$,

$$C^\xi = \begin{bmatrix} C_{11}^\xi & C_{12}^\xi & 0 & 0 & 0 & C_{16}^\xi \\ C_{12}^\xi & C_{22}^\xi & C_{23}^\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23}^\xi & C_{33}^\xi & C_{34}^\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{34}^\xi & C_{44}^\xi & C_{45}^\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^\xi & C_{55}^\xi & C_{56}^\xi \\ C_{16}^\xi & 0 & 0 & 0 & C_{56}^\xi & C_{66}^\xi \end{bmatrix}$$

(C^η та C^* записуються аналогічно),

$$C_{ij}^\xi = \begin{cases} -c_{i-1}Rf_{1i}(t) - c_iRf_{3i}(t) - c_{0i}Rf_{5i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1,6}, \\ c_iRf_{3i}(t), & 1 \le i < j \le 6, \quad j = i+1, \\ c_iRf_{3i}(t), & i = 1, \quad j = 6, \end{cases}$$

$$C_{ij}^\eta = \begin{cases} -c_{i-1}Rh_{1i}(t) - c_iRh_{3i}(t) - c_{0i}Rh_{5i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1,6}, \\ c_iRh_{3i}(t), & 1 \le i < j \le 6, \quad j = i+1, \\ c_iRh_{3i}(t), & i = 1, \quad j = 6, \end{cases}$$

$$C_{ij}^* = \begin{cases} c_{i-1}Rf_{2i}(t) + c_iRf_{4i}(t) + c_{0i}Rf_{6i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1,6}, \\ -c_iRf_{4i}(t), & 1 \le i < j \le 6, \quad j = i+1, \\ -c_iRf_{4i}(t), & i = 1, \quad j = 6. \end{cases}$$

Використовуючи (6), запишемо усі функції $f_{ji}(t)$ та $h_{ji}(t)$, $j, i = \overline{1,6}$, вважаючи, що $X(t) = |x^*(t)|^{-1}$:

$$f_{1i}(t) = \frac{3}{4}X(t),\ \ i = 1,2,4,5, \quad f_{1i}(t) = 0,\ \ i = 3,6,$$

$$f_{2i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t),\ \ i = 1,2, \quad f_{2i}(t) = 0, i = 3,6, \quad f_{2i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),\ \ i = 4,5,$$

$$f_{3i}(t) = \frac{3}{4}X(t),\ \ i = 1,3,4,6, \quad f_{3i}(t) = 0,\ \ i = 2,5,$$

$$f_{4i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t),\ \ i = 1,6, \quad f_{4i}(t) = 0,\ \ i = 2,5, \quad f_{4i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),\ \ i = 3,4,$$

$$f_{5i}(t) = \frac{3}{4}X(t),\ \ i = 2,3,5,6, \quad f_{5i}(t) = 0,\ \ i = 1,4, \tag{9}$$

$$f_{6i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t), i = 3,5, \quad f_{6i}(t) = 0, i = 1,4, \quad f_{6i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),\ \ i = 2,6,$$

$$h_{1i}(t) = \frac{1}{4}X(t),\ \ i = 1,2,4,5, \quad h_{1i}(t) = X(t), i = 3,6,$$

$$h_{3i}(t) = \frac{1}{4}X(t),\ \ i = 1,3,4,6, \quad h_{3i}(t) = X(t), i = 2,5,$$

$$h_{5i}(t) = \frac{1}{4}X(t),\ \ i = 2,3,5,6, \quad h_{5i}(t) = X(t), i = 1,4.$$

Використовуючи функції (9) та враховуючи, що $X(t) = |R + D\sin(\omega t + \varphi)|^{-1}$, можна зробити висновок, що вибирати довільним чином m, R, c_0, c, R_0, V не можна. Для того щоб судина не сплющувалася, що є нормою для функціонування судинної системи, необхідно, щоб $R > D$, тобто

$$R > \frac{1}{2}\left(\frac{mV^2}{R_0(c_0 + c)} + R_0\right).$$

Отже, за допомогою описаних моделей можна дослідити один із варіантів власних коливань судинної стінки при поперечному перерізі без тиску крові на неї. Інші коливання стінки судин потребують окремого дослідження.

Слід наголосити на необхідності дослідження таких моделей, адже побудовані системи можна максимально наблизити до реальної картини функціонування судинної стінки шляхом підбирання відповідних пружин (описати усі оболочки, з яких складається стінка судини in vivo).

1. *Бегун П. И., Шукейло Ю. А.* Биомеханика: Уч. для вузов. — СПб.: Политехника, 2000. – 463 с.
2. *Лелюк В. Г., Лелюк С. Э.* Ультразвуковая ангиология. — 2-е изд., доп. и пер. — М.: Реальное время, 2003. — 336 с.
3. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения / Под ред. С. А. Регирера, В. М. Хаютина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. — 162 с.
4. *Морман Д., Хеллер. Л.* Физиология сердечно-сосудистой системы. — СПб.: Питер, 2000. — 256 с.
5. *Владимиров Ю. А., Рощупкин Д. И., Потапенко А. Я., Деев А. И.* Биофизика: Уч. / Под ред. Ю. А. Владимирова. — М.: Медицина, 1983. — 272 с.
6. *Вольмир А. С., Герштейн М. С.* Проблемы динамики оболочек кровеносных сосудов // Механика полимеров. — 1970. — №2. — С. 373 – 379.
7. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Уч. пос. / Под ред. Г. Ю. Джанелидзе и Д. Р. Меркина. — М.: Наука, 1973. — Т. 3. — 488 с.
8. *Зарубин В. С.* Математическое моделирование в технике: Уч. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 496 с.
9. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

Одержано 18.04.2004