УДК 517.9

ЧАСТКОВА СИНХРОНІЗАЦІЯ В СИСТЕМІ ГЛОБАЛЬНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

А. А. Панчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: nastyap@imath.kiev.ua

We study an appearance of a chaotic partial synchronization in a system of globally coupled maps. We make an analysis, for small values of the parameter ε, of the structure of cluster regions and conditions for a formation of chaotic attractors on cluster manifolds. We find a formula that gives a connection between transversal and longitudinal Lyapunov numbers for trajectories on the manifold and also necessary conditions for these trajectories to be transversally stable.

Досліджується виникнення хаотичної часткової синхронізації в системі глобально зв'язаних відображень. Проводиться аналіз структури кластерних зон в області малих значень параметра зв'язку ε та передумови утворення хаотичних атракторів на кластерних многовидах. Знайдено формулу зв'язку між трансверсальними та поздовжніми числами Ляпунова для траєкторій на многовиді, а також необхідні умови трансверсальної стійкості цих траєкторій.

1. Вступ. Суттєво нелінійна природа динамічних систем, що використовуються як моделі в різних галузях науки — у фізиці, біології, теорії комунікацій тощо, — останнім часом викликає підвищений інтерес. Саме завдяки своїй складності ці системи дозволяють виявити та детально дослідити багато нових, невідомих раніше, властивостей реальних явищ. Так звана система глобально зв'язаних відображень — одна із найпоширеніших математичних моделей, яка зустрічається в багатьох прикладних задачах. Розпочинаючи з піонерських робіт К. Канеко [1, 2], глобально зв'язані відображення були предметом інтенсивних досліджень. У роботах [3 – 6] проаналізовано різноманітні біфуркації переходу від повної до часткової синхронізації, такі як біфуркації розрідження та розширення, виникнення симетричних та асиметричних кластерів, біфуркація розщеплення кластера. У роботах [7, 8] доведено, що переважна кількість атракторів системи є атракторами типу Мілнора. У [9 – 11] увага приділяється висвітленню проблем, що виникають у зв'язку з похибкою комп'ютерних обчислень. Окремі питання, пов'язані з утворенням кластерів, вивчено також в [12 – 17].

Дана стаття є продовженням робіт [14, 16, 17], в яких досліджено переважно періодичні атрактори на кластерних многовидах. Розглядається система нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x_i^{k+1} = f\left(x_i^k\right) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(f\left(x_j^k\right) - f\left(x_i^k\right)\right), \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_N^k) \in \mathbb{R}^N$ — фазовий вектор, верхній індекс $k \in \mathbb{Z}^+$ — змінна дискретного часу, $f \in C^1(\mathbb{R})$ — деяке одновимірне (базисне) відображення, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — параметр зв'язку.

Уперше систему (1) із логістичною базисною функцією $f(x) = 1 - ax^2$ ($a \in [0,2]$ — параметр нелінійності) досліджував японський учений К. Канеко [1, 2]. За допомогою чисельних обчислень він отримав фазову діаграму, яка ілюструє зміну поведінки розв'язків системи в залежності від значень параметрів a та ε. Площину параметрів (a, ε) було схематично поділено на три великі області: *когерентну*, *впорядковану* та *турбулентну* фази. Для значень параметрів (a, ε), що належать когерентній фазі, яка відповідає системам із сильним зв'язком, стан повної синхронізації притягує майже всі траєкторії системи. При зменшенні сили зв'язку синхронізований стан втрачає стійкість, що приводить до десинхронізації і переходу до впорядкованої фази. Виникає *часткова синхронізація* (інша назва — *кластеризація*). При подальшому зменшенні ε точка (a, ε) перетинає границю турбулентної фази, яка знаходиться в області досить малих додатних значень параметра зв'язку ε і великих (близьких до граничного) значень параметра нелінійності a. Поведінка системи (1) у турбулентній фазі має в основному непередбачуваний („турбулентний") характер. У той же час у цій області було виявлено певні зони значень параметрів, в яких спостерігається велика різноманітність кластерних станів малої та великої розмірностей із різним (симетричним та асиметричним) розподілом елементів по кластерах (див. [2, 5, 17]). Такого роду області всередині турбулентної фази ми називаємо *кластерними* зонами. Метою даної статті є дослідження структури кластерних зон із точки зору характеризації можливої асимптотичної поведінки розв'язків системи (1) в залежності від базисної функції f та параметра ε.

2. Виникнення кластерів. Система (1) задає відображення простору $\mathbb{R}^N$ в себе, яке ми будемо позначати F. Очевидно, що $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Динаміка відображення F може мати різноманітний характер в залежності від базисної функції f та коефіцієнта зв'язку ε. Виділяють три основних типи асимптотичної (при $n \to \infty$) поведінки елементів фазового вектора $\mathbf{x}^k$ під дією F, а саме:

1) повну синхронізацію, коли траєкторії всіх координат x_i^k асимптотично збігаються;

2) повну десинхронізацію, коли траєкторія кожної координати є незалежною від інших;

3) часткову синхронізацію, коли елементи x_i^k розбиваються на декілька груп — кластерів — таким чином, що в межах кожної групи відбувається (повна) синхронізація.

Розглянемо систему (1) при $\varepsilon = 0$. У цьому випадку вона являє собою N незв'язаних одновимірних відображень f. Динаміка кожної координати x_i^k здійснюється відповідно до відображення f незалежно від інших координат. Припустимо, що f залежить від деякого параметра $a \in \mathbb{R}$, тобто $f = f_a$. Нехай $a = a_1$ — деяке фіксоване значення цього параметра, при якому f має асимптотично стійку нерухому точку x^*, тобто $f(x^*) = x^*$ і $|f'(x^*)| < 1$. Це означає, що для майже всіх (за мірою Лебега) точок $x^0 \in \mathbb{R}$ виконується $f^k(x^0) \to x^*$ при $k \to \infty$. Очевидно, що тоді в системі (1) (при $\varepsilon = 0$) для майже всіх траєкторій має місце повна синхронізація, тому що для будь-якої початкової точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ (з точністю до множини міри 0)

$$f^k(x_i) \underset{k\to\infty}{\to} x^*, \quad i = \overline{1, N}.$$

Оскільки відображення F є неперервно диференційовним відносно параметра ε, то існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ у системі (1) також відбувається повна синхронізація, тобто

$$\left|x_i^k - x_j^k\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \forall i, j = \overline{1, N}.$$

Отже, в площині (a, ε), а саме, в околі точки $(a_1, 0)$, існує певна область, в якій відбувається повна синхронізація.

Припустимо тепер, що відображення f має асимптотично стійкий цикл $P_n = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ періоду n, $n < N$, тобто $x_{i+1}^* = f(x_i^*)$, $i = \overline{1, n-1}$, $x_1^* = f(x_n^*)$, і його мультиплікатор $\mu = f'(x_1^*)f'(x_2^*)\ldots f'(x_n^*)$ за модулем менший за одиницю: $|\mu| < 1$.

Розглянемо n-ту ітерацію f, тобто відображення f^n. Кожна з точок $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ буде асимптотично стійкою нерухомою точкою для f^n, і тому в області визначення f можна виділити n підобластей, початкові точки з яких притягуються під дією f^n до відповідної точки циклу P_n. Таким чином, розглядаючи відображення $F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, що відповідає системі (1) з $\varepsilon = 0$, в залежності від початкових умов можна отримати кластерні стани різної конфігурації з кількістю кластерів $K \leq n$, причому динаміка таких „кластерних" розв'язків буде асимптотично n-періодичною.

Як і у випадку нерухомої точки, для $K = \overline{1, n}$ існує $\varepsilon_0(K) > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0(K)]$ в системі (1) має місце часткова синхронізація, яка є асимптотично n-періодичною. Дамо строге означення цього поняття.

Розглянемо множину наборів індексів

$$\mathcal{I} = \big\{\mathcal{I}_1 = \{1, 2, \ldots, N_1\}, \mathcal{I}_2 = \{N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, N_1 + N_2\}, \ldots$$
$$\ldots, \mathcal{I}_K = \{N_1 + \ldots + N_{K-1} + 1, \ldots, N\}\big\}, \tag{2}$$

причому хоча б один із наборів $\mathcal{I}_j$ містить більше ніж один елемент. Нехай $O(\mathbf{x}) = \{F^{k-1}(\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty = \{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^\infty$ — деяка траєкторія відображення F, для якої виконується

$$|x_i^k - x_j^k| \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad i, j \in \mathcal{I}_l, \quad \forall l = \overline{1, K}. \tag{3}$$

Тоді говорять, що для траєкторії відображення F, яке задається системою (1), з початковою умовою $\mathbf{x}$ має місце *часткова синхронізація* (*кластеризація*); кожна з груп $\{x_i\}_{i\in\mathcal{I}_l}$ називається *кластером*, а відповідна величина N_l, $l = \overline{1, K}$, — його розміром.

Очевидно, що спостерігати явище часткової синхронізації в системі (1) можна лише за умови, що множина початкових значень $\mathbf{x}^0$, для траєкторій яких справджується співвідношення (3), має ненульову міру Лебега.

Зауваження 1. Множину наборів індексів $\mathcal{I}$ можна записати в більш загальному вигляді. Справді, елементи x_i, що синхронізуються, не обов'язково повинні бути занумеровані підряд, але внаслідок інваріантності системи (1) відносно будь-якої перестановки координат фазового вектора $\mathbf{x}$ їх можна перенумерувати відповідним чином. Тому, не обмежуючи загальності, надалі вважаємо, що $\mathcal{I}$ має вигляд (2).

Із співвідношення (3) випливає, що з часом траєкторія $O(\mathbf{x})$ наближається до певного K-вимірного підпростору $M^{(K)} = \{\mathbf{x} | \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)\} \subset \mathbb{R}^N$, який задається рівняннями

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 = \ldots = x_{N_1} \stackrel{\text{df}}{=} y_1, \\ x_{N_1+1} = x_{N_1+2} = \ldots = x_{N_1+N_2} \stackrel{\text{df}}{=} y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{N_1+\ldots+N_{K-1}+1} = x_{N_1+\ldots+N_{K-1}+2} = \ldots = x_N \stackrel{\text{df}}{=} y_K. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, що $M^{(K)}$ — многовид, причому він є інваріантним відносно відображення F, тобто для будь-якого вектора $\mathbf{x} \in M^{(K)}$ його образ $F(\mathbf{x})$ також належить $M^{(K)}$. Множину $M^{(K)}$ ще називають *кластерним многовидом* системи (1). Звуження $F\big|_{M^{(K)}} \stackrel{\text{df}}{=} G$ задає K-вимірну систему різницевих рівнянь (*кластерну систему*)

$$y_i^{k+1} = (1-\varepsilon) f(y_i^k) + \varepsilon \sum_{j=1}^{K} p_j f(y_j^k), \quad i = \overline{1, K}, \tag{5}$$

де $\mathbf{y}^k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_K^k) \in \mathbb{R}^K$ — фазовий вектор, $p_i = N_i/N$, $\sum_{i=1}^K p_i = 1$, — відносний розмір i-го кластера.

Очевидно, що будь-яка траєкторія системи (5) породжує відповідну траєкторію системи (1), яка належить многовиду $M^{(K)}$. Оскільки динаміка кластерного відображення G може бути як періодичною, так і хаотичною, то в системі (1) може реалізуватись як періодична, так і хаотична часткова синхронізація.

Нехай $O(\mathbf{x}) = \left\{F^{k-1}(\mathbf{x})\right\}_{k=1}^{\infty} \subset M^{(K)}$ — деяка траєкторія відображення F, для якої має місце часткова синхронізація. Тоді серед її показників Ляпунова $\{\lambda_i^{(N)}\}$ можна виділити тангенціальні, які відповідають за динаміку всередині кластерного многовиду, та трансверсальні, які відповідають за стійкість траєкторій у напрямках зовні $M^{(K)}$ [3, 14, 17]. Можна довести, що кількість різних трансверсальних показників K_1 дорівнює кількості кластерів, які мають більше ніж один елемент: $K_1 = \operatorname{card}\left\{i = \overline{1, K} : N_i > 1\right\}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що кластери занумеровано таким чином, щоб $N_1 \geq N_2 \geq \ldots \geq N_K$. Введемо позначення $\{\lambda_{\parallel,i}\}_{i=1}^K$ та $\{\lambda_{\perp,i}\}_{i=1}^{K_1}$, $K_1 \leq K$, відповідно для тангенціальних і трансверсальних показників Ляпунова.

Означення. *Траєкторію $O(\mathbf{x}) \subset M^{(K)}$ будемо називати стійкою в трансверсальному напрямку, якщо всі її трансверсальні показники від'ємні. При цьому тангенціальні показники Ляпунова можуть набувати й додатних значень.*

Занумеруємо точки траєкторії $O(\mathbf{x})$ як $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$, $F^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_3$ і т. д., де

$$\mathbf{x}_j = (\underbrace{y_{1j}, y_{1j}, \ldots, y_{1j}}_{N_1}, \underbrace{y_{2j}, y_{2j}, \ldots, y_{2j}}_{N_2}, \ldots, \underbrace{y_{Kj}, y_{Kj}, \ldots, y_{Kj}}_{N_K}), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Тоді трансверсальні показники Ляпунова $\{\lambda_{\perp,i}\}_{i=1}^{K_1}$ можна записати в явному вигляді [3]

$$\lambda_{\perp,i} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln\left|f'(y_{ij})\right| + \ln|1-\varepsilon|, \quad i = \overline{1, K_1}. \tag{7}$$

Нехай f_a — деяке дійсне одновимірне відображення. Розглянемо інтервал $(a_-, a_+) \subset \subset \mathbb{R}$ такий, що для будь-якого $a \in (a_-, a_+)$ функція f_a має асимптотично стійкий цикл періоду n. Цей інтервал називається *вікном періоду n* функції f_a.

Очевидно, що при $\varepsilon = 0$ кластери утворюються завдяки існуванню періодичних розв'язків для одновимірного відображення, і тому області існування і стійкості кластерів з періодичною динамікою „виростають” із вікон відповідних періодів функції f при $\varepsilon = 0$.

Нехай f є логістичним відображенням $f = ax(1-x)$, $a \in \mathbb{R}$ — параметр нелінійності. Розглянемо випадок, коли кластери симетричні, тобто в (5) маємо $p_i = 1/K$, $i = \overline{1,K}$. Нехай $P_K^{(K)} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K\}$, де $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{Kj})$, $j = \overline{1,K}$, — деякий K-періодичний розв'язок відображення G, який задовольняє умову циклічності, тобто [14, 17]

$$\mathbf{y}_{j+1} = \pi_K(\mathbf{y}_j), \quad j = \overline{1, K-1}, \tag{8}$$

де π_K — циклічна перестановка на множині із K дійсних чисел: $\pi_K(s_1, s_2, \ldots, s_K) = (s_2, s_3, \ldots, s_K, s_1)$.

У подальшому знадобиться лема, яка дає достатні умови існування циклу, що задовольняє умову циклічності (8) (див. [14]).

Лема 1. *Розглянемо одновимірне відображення вигляду*

$$g : y \mapsto (1-\varepsilon)f(y) + \varepsilon h,$$

де $h \in \mathbb{R}$ — деякий числовий параметр. Нехай це відображення має цикл $P_K^{(1)} = \{y_1, y_2, \ldots, y_K\}$ періоду K такий, що

$$\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} y_j = h. \tag{9}$$

Тоді K-вимірне відображення G, що задається рівнянням (5) з $p_i = 1/K$, $i = \overline{1,K}$, має цикл $P_K^{(K)}$ періоду K, який задовольняє умову циклічності (8).

За умов леми 1 для одновимірного відображення

$$g : \; y \to (1-\varepsilon)ay(1-y) + \varepsilon h, \tag{10}$$

де h набирає вигляду (9), множина $P_K^{(1)} = \{y_1, y_2, \ldots, y_K\}$ є циклом періоду K. Знайдемо лінійну заміну

$$y = c_1 z + c_2$$

таку, щоб система (10) була еквівалентною системі

$$\tilde{g} : \; z \to bz(1-z). \tag{11}$$

Тоді якщо (10) має цикл $P_K^{(1)} = \{y_1, y_2, \ldots, y_K\}$, то (11) також має цикл $\tilde{P}_K^{(1)} = \{z_1, z_2, \ldots \ldots, z_K\}$ такий, що

$$z_{i+1} = bz_i(1 - z_i) = -bz_i^2 + bz_i, \tag{12}$$

причому

$$y_i = c_1 z_i + c_2, \quad i = \overline{1, K}. \tag{13}$$

Звідси маємо

$$h = c_1 \tilde{h} + c_2, \quad \tilde{h} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} z_i.$$

Підставляючи (13) в (10) і прирівнюючи коефіцієнти при степенях z_i в отриманому виразі та в (11), одержуємо систему рівнянь

$$\frac{(1-\varepsilon)a}{c_1}\left(c_2 - c_2^2\right) + \frac{\varepsilon h}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} = 0,$$

$$b = (1-\varepsilon)ac_1,$$

$$b = (1-\varepsilon)a(1 - 2c_2),$$

$$h = c_1\tilde{h} + c_2,$$

виключаючи з якої c_1, c_2 та h, отримуємо співвідношення між a, ε, b та $\tilde{h}$ вигляду

$$a = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon b\tilde{h} + 2b(1-\varepsilon) - b^2}{(1-\varepsilon)^2}}. \tag{14}$$

Очевидно, що співвідношення (14) задають двопараметричну сім'ю кривих у площині (a, ε), причому при $\varepsilon = 0$ повинно виконуватись $a \equiv b$. Покладаючи в (14) $\varepsilon = 0$ і вважаючи, що $b \geq 1$, маємо

$$a = 1 + \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon b\tilde{h} + 2b(1-\varepsilon) - b^2}{(1-\varepsilon)^2}}. \tag{15}$$

Скориставшись співвідношенням (15), доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай (b_-, b_+) — вікно періоду K для відображення $\tilde{g} = \tilde{g}_b$ вигляду (11). Розглянемо відображення $G_{a,\varepsilon}$, що задається рівнянням (5). Тоді всередині області параметрів (a, ε), яка обмежена кривими*

$$\begin{aligned} \gamma_- &= \left\{ a = 1 + \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon b_-\tilde{h}_- + 2b_-(1-\varepsilon) - b_-^2}{(1-\varepsilon)^2}} \right\}, \\ \gamma_+ &= \left\{ a = 1 + \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon b_+\tilde{h}_+ + 2b_+(1-\varepsilon) - b_+^2}{(1-\varepsilon)^2}} \right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

для відображення $G_{a,\varepsilon}$ існує періодична траєкторія $P_K^{(K)}$, яка задовольняє умову циклічності (8). При цьому відповідна їй траєкторія $P_K^{(N)}$ вихідного N-вимірного відображення F, що задається рівнянням (1), є стійкою в трансверсальному напрямку.

Доведення. Зафіксуємо спочатку деяке $b \in (b_-, b_+)$. Для будь-якого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ за формулою (15) можна знайти $a = a(\varepsilon, b, \tilde{h})$ (вважаємо, що для відомого b значення $\tilde{h}$ також є відомим) таке, що для пари (a, ε) одновимірне відображення g вигляду (10) має стійкий цикл $P_K = \{y_1, y_2, \ldots, y_K\}$. За означенням його показник Ляпунова

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kK} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{K} \ln|g'(y_j)| = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \ln|g'(y_j)| = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \ln|f'(y_j)| + \ln|1-\varepsilon|, \tag{17}$$

причому

$$\lambda < 0. \tag{18}$$

З іншого боку, за лемою 1 для симетричного кластерного відображення $G_{a,\varepsilon}$ існує цикл $P_K^{(K)}$, який задовольняє умову циклічності (8). Із (7) випливає, що трансверсальні показники Ляпунова відповідного N-вимірного циклу мають вигляд

$$\lambda_{\perp,i} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \ln|f'(y_j)| + \ln|1-\varepsilon|, \quad i = \overline{1,K}.$$

Враховуючи (17) та (18), маємо

$$\lambda_{\perp,i} < 0, \quad i = \overline{1,K}.$$

Отже, вибираючи $b = b_-$ та $b = b_+$, отримуємо криві $a = a(\varepsilon, b_-, \tilde{h}_-) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \gamma_-$ та $a = a(\varepsilon, b_+, \tilde{h}_+) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \gamma_+$ у площині параметрів (a, ε), які, очевидно, обмежують шукану область, що й потрібно було довести.

3. Хаотичний атрактор на кластерному многовиді. Періодичні кластери детально досліджено в [5, 13–17]. Розглянемо тепер випадок, коли система (5) має хаотичний атрактор. Поряд з показниками Ляпунова $\{\lambda_{\|,i}\}_{i=1}^K$, $\{\lambda_{\perp,i}\}_{i=1}^K$ будемо розглядати також відповідні їм числа Ляпунова

$$\mu_{\|,i} = e^{\lambda_{\|,i}}, i = \overline{1,K},$$

$$\mu_{\perp,i} = e^{\lambda_{\perp,i}}, i = \overline{1,K_1},$$

де, за визначенням (див. п. 2), K — загальна кількість кластерів, а K_1 — кількість кластерів, що мають більше ніж один елемент. У подальшому будемо вважати, що всі кластери мають більше ніж один елемент (тобто $K_1 = K$).

Теорема 2. *Тангенціальні та трансверсальні числа Ляпунова траєкторії* $O(\mathbf{x}_1) = \{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots\} \subset M^{(K)}$ *вигляду (6) пов'язані співвідношенням*

$$\prod_{i=1}^{K} \mu_{\perp,i} = (1-\varepsilon) \prod_{i=1}^{K} \mu_{\|,i}. \tag{19}$$

Для доведення теореми скористаємось такою лемою (лема 2 із [14]).

Лема 2. *Якобіан кластерного відображення* G *має вигляд*

$$\det \frac{\partial G(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = (1-\varepsilon)^{K-1} \prod_{i=1}^{K} f'(y_i), \tag{20}$$

де $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_K) \in \mathbb{R}^K$, *а* $\dfrac{\partial G(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$ *— диференціал відображення* G *у точці* $\mathbf{y}$.

Доведення теореми 2. Для кожного $i = \overline{1,K}$ розглянемо скінченне наближення показників Ляпунова траєкторії $O(\mathbf{x}_1)$:

$$\bar{\lambda}_{\|,i,k} = \frac{1}{k} \ln \left\| \frac{\partial G^k(\mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{u} \right\|,$$

$$\bar{\lambda}_{\perp,i,k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln \left| f'(y_{ij}) \right| + \ln |1-\varepsilon|,$$

де $k \in \mathbb{N}^+$ — деяке фіксоване натуральне число, $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{K1})$ — початкова точка траєкторії на кластерному многовиді, $\mathbf{u}$ — деякий K-вимірний вектор. Їм відповідають наближені значення чисел Ляпунова

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\|,i,k} &= e^{\bar{\lambda}_{\|,i,k}} = \left\| \frac{\partial G^k(\mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{u} \right\|^{1/k}, \quad i = \overline{1,K}, \\ \bar{\mu}_{\perp,i,k} &= e^{\bar{\lambda}_{\perp,i,k}} = |1-\varepsilon| \left(\prod_{j=1}^{k} \left| f'(y_{ij}) \right| \right)^{1/k}, \quad i = \overline{1,K}. \end{aligned} \tag{21}$$

Позначимо через $\{\nu_{i,k}\}_{i=1}^{K}$ власні числа матриці $\dfrac{\partial G^k(\mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}}$. Шляхом безпосередніх математичних обчислень [18, с. 131] отримаємо

$$\bar{\mu}_{\|,i,k} = e^{\bar{\lambda}_{\|,i,k}} = |\nu_{i,k}|^{1/k}, \quad i = \overline{1,K}.$$

Позначимо

$$\mathbf{y}_{j+1} = G(\mathbf{y}_j), \quad \mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{Kj}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

За теоремою Вієта добуток усіх власних значень будь-якої квадратної матриці дорівнює її визначнику, що з урахуванням (20) приводить до рівності

$$\prod_{i=1}^{K} \nu_{i,k} = \frac{\partial G^k(\mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}} = \det \frac{\partial G(\mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \det \frac{\partial G(\mathbf{y}_{k-1})}{\partial \mathbf{y}} \ldots \det \frac{\partial G(\mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}} =$$

$$= (1-\varepsilon)^{K-1} \prod_{i=1}^{K} f'(y_{ik})(1-\varepsilon)^{K-1} \prod_{i=1}^{K} f'(y_{i(k-1)}) \ldots$$

$$\ldots (1-\varepsilon)^{K-1} \prod_{i=1}^{K} f'(y_{i1}) = (1-\varepsilon)^{k(K-1)} \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{K} f'(y_{ij}).$$

Звідси маємо

$$\prod_{i=1}^{K} \bar{\mu}_{\|,i,k} = \left(\left| \prod_{i=1}^{K} \nu_{i,k} \right| \right)^{1/k} = |1-\varepsilon|^{K-1} \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{K} \left| f'(y_{ij}) \right|^{1/k}. \tag{22}$$

З іншого боку, із співвідношення (21) безпосередньо випливає

$$\prod_{i=1}^{K} \bar{\mu}_{\perp,i,k} = |1-\varepsilon|^{K} \prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{k} \left| f'(y_{ij}) \right|^{1/k}. \tag{23}$$

Порівнюючи (22) та (23), для наближених значень мультиплікаторів отримуємо рівність

$$\prod_{i=1}^{K} \bar{\mu}_{\perp,i,k} = |1-\varepsilon| \prod_{i=1}^{K} \bar{\mu}_{\|,i,k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Оскільки

$$\bar{\lambda}_{\|,i,k} \to \lambda_{\|,i}, \quad k \to \infty, \quad i = \overline{1,K},$$

$$\bar{\lambda}_{\perp,i,k} \to \lambda_{\perp,i}, \quad k \to \infty, \quad i = \overline{1,K},$$

то

$$\bar{\mu}_{\|,i,k} \to \mu_{\|,i}, \quad k \to \infty, \quad i = \overline{1,K},$$

$$\bar{\mu}_{\perp,i,k} \to \mu_{\perp,i}, \quad k \to \infty, \quad i = \overline{1,K}.$$

Переходячи у виразі (24) до границі при $k \to \infty$, маємо

$$\prod_{i=1}^{K} \mu_{\perp,i} = (1-\varepsilon) \prod_{i=1}^{K} \mu_{\|,i}.$$

Теорему 2 доведено.

Завдяки формулі (19) було знайдено необхідні умови трансверсальної стійкості для кластерної траєкторії $O(\mathbf{x}_1) \subset M^{(K)}$ з $N_i > 1, i = \overline{1, K}$.

Теорема 3. *Розглянемо деяку траєкторію $O(\mathbf{x}_1) \subset M^{(K)}$ вигляду (6) для відображення G такого, що $P_i > 1/N$, $i = \overline{1, K}$. Нехай $O(\mathbf{x}_1)$ є трансверсально стійкою, тобто*

$$|\mu_{\perp,i}| < 1, \quad i = \overline{1, K}.$$

Тоді

$$|\sigma(1 - \varepsilon)| < 1,$$

де

$$\sigma = \prod_{i=1}^{K} \mu_{\parallel,i}. \tag{25}$$

Зауважимо, що число σ називається *узагальненим сідловим числом.*

Доведення. З викладеного вище випливають співвідношення

$$|\sigma||1 - \varepsilon| = \left|(1 - \varepsilon)\prod_{i=1}^{K} \mu_{\parallel,i}\right| = \left|\prod_{i=1}^{K} \mu_{\perp,i}\right| \leq \prod_{i=1}^{K} \max|\mu_{\perp,i}| < 1.$$

Теорему 3 доведено.

4. Структура кластерних зон. Із викладеного у двох попередніх пунктах можна зробити висновок, що турбулентна фаза має „вкладену” структуру, подібну до структури хаотичної області одновимірного відображення f. Іншими словами, спочатку народжується періодичний атрактор $P_n^{(K)}$ на многовиді $M^{(K)}$ розмірності $K < N$. Зауважимо, що тут має місце мультистабільність, коли в N-вимірному просторі вихідної системи (1) співіснує декілька атракторів, кожний зі своїм „басейном” притягання. При цьому чим більше N, тим більше для кожного K існує потенційних кластерних многовидів вигляду (4), а отже, тим більше є можливостей утворення кластерів.

При зміні параметра a для циклу $P_n^{(K)}$ відбувається каскад біфуркацій подвоєння періоду в тангенціальному напрямку, тобто трансверсальні мультиплікатори $P_n^{(K)}$ весь час залишаються всередині одиничного кола. В результаті цього в певний момент атрактор на кластерному многовиді $M^{(K)}$ стає хаотичним. Якщо умови теореми 3 виконуються, то цілком можливо, що існує деяка область параметрів (a, ε), в якій хаотичний K-вимірний атрактор є трансверсально стійким, і, таким чином, у системі (1) відбувається *хаотична* часткова синхронізація. Області параметрів, для яких часткова синхронізація елементів системи є характерною, тобто коли майже всі траєкторії притягуються до одного із кластерних многовидів $M^{(K)}$, $K < N$, називаються *кластерними зонами*. Очевидно, що такі зони породжуються із вікон періодичності одновимірного відображення f при $\varepsilon = 0$.

Проте на відміну від одновимірного випадку, через високу складність вихідної системи (1) та при наявності мультистабільності, кожний з атракторів на K-вимірних кластерних многовидах притягує лише частину траєкторій відображення F.

В результаті проведеного обчислювального експерименту [16, 17] виявлено, що для значень параметра зв'язку ε, які не є дуже близькими до нуля ($\varepsilon > 0,02$), можна спостерігати кластерні розв'язки спеціального вигляду, а саме: кожний такий розв'язок має один або декілька великих кластерів, які акумулюють майже половину всіх осциляторів, а інші елементи не синхронізуються взагалі (тобто типові кластери мають вигляд $(N_1, 1, 1, \dots, 1)$ або $(N_1, N_2, 1, 1, \dots, 1)$). Розв'язки такого типу отримали назву *квазікластерів* [16].

Механізм утворення таких розв'язків є досить очевидним. Розглянемо найпростіший випадок. Припустимо, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для відображення G при $K = 2$ існує хаотичний атрактор $A^{(2)}$, який є трансверсально стійким у просторі деякої розмірності N. Нехай $\varepsilon = \varepsilon_0$ — точка біфуркації, коли $\max\{|\mu_{\perp,1}|, |\mu_{\perp,2}|\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} |\mu_\perp| = 1$ (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\mu_\perp = \mu_{\perp,2}$). Це означає, що відповідний кластер розпадається і множина $A^{(2)} \subset M^{(2)}$ вже не є атрактором в N-вимірному просторі. Оскільки динаміка розв'язку хаотична, то малі відхилення від кластерного многовиду $M^{(2)}$ у трансверсальному напрямку призводять до того, що кластер розпадається на окремі одиничні елементи, тобто одночасно в усіх місцях (на відміну від випадку періодичної динаміки на кластерному многовиді [5]). Таким чином, отримаємо розв'язок типу квазікластер на многовиді $M^{(N_2+1)} = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_{N_1}, x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots, x_N\}$, який має лише одне трансверсальне число Ляпунова $\mu_{\perp,1} < 1$.

5. Висновки. У даній статті розглянуто кластерні розв'язки системи глобально зв'язаних одновимірних відображень (1). У площині параметрів (a, ε) знайдено аналітичний вигляд кривих, що обмежують область стійкості в трансверсальному напрямку, для симетричної K-кластерної K-періодичної траєкторії $P_K^{(N)} \subset M^{(K)}$. Також виведено необхідні умови трансверсальної стійкості K-кластерної хаотичної траєкторії для випадку, коли всі кластери мають більше ніж один елемент.

Досліджено структуру кластерних зон (тобто областей, для яких характерне явище часткової синхронізації), що які породжуються із вікон періодичності одновимірного базисного відображення. Встановлено, що коли хаотичний атрактор на кластерному многовиді втрачає стійкість в одному із трансверсальних напрямків, відповідний кластер розщеплюється на окремі елементи, і, як наслідок, виникає атрактор спеціального виду (квазікластер), частину елементів якого об'єднано в один або декілька провідних кластерів, а інша частина не синхронізується взагалі.

Таким чином, серед можливих атракторів, що виникають у кластерних зонах, можна умовно виділити три великі групи: періодичні кластерні траєкторії, хаотичні кластерні траєкторії та хаотичні траєкторії типу квазікластер, причому атрактори цих трьох видів народжуються послідовно один з одного: хаотичний кластер — із періодичного після повного каскаду біфуркацій подвоєння періоду, а квазікластер — із хаотичного кластера в результаті біфуркації розщеплення кластера.

1. *Kaneko K.* Chaotic but regular posi-nega switch among coded attractors by cluster-size variation // Phys. Rev. Lett. — 1983. — **63**. — P. 219–223.

2. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements // Physica D. — 1990. — **41**. — P. 137 – 172.
3. *Popovych O., Maistrenko Yu., and Mosekilde E.* Loss of coherence in a system of globally coupled maps // Phys. Rev. E. — 2001. — **64**. — P. 1 – 11.
4. *Popovych O., Maistrenko Yu., and Mosekilde E.* Role of asymmetric clusters in desynchronization of coherent motion // Phys. Lett. A. — 2002. — **302**. — P. 171 – 181.
5. *Popovych O., Pikovsky A., and Maistrenko Yu.* Cluster-splitting bifurcation in a system of globally coupled maps // Physica D. — 2002. — **168 –1 69**. — P. 106 – 125.
6. *Mosekilde E., Maistrenko Y., and Postnov D.* Chaotic synchronization: application to living systems. — Singapore: World Sci., 2002. — 440 p.
7. *Kaneko K.* Dominance of Milnor attractors in globally coupled dynamical systems with more than 7 ± 2 degrees of freedom // Phys. Rev. E. — 2002. — **66**. — P. 1 – 4.
8. *Timme M., Wolf F., and Geisel T.* Prevalence of unstable attractors in networks of pulse-coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. — 2002. — **89**. — P. 1 – 4.
9. *Maistrenko Yu., Popovych O., and Hasler M.* On strong and weak chaotic partial synchronization // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — **10**. — P. 179 – 203.
10. *Pikovsky A., Popovych O., and Maistrenko Yu.* Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators // Phys. Rev. Lett. — 2001. — **87**. — P. 1 – 4.
11. *Manrubia S. C., Mikhailov A. S.* Mutual synchronization and clustering in randomly coupled chaotic dynamical networks // Phys. Rev. E. — 1999. — **60**. — P. 1579 – 1589.
12. *Xie F., Hu G.* Clustering dynamics in globally coupled map lattices // Ibid. — 1997. — **56**. — P. 1567 – 1570.
13. *Shimada T., Kikuchi K.* Periodicity manifestations in the turbulent regime of the globally coupled map lattice // Ibid. — 2000. — **62**. — P. 3489 – 3502.
14. *Panchuk A., Maistrenko Yu.* Stability of periodic clusters in globally coupled maps // Nonlinear Oscillations. — 2002. — **5**, № 3. — P. 334 – 345.
15. *Glendinning P.* Stability of asymmetric cluster states in globally coupled maps // Proc. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics Electronic Systems (NDES'2003) (Scoul, Switzerland, May 18 – 23, 2003). — 2003. — P. 89 – 92.
16. *Panchuk A., Maistrenko Yu., and Hasler M.* Clustering in the turbulent phase // Ibid. — P. 193 – 196.
17. *Maistrenko Yu., Panchuk A.* Clustering zones in the turbulent phase of a system of globally coupled chaotic maps // Chaos. — 2003. — **13**. — P. 990 – 998.
18. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. — 397 p.

Одержано 30.01.2004