УДК 517.925

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

О. В. Матвій , І. М. Черевко

Чернівец. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: omatviy@chnu.cv.ua
cherevko@chnu.cv.ua

We study approximating a delay-differential system with a system of ordinary differential equations. A qualitative analysis of solutions of the initial and the approximate systems is carried out. We also construct an algorithm for studying stability of solutions of systems with delay.

Досліджено наближену заміну диференціальних рівнянь із запізненням системою звичайних диференціальних рівнянь. Проаналізовано якісну поведінку розв'язків вихідної та апроксимуючої систем, побудовано алгоритм дослідження стійкості розв'язків систем із запізненням.

Вступ. Для наближеного розв'язування задач оптимального керування в системах із запізненням ефективним виявився метод заміни рівнянь із запізненням послідовністю звичайних диференціальних рівнянь [1 – 3]. Для побудови різних схем апроксимації в [4] використано апроксимацію Паде для функції e^x, а в працях [5, 6] застосовано апроксимацію інфінітезимального оператора півгрупи лінійних операторів. Такий підхід дозволяє звести дослідження системи із запізненням до вивчення звичайних динамічних систем. Точність наближення на скінченному інтервалі досліджувалась у працях [1, 2, 4, 7, 8] в різних функціональних просторах за рахунок збільшення розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою схем апроксимації систем із запізненням було побудовано [9, 10] алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів.

У даній роботі досліджуються властивості асимптотичної стійкості (нестійкості) нульового розв'язку рівнянь із запізненням на основі аналізу властивостей нульового розв'язку апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальне рівняння із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

де $t \in R, x \in R^n$, функція $f(t,u,v)$ — неперервна по t, задовольняє умову Ліпшиця по u, v і, крім того,

$$f(t,0,0) = 0.$$

Замінивши елемент запізнення послідовністю із m аперіодичних ланок [1, 2], рівнянню

(1) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dz_0}{dt} = f(t, z_0, z_m),$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{i-1} - z_i), \quad i = \overline{1,m}, \ m \in N. \tag{2}$$

Точність апроксимації початкової задачі для рівняння (1) задачею Коші для системи (2) на скінченному інтервалі $[0, T]$ досліджувалась у працях [1, 2, 7, 8]. У випадку, коли нульовий розв'язок рівняння (1) асимптотично стійкий, можна розглядати близкість і на нескінченному інтервалі $[0, \infty)$. Має місце таке твердження [1].

Теорема 1. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) рівномірно асимптотично стійкий, то для достатньо великих m нульовий розв'язок системи (2) рівномірно асимптотично стійкий. Якщо нульовий розв'язок системи (2) рівномірно асимптотично стійкий, то нульовий розв'язок рівняння (1) рівномірно асимптотично стійкий при достатньо великому m.*

Із теореми 1 випливає існування такого числа $m_0 > 0$, що при $m \geq m_0$ асимптотична стійкість нульового розв'язку рівняння із запізненням (1) і системи звичайних диференціальних рівнянь (2) є еквівалентною. Однак на практиці теорему 1 складно застосувати, оскільки в кожному конкретному випадку потрібно проводити дослідження для оцінки числа m_0.

Конструктивні алгоритми застосування теореми 1 можна одержати для випадку лінійних стаціонарних систем із запізненням.

2. Апроксимація неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t - \tau_i), \tag{3}$$

де $x \in R^n$, $A_i, i = \overline{0,k}$, — сталі матриці розмірності $n \times n$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \tau$.

Квазіполіном для рівняння (3) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \det\left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda \tau_i}\right). \tag{4}$$

Рівнянню (3) поставимо у відповідність за схемою [1, 2] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i z_{l_i}(t), \ l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau}\right],$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \mu(z_{i-1} - z_i), \ i = \overline{1,m}, \ \mu = \frac{m}{\tau}. \tag{5}$$

Характеристичний многочлен системи (5) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda E - A_0 & 0 & \dots & -A_1 & \dots & -A_k \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Елементи визначника (6) — матриці розмірності $n \times n$. У першому рядку визначника ненульові блоки знаходяться на позиціях $l_i, i = \overline{0,k}$.

Для спрощення визначника (6) розіб'ємо його матрицю на чотири блоки:

$$A = (\lambda E - A_0), B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_1 & \dots & -A_k \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\mu E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, D_m = \begin{pmatrix} (\mu+\lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E \end{pmatrix}.$$

Тут A, D_m — квадратні матриці і, крім того, визначник $\det(D_m) \neq 0$ для фіксованого λ, за можливим винятком одного значення m.

Використовуючи властивості блочних матриць [11], запишемо (6) у вигляді

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_m \end{pmatrix} = \det(A - BD_m^{-1}C)\det(D_m), \qquad (7)$$

де D_m^{-1} — обернена матриця до матриці D_m. Матрицю D_m^{-1} подамо у такому вигляді:

$$D_m^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}.$$

Обчислюючи добуток матриць $(BD_m^{-1}C)$, дістаємо

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_1 & \dots & -A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \sum_{i=1}^{k} A_i d_{l_i 1}. \qquad (8)$$

Врахувавши рівність (8), перепишемо характеристичний многочлен (7) у вигляді

$$\Psi_m(\lambda) = \det\left(A - \mu\sum_{i=1}^{k} A_i d_{l_i 1}\right)\det(D_m). \tag{9}$$

Знайдемо вирази для блоків $d_{l_i 1}, i = \overline{1,k}$, матриці D_m^{-1}. Обчислюючи добуток $D_m D_m^{-1}$, отримуємо

$$\begin{pmatrix} (\mu+\lambda)d_{11} & \dots & (\mu+\lambda)d_{1m} \\ -\mu d_{11} + (\mu+\lambda)d_{21} & \dots & -\mu d_{1m} + (\mu+\lambda)d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mu d_{m-1,1} + (\mu+\lambda)d_{m1} & \dots & -\mu d_{m-1,m} + (\mu+\lambda)d_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо рівності

$$d_{11} = \frac{1}{\mu+\lambda}E,\ d_{21} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}d_{11} = \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}E,\ \dots,\ d_{m1} = \frac{\mu^{m-1}}{(\mu+\lambda)^m}E.$$

Підсумуємо наведені вище міркування у вигляді такого твердження.

Лема 1. *Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (5) має місце співвідношення*

$$\Psi_m(\lambda) = \det\left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{l_i}\right)(\mu+\lambda)^{mn}. \tag{10}$$

Дослідимо зв'язок між квазіполіномом (4) і характеристичним многочленом (6).

Лема 2. *Для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}}, m \in N, \tag{11}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (4).

Доведення. Розглянемо фіксоване $\lambda \in Z$. Тоді $\lambda \neq -\dfrac{m}{\tau}$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функцію $H_m(\lambda)$ визначено для всіх $m \in N$ за можливим винятком одного $m \in N$.

Враховуючи позначення $\mu = \dfrac{m}{\tau}$ і рівність (10), маємо

$$H_m(\lambda) = \det\left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{l_i}\right). \tag{12}$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{\frac{\tau_i m}{\tau}} = e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{l_i}\right) = \left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda\tau_i}\right).$$

Отже, переходячи в рівності (12) до границі при $m \to \infty$ для фіксованого $\lambda \in Z$ одержуємо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = \det\left(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda\tau_i}\right). \tag{13}$$

Лему 2 доведено.

Зауваження. Функція $H_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (12), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (4). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (4). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (11), збігаються, то корені характеристичного многочлена (6) можна використовувати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (4).

3. Збереження стійкості при переході до апроксимуючої системи. Розглянемо методику оцінки можливого порядку апроксимуючої системи (5) для лінійного рівняння із запізненням (3).

Теорема 2. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (3) експоненціально стійкий (нестійкий), то існує $m_0 > 0$ таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (5) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (5) експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (3) експоненціально стійкий (нестійкий).

Доведення. Подамо квазіполіном (4) у вигляді

$$\Phi(\lambda) = \lambda^n + p_1(\lambda)\lambda^{n-1} + \ldots + p_n(\lambda),$$

де коефіцієнти $p_i(\lambda)$ — функції вигляду

$$p_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} e^{-\alpha_j\lambda},\ \ \alpha_j = \sum_{l=0}^{k} \tau_i r_{ij},$$

r_{ij} — цілі невід'ємні числа, β_{ij} — сталі числа, які є многочленами елементів матриць A_i, $i = \overline{0,k}$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, то $|e^{-\alpha_j\lambda}| \leq 1$ і коефіцієнти $p_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, є обмеженими. Позначимо

$$K_0 = \max_{i=\overline{1,n}} |p_i| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \qquad d_0 = \max[1, (n+1)K_0]. \tag{14}$$

Нехай $\operatorname{Re}\lambda \geq d_0$, тоді $|\lambda| \geq 1$ і виконується нерівність

$$|\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n| \geq |\lambda|^n \left(1 - \frac{|p_1|}{|\lambda|} - \ldots - \frac{|p_n|}{|\lambda|^n}\right) \geq d_0^n \left[1 - \frac{nK_0}{(n+1)K_0}\right] > 0.$$

Отже, квазіполіном (4) не має нулів в області $\operatorname{Re}\lambda \geq d_0$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda \geq -\delta$, $\delta > 0$, то $|e^{-\alpha_j\lambda}| \leq e^{\alpha_j\delta}$ і коефіцієнти $p_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, також є обмеженими. Позначимо

$$K_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |p_i| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda \geq -\delta, \qquad d_1 = \max[1, (n+1)K_1]. \tag{15}$$

Тоді при $\operatorname{Re}\lambda \geq -\delta$, $|\operatorname{Im} < \lambda| \geq d_1$ дістаємо нерівність

$$|\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n| \geq |\lambda|^n \left(1 - \frac{|p_1|}{|\lambda|} - \ldots - \frac{|p_n|}{|\lambda|^n}\right) \geq d_1^n \left[1 - \frac{nK_1}{(n+1)K_1}\right] > 0.$$

Отже, квазіполіном (4) не має нулів в області $\operatorname{Re}\lambda \geq -\delta$, $|\operatorname{Im}\lambda| \geq d_1$.

Розглянемо тепер область S, що визначається співвідношеннями

$$-\delta \leq \operatorname{Re}\lambda \leq d_0, \ \ |\operatorname{Im}\lambda| \leq d_1. \tag{16}$$

Нехай усі нулі квазіполінома $\Phi(\lambda)$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\delta$. Тоді в області S і на її границі ∂S квазіполіном $\Phi(\lambda)$ не має нулів. Позначимо

$$v = \min_{\lambda\in\partial S} |\Phi(\lambda)| > 0.$$

Розглянемо рівність

$$\Phi(\lambda) = H_m(\lambda) + R_m(\lambda),$$

де $R_m(\lambda) = \Phi(\lambda) - H_m(\lambda)$. Із співвідношення (13) випливає існування такого $m_0 > 0$, що при $m \geq m_0$

$$\max_{\lambda\in\partial S} |R_m(\lambda)| < v. \tag{17}$$

Отже, при $m \geq m_0$ на границі області S маємо

$$|\Phi(\lambda)| > |R_m(\lambda)|.$$

Тоді, згідно з теоремою Руше [12], в області S функція $H_m(\lambda)$, а отже і характеристичний многочлен $\Psi_m(\lambda)$, не має нулів. Це означає, що всі нулі характеристичного многочлена лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\delta$. Отже, із експоненціальної стійкості нульового розв'язку рівняння із запізненням (3) випливає експоненціальна стійкість нульового розв'язку апроксимуючої системи (5) при $m \geq m_0$.

Нехай тепер квазіполіном $\Phi(\lambda)$ має хоча б один нуль λ_0 із додатною дійсною частиною $\operatorname{Re}\lambda_0 = \eta > 0$. Розглянемо коло Γ з центром у точці λ_0 і таким радіусом r_0, що на цьому колі квазіполіном $\Phi(\lambda)$ не має нулів. Виберемо тепер $m_0 > 0$ так, щоб при $m \geq m_0$ виконувалась нерівність

$$\min_{\lambda\in\Gamma}|\Phi(\lambda)| > \max_{\lambda\in\Gamma}|R_m(\lambda)|. \tag{18}$$

Тоді, згідно з теоремою Руше, всередині кола Γ кількість нулів характеристичного многочлена $\Psi_m(\lambda)$ збігається з кількість нулів квазіполінома $\Phi(\lambda)$. Отже, $\Psi_m(\lambda)$ має принаймні один нуль з додатною дійсною частиною. Значить, із нестійкості нульового розв'язку рівняння із запізненням (3) випливає нестійкість нульового розв'язку апроксимуючої системи (5).

Аналогічно доводиться друга частина теореми.

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Із теореми 2 випливає, що число $m_0 > 0$ таке, що при $m \geq m_0$ асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку рівняння із запізненням (3) еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (5), знаходиться із нерівності (18).

Зазначимо, що точне знаходження екстремальних значень виразів у нерівності (18) часто є складною задачею. Тому достатньо обмежитись знаходженням нижньої і верхньої оцінок для $\Phi(\lambda)$ і $R_m(\lambda)$ відповідно. Крім того, специфіка області S дозволяє замінити задачі оптимізації більш простими на окремих відрізках границі ∂S прямокутної області S.

Наведемо процедуру побудови наближеної еквівалентної системи для рівняння із запізненням та дослідження за її допомогою стійкості цього рівняння.

Приклад. Розглянемо рівняння із запізненням

$$\frac{dx}{dt} + 0,125x(t-1) = 0 \tag{19}$$

і його квазіполіном

$$\Phi(\lambda) = \lambda + 0,125e^{-\lambda}. \tag{20}$$

Методом D розбиття [13] нескладно показати, що всі нулі квазіполінома (20) лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Це означає, що нульовий розв'язок рівняння із запізненням (19) є експоненціально стійким. Переконаємось у цьому, досліджуючи еквівалентну йому наближену систему звичайних диференціальних рівнянь.

У даному випадку $p_1 = 0,125e^{-\lambda}$, тому на основі співвідношень (14), (15) маємо

$$K_0 = 0,125, \quad K_1 = 0,125e^{\delta}, \quad d_0 = d_1 = 1,$$

де δ — мала додатна стала.

Розглянемо тепер область S, що визначається співвідношеннями

$$-\delta \leq \operatorname{Re}\lambda \leq 1, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leq d_1.$$

Здійснивши обхід відрізків границі ∂S області S, одержимо оцінку

$$\min_{\lambda\in\partial S}|\Phi(\lambda)| \geq \frac{1}{16}.$$

Тепер величину m_0 знаходимо із нерівності

$$\max_{\lambda\in\partial S}|R_m(\lambda)| < \frac{1}{16}, \tag{21}$$

де $R_m(\lambda) = 0,125\left(e^{-\lambda} - \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{-m}\right)$.

Легко переконатися, що умова (21) виконується при $m_0 = 2$. Отже, згідно з теоремою 2 стійкість нульового розв'язку рівняння із запізненням (19) еквівалентна стійкості нульового розв'язку апроксимуючої системи

$$\begin{aligned} &y_0' + 0,125y_2 = 0,\\ &y_1' + 2(y_1 - y_0) = 0,\\ &y_2' + 2(y_2 - y_1) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Нулі характеристичного многочлена $\Psi(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 0,5$ системи (22), згідно з критерієм Рауса – Гурвіца [11], мають від'ємні дійсні частини. Отже, тривіальні розв'язки системи (22) та рівняння із запізненням (19) експоненціально стійкими.

1. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регулятора в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. — 1964. — **28**, № 4. — С. 716 – 725.
2. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Там же. — 1965. — **29**, № 2. — С. 226 – 245.
3. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
4. *Оболенский А. Ю., Чернецкая Л. Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электрон. моделирование. — 1993. — **15**, № 4. — С. 8 – 13.
5. *Banks H. T., Burns I. A.* An abstract framework for approximate solutions to optimal control problems governed by hereditary systems // Proc. Int. Conf. Different. Equat. — New York: Acad. Press, 1975. — P. 10 – 25.
6. *Banks H. T., Burns I. A.* Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximation // SIAM J. Control Optim. — 1978. — **16**, № 2. — P. 169 – 208.
7. *Піддубна Л. А., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 42 – 50.
8. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика.— 2002. — Вип. 150. — С. 50 – 54.

9. *Черевко І. М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. — С. 74 – 84.
10. *Піддубна Л. А., Черевко І. М., Берник В. О.* Алгоритм знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів // Дослідження математичних моделей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. — С. 35 – 38.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
12. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Просвещение, 1977. — 320 с.
13. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

Одержано 09.02.2004