УДК 517.911

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н. В. Плотникова

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

We find uniqueness conditions for R-solutions of linear differential inclusions with impulsive effects at fixed moments. We also prove a theorem on stability of solutions and R-solutions for homogeneous inclusions.

Для лінійних диференціальних включень з імпульсами у фіксовані моменти часу встановлено умови єдиності R-розв'язків. Доведено теореми про стійкість розв'язків і R-розв'язків для однорідних включень.

При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями часто длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения имеют „мгновенный" характер. При этом многие задачи также содержат различные факторы неоднозначности, неопределенности или неполноту информации. Это приводит к необходимости исследовать математические модели, представляющие собой дифференциальные включения с импульсами. В настоящей работе с помощью аппарата многозначного анализа рассмотрен вопрос единственности R-решений линейных импульсных дифференциальных включений. Кроме того, с использованием различных понятий решения дифференциальных включений и их устойчивости доказаны теоремы, показывающие характерные особенности, вызванные многозначностью правой части.

Рассмотрим импульсные линейные дифференциальные включения

$$\dot{x} \in \mathcal{A}(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \mathcal{B}_i x + P_i, \tag{2}$$

где $\mathcal{A}(t)$ — компактное множество $(n \times n)$-измеримых на $I = [t_0, T]$ матриц, $F(t)$ — измеримое многозначное отображение $F : I \to \operatorname{comp}(R^n)$, $\mathcal{B}_i$ — компактные множества матриц размерности $n \times n$, $\tau_i \in I$, $i = 1, 2, \ldots,$ — фиксированные моменты времени, занумерованные в возрастающем порядке $(\tau_i < \tau_{i+1})$, $P_i \in \operatorname{comp}(R^n)$, $\operatorname{comp}(R^n)$ — множество непустых компактных подмножеств R^n. Предположим, что матрицы $(E + B_i)$ не вырождены для всех $B_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2, \ldots$

Определение 1. *Функция $x(t) : R \to R^n$ называется решением включения (1), (2), если она абсолютно непрерывна, почти всюду удовлетворяет (1) на промежутках, не содержащих τ_i, и имеет разрывы первого рода в точках $t = \tau_i$ со скачками:*

$$x(\tau_i + 0) = x(\tau_i) + \Delta x(\tau_i).$$

Определение 2. *Многозначная функция $R(\cdot)$ называется R-решением, порожденным импульсным дифференциальным включением (1), (2), если $R(t)$ абсолютно непрерывна и компактнозначна на промежутках, не содержащих τ_i, для почти всех $t \neq \tau_i$*

$$\frac{1}{\Delta} h(R(t+\Delta), \bigcup_{x \in R(t)} (x + \int\limits_t^{t+\Delta} (\mathcal{A}(s)x + F(s))ds)) \to 0, \;\; \Delta \to 0_+,$$

а при $t = \tau_i$ функция $R(t)$ удовлетворяет условию скачка

$$R(\tau_i + 0) = \bigcup_{x \in R(\tau_i)} \{x + \mathcal{B}_i x + P_i\}.$$

Здесь $h(A, B)$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B, интеграл от многозначной функции понимается в смысле Аумана [1].

Пусть $A(t) \in \mathcal{A}(t), B_i \in \mathcal{B}_i$ и $\Phi_{AB_i}(t, t_0)$ — матрицант системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x.$$

Аналогично [2] произвольное решение включения (1), (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при $t \geq t_0$ определяется формулой

$$x(t, x_0) = \Phi_{AB_i}(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi_{AB_i}(t, \tau_i) p_i,$$

где $f(t)$ — измеримая ветвь отображения $F(t),\ p_i \in P_i$. Поскольку правая часть липшицева по x, то с учетом теоремы 3 [3, с. 146] R-решение $X(t, x_0)$ совпадает со всем пучком решений. Следовательно, R-решение $X(t, x_0)$ определяется формулой

$$X(t, x_0) = \bigcup_{\substack{A(t) \in \mathcal{A}(t) \\ B_i \in \mathcal{B}_i}} \left\{ \Phi_{AB_i}(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t, \tau) F(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi_{AB_i}(t, \tau_i) P_i \right\}.$$

Пусть промежуток $[t_0, T]$ содержит конечное число точек τ_i. Тогда согласно теореме 6.1 [2] для любого $x_0 \in R^n$ решения $x(t, x_0),\ x(t_0, x_0) = x_0$ включения (1), (2) существуют при всех $t \in [t_0, T]$. Следовательно, для любого $x_0 \in R^n$ существует R-решение $X(t, x_0),\ X(t_0, x_0) = x_0$.

Заметим, что при этом R-решение может быть не единственным, т. е. R-решения, начинающиеся из различных точек, в некоторый момент времени могут совпасть.

Пример 1. Рассмотрим импульсное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in [0, 1], \;\; t \neq 1,$$

$$\Delta x|_{t=1} = \{-2, 0\}x, \;\; x(0) = x_0.$$

Тогда $X(1, x_0) = [x_0, x_0 + 1]$, а после импульса

$$X(1 + 0, x_0) = [x_0, x_0 + 1] \bigcup [-1 - x_0, -x_0].$$

Следовательно, $X(1 + 0, 0) = X(1 + 0, -1) = [-1, 1]$.

Рассмотрим вопрос единственности R-решения для неоднородных импульсных линейных дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in A(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{3}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in B_i x + P_i, \tag{4}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-измеримая на промежутке $I = [t_0, T]$ матрица, B_i — постоянные матрицы.

Теорема 1. *Пусть промежуток $[t_0, T]$ содержит конечное число точек τ_i. Если для всех i таких, что $\tau_i \in [t_0, T]$, матрицы $E + B_i$ не вырождены, то $X(t, x_0) \neq X(t, y_0)$ при всех $t \in [t_0, T]$, лишь только $x_0 \neq y_0$, где $X(t, x_0)$– R-решение включения (3), (4).*

Доказательство. Пусть $t_0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_k \leq T$. Заметим, что если $X(\tau_i + 0, x_0) \in \operatorname{comp}(R^n)$, то $X(t, x_0) \in \operatorname{comp}(R^n)$ для всех $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$, так как

$$X(t, x_0) = \Phi_{AB_i}(t, \tau_i + 0)X(\tau_i + 0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{\tau_i + 0} \Phi_{AB_i}(t, \tau)F(\tau)\, d\tau, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}, \tag{5}$$

где второе слагаемое является выпуклым компактом в силу теоремы Ляпунова [1]. Тогда $X(\tau_{i+1} + 0, x_0) \in \operatorname{comp}(R^n)$. Следовательно, $X(t, x_0) \in \operatorname{comp}(R^n)$ при $t \geq t_0$.

Пусть $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A. Покажем, что из равенства $\operatorname{co} X(\tau_i + 0, x_0) = \operatorname{co} X(\tau_i + 0, y_0)$ следует $\operatorname{co} X(\tau_i, x_0) = \operatorname{co} X(\tau_i, y_0)$. Действительно, согласно свойству опорных функций [1] из

$$c(X(\tau_i + 0, x_0), \psi) = c(X(\tau_i + 0, y_0), \psi)$$

имеем

$$c((E + B_i)X(\tau_i, x_0) + P_i, \psi) = c((E + B_i)X(\tau_i, y_0) + P_i, \psi),$$

$$c((E + B_i)X(\tau_i, x_0), \psi) = c((E + B_i)X(\tau_i, y_0), \psi),$$

$$c(X(\tau_i, x_0), (E + B_i)^T\psi) = c(X(\tau_i, y_0), (E + B_i)^T\psi).$$

Поскольку матрицы $(E + B_i)$ не вырождены, то множество векторов $\{(E + B_i)^T\psi, \psi \in R^n\}$ совпадает с R^n и, следовательно, $\operatorname{co} X(\tau_i, x_0) = \operatorname{co} X(\tau_i, y_0)$.

Аналогично, используя (5), можно показать, что $\operatorname{co} X(t, x_0) \neq \operatorname{co} X(t, y_0)$ для всех $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$, если $\operatorname{co} X(\tau_i + 0, x_0) \neq \operatorname{co} X(\tau_i + 0, y_0)$. Таким образом, как только

$X(t,x_0) = X(t,y_0)$ при некотором $t \in [t_0,T]$, получаем $\operatorname{co} X(t_0,x_0) = \operatorname{co} X(t_0,y_0)$, т. е. $x_0 = y_0$.

Замечание 1. Если начальное условие имеет вид $X(t_0) = X_0$, то можно доказать лишь, что из равенства $X(t,X_0) = X(t,Y_0)$ при некотором $t \in [t_0,T]$ следует равенство $\operatorname{co} X_0 = \operatorname{co} Y_0$, т. е. единственность нарушается.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} = 0, t \neq 1, \Delta x|_{t=1} \in S_1, \text{ где } S_1 = \{x \in R^n : ||x|| = 1\}.$$

Тогда $X(1+0,S_1) \equiv X(1+0,B_1(0))$, так как $S_1 + S_1 = B_1(0) + S_1 = B_2(0)$, где $B_r(0)-$ шар радиуса r с центром в $\{0\}$.

Замечание 2. Отдельные решения $x(t,x_0)$ и $x(t,y_0)$ при $x_0 \neq y_0$ могут совпадать при $t \geq t_1$, где $t_1 \in [t_0,T]$.

Замечание 3. Если в (4) $P_i \in \operatorname{conv}(R_n)$, то $X(t,x_0) \in \operatorname{conv} R^n$. Следует отметить, что в данном случае множество R-решений импульсного дифференциального включения (3), (4) не является линейным n-мерным пространством в силу того, что пространство $\operatorname{conv}(R^n)$ линейным не является.

Интерес представляет частный случай. Пусть $x_0 \in X_0 \in \operatorname{conv}(R^n)$. Предположим, что множество X_0 имеет конечное число m угловых точек, т. е. является многогранником. Тогда любую точку $x_0 \in X_0$ можно записать в виде выпуклой комбинации угловых точек $x_i,\ \ i = 1,\ldots,m$.

Следовательно, любой пучок решений $X(t,x_0)$ можно представить в виде выпуклой комбинации „базисных пучков” $X(t,x_i)$, т. е.

$$X(t,x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X(t,x_i),\ \ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

где $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = x_0$.

Исследуем вопрос устойчивости решений линейных однородных включений с импульсными воздействиями вида

$$\dot{x} \in \mathcal{A}(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} \in \mathcal{B}_i x, \tag{6}$$

где $\mathcal{A}(t)$ — компактное множество $(n \times n)$-измеримых на $[t_0,+\infty)$ матриц, $\mathcal{B}_i$ — компактные множества матриц размерности $n \times n$, моменты $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$.

Теорема 2. *Для импульсного линейного однородного дифференциального включения (6) справедливы следующие утверждения:*

а) для асимптотической устойчивости [1] решения $x(t,t_0)$ необходимо и достаточно, чтобы матриcанты $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ удовлетворяли условию

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_{AB_i}(t,t_0) = 0; \tag{7}$$

б) для устойчивости [1] нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы матриканты $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ были равномерно ограничены;

в) для слабой устойчивости [1] ненулевого решения $x(t,x_0)$ достаточно, чтобы решение было ограниченным при $t \geq t_0$;

г) для слабой устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы существовал хотя бы один ограниченный матрикант $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$;

д) для слабой асимптотической устойчивости [1] ненулевого решения $x(t,x_0)$ достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0;$$

е) для слабой асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы существовал хотя бы один матрикант $\Phi_{AB_i}(t,t_0) \to 0,\ t \to \infty$.

Доказательство. а) При выполнении условия (7) имеем

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t,x_0) - x(t,y_0)|| = \lim_{t\to\infty} ||\Phi_{A^1B_i^1}(t,t_0)x_0 - \Phi_{A^2B_i^2}(t,t_0)y_0|| = 0, \tag{8}$$

т. е. решение асимптотически устойчиво. Из выполнения условия (8) для любых y_0 следует справедливость (7).

в) Пусть ненулевое решение $x(t,x_0)$ ограничено при $t \geq t_0$ постоянной M_0 и соответствует матрицам $A^1(t) \in \mathcal{A}(t)$, $B_i^1 \in \mathcal{B}_i$.

Выбрав для решения, начинающегося в точке $y_0 = \alpha\, x_0,\ |\alpha - 1| < \delta$, матрицы $A(t) = A^1(t),\ B_i = B_i^1$, получим

$$||x(t,x_0) - x(t,y_0)|| = ||\Phi_{A^1B_i^1}(t,t_0)x_0 - \Phi_{A^1B_i^1}(t,t_0)\alpha x_0|| < \delta M_0 = \varepsilon$$

при всех $t \geq t_0$, лишь только $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M_0}$. Это означает, что решение $x(t,x_0)$ слабо устойчиво. При этом оно может не быть устойчивым.

Действительно, даже при $y_0 = x_0$ для решений, соответствующих различным $A(t)$ и B_i, разность решений может не быть малой:

$$||x^1(t,x_0) - x^2(t,x_0)|| = ||\Phi_{A^1B_i^1}(t,t_0)x_0 - \Phi_{A^2B_i^2}(t,t_0)x_0|| =$$

$$= ||(\Phi_{A^1B_i^1}(t,t_0) - \Phi_{A^2B_i^2}(t,t_0))x_0||.$$

Например, если рассмотреть дифференциальное включение с нулевыми импульсами

$$\dot{x} \in [-1,0]x,\ x(0) = x_0 \neq 0$$

и взять $A^1(t) \equiv 0, A^2(t) \equiv -1$, то получим $\Phi_{A^1,0}(t,0) \equiv 1, \Phi_{A^2,0}(t,0) = e^{-t}$. Тогда

$$||x^1(t,x_0) - x^2(t,x_0)|| = |x_0|(1 - e^{-t})$$

является возрастающей функцией, стремящейся к $|x_0|$ при $t \to \infty$.

д) Пусть
$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = \lim_{t\to\infty} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 = 0.$$

Рассмотрим решения
$$(t,y_0) = \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0, \text{ где } y_0 = \delta x_0.$$

Тогда
$$\lim_{t\to\infty}[x(t,x_0) - x(t,y_0)] = \lim_{t\to\infty}[\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 - \Phi_{AB_i}(t,t_0)\delta x_0] = 0,$$
т. е. решение $x(t,x_0)$ слабо асимптотически устойчиво.

Доказательство утверждений б), г), е) проводится аналогично.

Теорема 3. *Для импульсного линейного однородного дифференциального включения (6) справедливы следующие утверждения:*

а) для устойчивости R-решения необходимо и достаточно, чтобы матриканты $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ были равномерно ограничены при $t \geq t_0$;

б) для асимптотической устойчивости R-решений необходимо и достаточно, чтобы матриканты $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ удовлетворяли условию (7);

в) для неустойчивости R-решений необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один матрикант был неограничен.

Доказательство. а) *Достаточность.* Пусть $X(t,x_0)$, $X(t,y_0)$ — R-решения (6) и $||\Phi_{A,B_i}(t,t_0)|| \leq M_0$. Тогда
$$d_1 = \rho\left(\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0, \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0\right) \leq$$
$$\leq ||\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 - \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0|| \leq M_0||x_0 - y_0||,$$

$$d_2 = \rho\left(\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0, \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0\right) \leq$$
$$\leq ||\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 - \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0|| \leq M_0||x_0 - y_0||,$$
где $\rho(x,A) = \min_{y\in A}||x-y||$.

Таким образом,
$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0, \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0\right) = \max\{d_1,d_2\} \leq$$
$$\leq M_0||x_0 - y_0|| < \varepsilon$$

при $||x_0 - y_0|| < \delta, \delta = \dfrac{\varepsilon}{M_0}$ и, следовательно, R-решение устойчиво.

Необходимость. Пусть теперь R-решение $X(t, x_0)$ устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $||x_0 - y_0|| < \delta$ имеем

$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0, \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0\right) < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, по нему выберем $\delta > 0$ и возьмем $y_0 = \alpha x_0$, где $|1-\alpha|\ ||x_0|| < \delta$. Тогда

$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0, \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0\right) =$$

$$= h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\ \alpha \bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0\right) =$$

$$= \max_{\psi\in S_1}\left|c\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\psi\right) - \alpha\, c\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\psi\right)\right| =$$

$$= |1-\alpha| \max_{\psi\in S_1}\left|c\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\psi\right)\right| =$$

$$= |1-\alpha| h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\{0\}\right) < \varepsilon.$$

Отсюда

$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i} \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\{0\}\right) < \frac{\varepsilon}{|1-\alpha|} = M.$$

Следовательно, R-решение $X(t,x_0)$ является ограниченным.

Предположим, что матриканты $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ не являются равномерно ограниченными. Следовательно, для любой последовательности $M_k \to \infty$ при $k \to \infty$ существует матрикант $\Phi_{A^k B_i^k}(t,t_0)$ такой, что $||\Phi_{A^k B_i^k}(t^k,t_0)|| > M_k$. Тогда найдется хотя бы один элемент $\varphi_{j^k l^k}(t^k,t_0)$ матрицы $\Phi_{A^k B_i^k}(t^k,t_0)$ такой, что $|\varphi_{j^k l^k}(t^k,t_0)| > L_k$, где $L_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Согласно определению

$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i}\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i}\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0\right)=$$

$$=\max\{d_1,d_2\},\ \text{где}\ d_2=\rho\left(\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0,\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i}\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0\right).$$

В качестве матриц $A(t), B_i$ возьмем матрицы $A^k(t), B_i^k$ соответственно. Начальное значение y_0^k выберем следующим образом:

$$y_{01}^k=x_{01},\ldots,y_{0l^k}^k=x_{0l^k}+\frac{\delta}{2},\ldots,y_{0n}^k=x_{0n}.$$

В этом случае

$$||(\Phi^*_{AB_i}(t^k,t_0)y_0)_j^k||=||(\Phi^*_{AB_i}(t^k,t_0)x_0)_j^k+\varphi_{j^kl^k}(t^k,t_0)(y_{0l^k}^k-x_{0l^k})||\geq$$

$$\geq|\varphi_{j^kl^k}(t^k,t_0)||y_{0l^k}^k-x_{0l^k}|-||(\Phi^*_{AB_i}(t^k,t_0)x_0)_j^k||>L_k\frac{\delta}{2}-M.$$

Следовательно, $d_2(t^k)\to\infty$ при $k\to\infty$, а значит, и

$$h\left(\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i}\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0,\bigcup_{A(t)\in\mathcal{A}(t),B_i\in\mathcal{B}_i}\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0\right)\Bigg|_{t=t_k}\to\infty,\ k\to\infty.$$

Получили противоречие с тем, что R-решение $X(t,x_0)$ является устойчивым. Таким образом, показано, что требование равномерной ограниченности матрицантов $\Phi_{AB_i}(t,t_0)$ является необходимым и достаточным для устойчивости R-решения $X(t,x_0)$. Утверждение в) теоремы непосредственно следует из утверждения а). Критерий асимптотической устойчивости R-решения доказывается аналогично.

Пример 3. Рассмотрим линейное импульсное дифференциальное включение вида

$$\dot{x}\in[\alpha,\beta]\,x,\ \ t\neq i,\ i\in N,\quad x(0)=x_0\geq 0,\tag{9}$$

$$\Delta x|_{t=i}=[-0,1;0]x,$$

где $\alpha<\beta$ — произвольные константы. Матрицант, соответствующий измеримой функции $A(t)\in[\alpha,\beta]$ и последовательности $b_i\in[-0,1;0]$, имеет вид

$$\Phi_{A(t),b_i}(t,t_0)=e^{\int\limits_0^t A(s)\,ds}\prod_{0<i<t}(1+b_i).$$

Очевидно, что

$$0,9^{[t]}e^{\alpha t} \leq \Phi_{A(t),b_i}(t,t_0) \leq e^{\beta t}.$$

Заметим также, что $0,9^{t+1}e^{\alpha t} \leq 0,9^{[t]}e^{\alpha t} \leq 0,9^t e^{\alpha t}$.

Изучим вопрос устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ ($x_0 = 0$).

Нулевое решение будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\beta < 0$. Нулевое решение будет устойчиво тогда и только тогда, когда $\beta \leq 0$. Для того чтобы нулевое решение (9) было слабо устойчивым, достаточно, чтобы $0,9e^{\alpha} \leq 1$, т. е. $\alpha \leq \leq \ln\frac{10}{9}$. Для слабой асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы $\alpha < \ln\frac{10}{9}$.

Что касается нулевого R-решения, то оно будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\beta \leq 0$, асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда $\beta < 0$, и неустойчивым тогда и только тогда, когда $\beta > 0$.

Предположим, что в дифференциальном включении (6) $\mathcal{A}(t) = A + \mathcal{A}^0(t)$, $\mathcal{B}_i = B_i + +\mathcal{B}_i^0$, где A, B_i — постоянные матрицы.

Тогда дифференциальное включение (6) можно записать в виде

$$\dot{x} \in Ax + \mathcal{A}^0(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} \in B_i x + \mathcal{B}_i^0 x. \tag{10}$$

Рассмотрим систему линейных импульсных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \;\; t \neq \tau_i, \;\; \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x. \tag{11}$$

Теорема 4. *Если решения системы уравнений (11) устойчивы и существуют такие* $A^0(t) \in \mathcal{A}^0(t)$, $B_i^0 \in \mathcal{B}_i^0$, *что выполнено условие*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} ||A^0(t)||\,dt < \infty, \qquad \prod_{\tau_i \geq t_0} (1 + ||B_i^0||) < \infty, \tag{12}$$

то решения дифференциального включения (10) слабо устойчивы.

Доказательство. В теореме 8.2 [2] рассматривается вопрос устойчивости решений импульсного дифференциального уравнения типа (10) при условии устойчивости решений импульсного дифференциального уравнения типа (11), где $B_i \equiv B$. Из доказательства этой теоремы видно, что последним требованием можно пренебречь. Таким образом, из устойчивости решений системы уравнений (11) при выполнении условий (12) следует устойчивость решений системы

$$\dot{x} = Ax + A^0(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + B_i^0 x.$$

Следовательно, данные решения являются слабо устойчивыми решениями включения (10).

Замечание 4. Решения включения (10) могут не быть устойчивыми даже при выполнении условия (12) для всех матриц $A^0(t) \in \mathcal{A}^0$, $B_i^0 \in \mathcal{B}_i^0$.

Пример 4. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное включение с нулевыми импульсами

$$\dot{x} \in \mathcal{A}^0(t)x, \text{ где } \mathcal{A}^0(t) = \left\{\frac{a}{t^2}, a \in [1,2]\right\}, \quad x(1) = x_0 \neq 0. \tag{13}$$

Решение укороченной системы $x(t, x_0) \equiv x_0$ является устойчивым по Ляпунову в положительном направлении. Условие (12) выполнено для всех $A^0(t) \in \mathcal{A}^0(t)$. При этом решение (13), соответствующее матрице $A_1^0(t) = \dfrac{1}{t^2}$, не является устойчивым, так как если выбрать $y_0 = x_0, A_2^0(t) = \dfrac{2}{t^2}$, то получим

$$||x^1(t,x_0) - x^2(t,x_0)|| = ||\Phi_{A^1,0}(t,t_0)x_0 - \Phi_{A^2,0}(t,t_0)x_0|| = \left|e^{1-\frac{1}{t}} - e^{2-\frac{2}{t}}\right| |x_0| \to e(e-1)|x_0|$$

при $t \to \infty$.

Теорема 5. *Если решения системы уравнений (11) устойчивы, то таковыми будут и R-решения включения (10) при условии, что*

$$\int_{t_0}^{\infty} |\mathcal{A}^0(t)|\, dt < \infty, \prod_{\tau_i \geq t_0} (1 + |\mathcal{B}_i^0|) < \infty, \tag{14}$$

где $|\mathcal{A}^0(t)| = \max\limits_{A^0(t) \in \mathcal{A}^0(t)} ||A^0(t)||, \;\; |\mathcal{B}_i^0| = \max\limits_{B_i^0 \in \mathcal{B}_i^0} ||B_i^0||.$

Доказательство. Пусть $X(t,x_0), X(t,y_0)$ — R-решения (6). Тогда

$$X(t,x_0) = \left\{x(t,x_0) = \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,x_0)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0 x(\tau_i,x_0), A^0(t) \in \mathcal{A}^0(t), B_i^0 \in \mathcal{B}_i^0 \right\}.$$

Используя полученные в теореме 8.2 [2] оценки, имеем

$$d_1 = \rho\left(\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,x_0)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0 x(\tau_i,x_0), X(t,y_0)\right) \leq \Big\| \Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0 +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,x_0)\,d\tau+\sum_{t_0\le\tau_i<t}\Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0x(\tau_i,x_0)-\Bigg[\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,y_0)\,d\tau+\sum_{t_0\le\tau_i<t}\Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0x(\tau_i,y_0)\Bigg]\Bigg\|\le K||x_0-y_0||,$$

$$d_2=\rho\Bigg(\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,y_0)\,d\tau+$$

$$+\sum_{t_0\le\tau_i<t}\Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0x(\tau_i,y_0),X(t,x_0)0\Bigg)\le\Bigg\|\Phi_{AB_i}(t,t_0)y_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,y_0)\,d\tau+\sum_{t_0\le\tau_i<t}\Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0x(\tau_i,y_0)-\Bigg[\Phi_{AB_i}(t,t_0)x_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_{AB_i}(t,\tau)A^0(\tau)x(\tau,x_0)\,d\tau+\sum_{t_0\le\tau_i<t}\Phi_{AB_i}(t,\tau_i)B_i^0x(\tau_i,x_0)\Bigg]\Bigg\|\le K||x_0-y_0||,$$

где

$$K=\left(\prod_{\tau_i\ge t_0}(1+|\mathcal{B}_i^0|)\right)^M e^{M\int\limits_{t_0}^{\infty}|\mathcal{A}^0(t)|\,dt},$$

M — положительная константа такая, что $||\Phi_{AB_i}(t,t_0)||\le M$.

Таким образом,

$$h(X(t,x_0),X(t,y_0))=\max\{d_1,d_2\}\le K||x_0-y_0||<\varepsilon$$

при $||x_0-y_0||<\delta,\delta=\dfrac{\varepsilon}{K}$. Следовательно, R-решение $X(t,x_0)$ включения (10) устойчиво.

Замечание 5. Из условия (14) следует выполнение условия (12) для всех $A^0(t),\ B_i^0$.

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. — М.: Наука, 1985. — С. 194–252.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations // World Sci. Ser. A: Nonlinear Sci. — 1995. — **14**. — 462 p.
3. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. — 206 с.

Получено 21.11.2003