УДК 517.927.8

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РАЦІОНАЛЬНОГО РАНГУ

С. В. Кондакова

Київ. ун-т економіки і технологій транспорту
Україна, 03049, Київ, вул. Лукашевича, 5

We give an application of the method of „perturbed" characteristic equation for asymptotic integration of a systems of linear differential equations with a small parameter in the rational power of the derivatives.

Запропоновано застосування методу „збуреного" характеристичного рівняння для асимптотичного інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром у дробовому степені при похідних.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{\frac{p}{q}} \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

де x — n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t)$ — квадратна матриця порядку n, елементи якої необмежено диференційовні по t на відрізку $[0; L]$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, p і q — натуральні взаємно прості числа. Крім того, нехай виконується нерівність

$$p < n \leq q. \tag{2}$$

Позначимо

$$\varepsilon^{\frac{1}{q}} = \mu.$$

Тоді система (1) набирає вигляду

$$\mu^p \frac{dx}{dt} = (A_0(t) + \mu^q A_1(t) + \mu^{2q} A_2(t) + \ldots)x, \tag{3}$$

де

$$\varepsilon = \mu^q, \varepsilon^{\frac{p}{q}} = \mu^p.$$

Детально системи, до яких малий параметр входить у дробовому степені, досліджено В. К. Григоренком [1]. До цього малий параметр у дробовому степені при похідних зустрічався лише при розв'язанні окремих диференціальних рівнянь. У роботі [1] при розв'язанні системи вигляду (1) розглянуто два випадки: випадок простих коренів характеристичного рівняння $\det \|A_0(t) - \lambda E\| = 0$ і випадок одного кореня кратності n. Запропонований тут метод „збуреного" характеристичного рівняння дозволяє будувати асимптотичні розв'язки систем у випадку кратного кореня за тим самим алгоритмом, що і при простих коренях характеристичного рівняння.

Розглянемо випадок, коли кратному кореню $\lambda_0(t)$ відповідає $p \geq 1$ простих елементарних дільників і $r \geq 1$ кратних $(p + r = k)$.

Нехай для матриці $A_0(t)$ існує матриця перетворення подібності $T(t)$ така, що зводить її до канонічної матриці квазідіагонального вигляду

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_2(t) \end{pmatrix},$$

де

$$W_1(t) = \begin{pmatrix} \lambda_0(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0(t) \end{pmatrix}$$

— діагональна матриця порядку p, $W_2(t), \dots, W_r(t)$ — жорданові клітини,

$$W_i(t) = \begin{pmatrix} \lambda_0(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0(t) \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{2, r}.$$

Підстановкою

$$z = T(t)y$$

зведемо систему (3) до системи

$$\mu^p \frac{dy}{dt} = D(t, \mu)y, \tag{4}$$

де $D(t, \mu) = D_0(t, \mu) + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^{qs} D_s(t)$, $D_0(t, \mu) = W(t) - \mu^p T^{-1}(t)T'(t)$, $D_s(t) = T^{-1}(t)A_s(t)T(t)$, $T'(t)$ — похідна від матриці $T(t)$.

Розглянемо „збурене” рівняння

$$\det \|D_0(t, \mu) - \lambda E\| = 0. \tag{5}$$

Матриця $D_0(t, \mu) = W(t) - \mu^p T^{-1}(t)T'(t)$ при певних значеннях $t \in [0; L]$ має кратні корені, або ж $A_0(t) = W(t)$ чи $T'(t) = 0$. Тоді матрицю $D_0(t, \mu)$ доцільно розглядати у вигляді

$$D_0(t, \mu) = W(t) - \mu^p T^{-1}(t)T'(t) + \sum_{s=1}^{j} \mu^{qs} D_s^0(t),$$

де $D_s^0(t) = T^{-1}(t)A_s(t)T(t), s = \overline{1,j}$. Щоб матриця $D(t,\mu)$, як і раніше, мала вигляд $D(t,\mu) = D_0(t,\mu) + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^{qs} D_s(t)$, покладемо $D_s(t) \equiv 0$ при $0 < s \leq j$ і $D_s(t) = T^{-1}(t)A_s(t)T(t)$ при $s > j$.

Число j визначається таким чином, щоб власні значення матриці $D_0(t,\mu)$ задовольняли наступні умови:

1) на даному відрізку були простими при будь-якому $t \in [0; L]$ і $0 < \mu \leq \mu_0$:

$$\lambda_i(t,\mu) \neq \lambda_j(t,\mu), \qquad i,j = 1,\ldots,n, i \neq j; \tag{6}$$

2) для кожної пари власних значень справджувалась асимптотична формула

$$|\lambda_i(t,\mu) - \lambda_j(t,\mu)| = O(\mu^k), \qquad k \in [0;1).$$

Доцільність умови 2 стане очевидною в процесі доведення теорем 1, 2.

Теорема 1. *Якщо матриці $A_s(t), s = 0,1,\ldots$, на відрізку $[0;L]$ необмежено диференційовні і власні значення матриці $D_0(t,\mu)$ задовольняють умову (6), то система диференціальних рівнянь (4) має формальну матрицю-розв'язок вигляду*

$$Y(t,\mu) = U(t,\mu,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right), \tag{7}$$

де $U(t,\mu,\mu)$ — квадратна матриця порядку n, $\Lambda(t,\mu,\mu)$ — діагональна матриця порядку n, що зображаються формальними рядами

$$\begin{aligned} U(t,\mu,\mu) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t,\mu), \\ \Lambda(t,\mu,\mu) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \Lambda_s(t,\mu), \end{aligned} \tag{8}$$

де $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Дана теорема доводиться методом, запропонованим у роботі [2]. В результаті отримаємо

$$U_0(t,\mu) = B(t,\mu), \tag{9}$$

$$\Lambda_0(t,\mu) = W^*(t,\mu), \tag{10}$$

де $B(t,\mu)$ — матриця перетворення для матриці $D_0(t,\mu)$, $W^*(t,\mu)$ — відповідна їй діагональна матриця.

Наступні коефіцієнти в розвиненнях (8) знаходяться за рекурентними формулами

$$\Lambda_s(t,\mu) = G_{1s}(t,\mu), \qquad s = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

де G_{1s} — діагональна матриця, утворена з діагональних елементів матриці

$$G_s(t,\mu) = B^{-1}(t,\mu)H_s(t,\mu), \tag{12}$$

$$H_s(t,\mu) = \sum_{j=1}^{[\frac{s}{q}]} D_j(t)U_{s-jq}(t,\mu) - U'_{s-p}(t,\mu) - \sum_{i=1}^{s-1} U_i(t,\mu)\Lambda_{s-i}(t,\mu), \tag{13}$$

$$U_s(t,\mu) = B(t,\mu)Q_s(t,\mu), \qquad s = 1,2,\ldots. \tag{14}$$

Коефіцієнти матриці $Q_s(t,\mu)$ знаходяться за формулою

$$q_{sij}(t,\mu) = \frac{g_{sij}(t,\mu)}{\lambda_j(t,\mu)-\lambda_i(t,\mu)}, \qquad i \neq j; \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Якщо $i = j$, то $q_{sij} = 0$. Можна довести, що отримані матриці мають на відрізку $[0;L]$ похідні всіх порядків.

Помноживши $Y(t,\mu)$ на матрицю $T(t)$ та підставивши $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$, отримаємо формальну матрицю-розв'язок $X(t,\varepsilon)$ системи (1).

Розглянемо матрицю (13). Неважко помітити, що для $s < p$ $H_s(t,\mu) \equiv 0$, а отже, з (12), (11), (15) випливає $U_s(t,\mu) \equiv 0, \Lambda_s(t,\mu) \equiv 0$, $s = 1,2,\ldots,p-1$. Оскільки в розвиненнях (8) ці елементи розташовані після $U_0(t,\mu), \Lambda_0(t,\mu)$, то ряди (8) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered}
U(t,\mu,\mu) = B(t,\mu) + \sum_{s=p}^{\infty} \mu^s U_s(t,\mu) = B(t,\varepsilon) + \sum_{s=p}^{\infty} \varepsilon^{\frac{s}{q}} U_s(t,\varepsilon), \\
\Lambda(t,\mu,\mu) = W^*(t,\mu) + \sum_{s=p}^{\infty} \mu^s \Lambda_s(t,\mu) = W^*(t,\varepsilon) + \sum_{s=p}^{\infty} \varepsilon^{\frac{s}{q}} \Lambda_s(t,\mu).
\end{gathered} \tag{16}$$

Для уникнення громіздкості в наступних оцінках розглянемо випадок одного n-кратного елементарного дільника за умови, що $\bar{t}_{n1}(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [0;L]$. Випадок кількох кратних елементарних дільників проілюструємо на прикладі конкретної системи 5-го порядку.

Лема 1. *Якщо виконуються умови теореми 1 і $\bar{t}_{n1}(t) \neq 0$ ($\bar{t}_{ij}(t)$ — елементи матриці $-T^{-1}(t)T'(t)$), то коефіцієнти формальних рядів (16) можна зобразити у вигляді*

$$\begin{gathered}
U_s(t,\mu) = B(t,\varepsilon) + \varepsilon^{-\frac{p}{qn}(s-p+1)} U_s^a(t,\varepsilon), \\
\Lambda_s(t,\mu) = W^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^{-\frac{p}{qn}(s-p)} \Lambda_s^a(t,\varepsilon), \qquad s = p, p+1, \ldots.
\end{gathered} \tag{17}$$

Символом „a" позначається матриця, що не має особливості в точці $\varepsilon = 0$, тобто матриця, яку можна подати у вигляді $A(t) + \varepsilon^i A(t,\varepsilon), A(t) \neq 0, i = 1,2,\ldots$.

Доведення. Оцінимо перш за все власні значення матриці $D_0(t,\mu)$.

Розглянемо рівняння (5). Розкриваючи визначник у лівій частині, рівняння (5) можна записати так:

$$(\lambda_0-\lambda)^n+(\lambda_0-\lambda)^{n-1}c_{n-1}(t,\mu)+\ldots+c_1(t,\mu)(\lambda_0-\lambda)+c_0(t,\mu)=0. \tag{18}$$

Як відомо, різницю $\lambda_0-\lambda$, в свою чергу, можна зобразити у вигляді ряду за степенями μ. Так, у рівнянні (18) коефіцієнт $c_n(t,\mu)$ при $(\lambda_0-\lambda)^n$ дорівнює 1, тобто $\rho_n=0$,

$$c_0(t,\mu)=\begin{vmatrix} \mu^p\bar t_{11} & 1+\mu^p\bar t_{12} & \ldots & \mu^p\bar t_{1n} \\ \mu^p\bar t_{21} & \mu^p\bar t_{22} & \ldots & \mu^p\bar t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu^p\bar t_{n-1,1} & \mu^p\bar t_{n-1,2} & \ldots & 1+\mu^p\bar t_{n-1,n} \\ \mu^p\bar t_{n1} & \mu^p\bar t_{n2} & \ldots & \mu^p\bar t_{nn} \end{vmatrix} = \mu^{np}\bar t_{11}(t)\ldots\bar t_{nn}(t)+\ldots+\mu^p\bar t_{n1}(t)$$

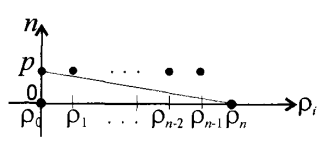
(тут виписано лише доданки з найменшим та найбільшим показниками степеня μ), отже, $\rho_0=p$, якщо $\bar t_{n1}(t)\neq 0$. Якщо $\operatorname{Sp}\left(-T^{-1}(t)T(t)\right)\neq 0$, то

$$c_{n-1}(t,\mu)=\mu^p(\bar t_{11}(t)+\bar t_{22}(t)+\ldots+\bar t_{nn}(t)), \qquad \rho_{n-1}=p.$$

Використовуючи властивості визначників, можна показати, що мінімальний степінь μ в решті многочленів $c_i(t,\mu)$ буде теж дорівнювати p (якщо не дорівнюють нулю відповідні коефіцієнти). Отже, як відомо,

$$\lambda_i(t,\mu)-\lambda_0(t)=O_i(\mu^{\frac{p}{n}}). \tag{19}$$

(Тут і далі індекс i біля символу O відповідає індексу величини, порядок якої вказується. Відповідно індекс ij відповідає номеру елемента матриці.) На діаграмі повного многокутника (див. рисунок) показано, що корінь $\lambda(t,\mu)-\lambda_0(t)$ рівняння n-го порядку має рівно n розвинень. Будемо вважати, що вони є різними.



Якщо $\bar t_{n1}(t)\equiv 0$ на відрізку $[0;L]$, то запропонований метод знаходження розв'язків диференціального рівняння теж можна застосовувати, але асимптотичні оцінки при цьому будуть іншими. Назвемо цей випадок спеціальним збуренням. Він вимагає окремого дослідження.

Отже, з (10) отримуємо

$$\Lambda_0(t,\mu)=\operatorname{diag}\left\{\lambda_0(t)+O_1(\mu^{\frac{p}{n}}),\lambda_0(t)+O_2(\mu^{\frac{p}{n}}),\ldots,\lambda_0(t)+O_n(\mu^{\frac{p}{n}})\right\}=\Lambda_0^a(t,\mu). \tag{20}$$

Матрицю перетворення подібності $B(t,\mu)=U_0(t,\mu)$ можна записати у вигляді

$$B(t,\mu)=\|O_{ij}(\mu^{\frac{p(i-1)}{n}})\|_1^n. \tag{21}$$

Справді,

$$(W(t) - \mu^p T^{-1}(t)T'(t))B(t,\mu) = B(t,\mu)W^*(t,\mu).$$

З останньої матричної рівності для знаходження елементів $b_{ij}(t,\mu)$ отримаємо систему n^2 рівнянь з n^2 невідомими. Випишемо n рівнянь з невідомими першого стовпця:

$$\begin{cases} (\lambda_0 + \mu^p \bar{t}_{11})b_{11} + (1 + \mu^p \bar{t}_{12})b_{21} + \ldots + \mu^p \bar{t}_{1n} b_{n1} = b_{11}(\lambda_0 + O_1(\mu^{\frac{p}{n}})), \\ \mu^p \bar{t}_{21} b_{11} + (\lambda_0 + \mu^p \bar{t}_{22})b_{21} + \ldots + \mu^p \bar{t}_{2n} b_{n1} = b_{21}(\lambda_0 + O_1(\mu^{\frac{p}{n}})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu^p \bar{t}_{n1} b_{11} + \mu^p \bar{t}_{n2} b_{21} + \ldots + (\lambda_0 + \mu^p \bar{t}_{nn})b_{n1} = b_{n1}(\lambda_0 + O_1(\mu^{\frac{p}{n}})) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu^p \bar{t}_{11} b_{11} + (1 + \mu^p \bar{t}_{12})b_{21} + \ldots + \mu^p \bar{t}_{1n} b_{n1} = b_{11} O_1(\mu^{\frac{p}{n}}), \\ \mu^p \bar{t}_{21} b_{11} + \mu^p \bar{t}_{22} b_{21} + \ldots + \mu^p \bar{t}_{2n} b_{n1} = b_{21} O_1(\mu^{\frac{p}{n}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu^p \bar{t}_{n1} b_{11} + \mu^p \bar{t}_{n2} b_{21} + \ldots + \mu^p \bar{t}_{nn} b_{n1} = b_{n1} O_1(\mu^{\frac{p}{n}}). \end{cases} .$$

Розглянемо перше рівняння. Нехай $b_{11}(t,\mu) = 1$. Тоді права частина першого рівняння буде порядку $O(\mu^{\frac{p}{n}})$. Для того щоб ліва частина мала той самий порядок, потрібно, щоб $b_{21}(t,\mu)$ був порядку $O(\mu^{\frac{p}{n}})$, оскільки решта доданків лівої частини мають порядок не менший за $O(\mu^p)$. Тому $b_{21}(t,\mu) = O(\mu^{\frac{p}{n}})$. Нехай $b_{i1}(t,\mu) = O(\mu^{\frac{p(i-1)}{n}})$ для всіх $i < n$. З останнього рівняння знайдемо оцінку для $b_{n1}(t,\mu)$:

$$\mu^p \bar{t}_{n1} + \mu^p \bar{t}_{n2} O(\mu^{\frac{p}{n}}) + \ldots + \mu^p \bar{t}_{nn-1} O(\mu^{\frac{p(n-2)}{n}}) + \mu^p \bar{t}_{nn} b_{n1} = b_{n1} O(\mu^{\frac{p}{n}}),$$

або, позначивши $b_{n1}(t,\mu) = O(\mu^x)$ (x — невідома величина, що визначається), отримаємо

$$\mu^p \bar{t}_{n1} + \mu^p \bar{t}_{n2} O(\mu^{\frac{p}{n}}) + \ldots + \mu^p \bar{t}_{nn-1} O(\mu^{\frac{p(n-2)}{n}}) = O(\mu^x) O(\mu^{\frac{p}{n}}) - \mu^p \bar{t}_{nn} O(\mu^x).$$

Ліва частина має порядок $O(\mu^p)$. Отже, і права частина

$$O(\mu^x) O(\mu^{\frac{p}{n}}) - \mu^p \bar{t}_{nn} O(\mu^x) = O(\mu^x) O(\mu^{\frac{p}{n}}) \left(1 - \bar{t}_{nn} O(\mu^{p - \frac{p}{n}})\right)$$

буде теж порядку $O(\mu^p)$. Тобто $x + \dfrac{p}{n} = p, x = \dfrac{p(n-1)}{n}$. За принципом математичної індукції $b_{in}(t,\mu)$ має порядок $O(\mu^{\frac{p(i-1)}{n}})$ для всіх $i \in N$. Аналогічно знаходимо оцінку решти елементів стовпців матриці і переконуємось у справедливості формули (21). Із (9), (21) маємо

$$U_0(t,\mu) = U_0^a(t,\mu). \tag{22}$$

Визначник матриці $B(t,\mu)$, за означенням, складається з суми добутків n елементів, взятих по одному з кожного рядка і стовпця відповідних знаків. Отже, це буде многочлен порядку $1 \cdot O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) O\left(\mu^{\frac{2p}{n}}\right) \ldots O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) = O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{2}}\right)$.

Алгебраїчні доповнення елементів i-го стовпця транспонованої матриці будуть порядку $O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{2}-\frac{p(i-1)}{n}}\right)$. Отже, самі елементи стовпців оберненої матриці матимуть порядок $O(\mu^{-\frac{p(i-1)}{n}})$, а матрицю $B^{-1}(t,\mu)$ можна записати у вигляді

$$B^{-1}(t,\mu) = \left\|O_{ij}(\mu^{-\frac{p(j-1)}{n}})\right\|_1^n, \tag{23}$$

її елементи мають особливість за параметром μ типу полюса.

Похідна від матриці перетворення подібності

$$B'(t,\mu) = \mu^{\frac{p}{n}} B'^{a}(t,\mu). \tag{24}$$

Справді, елементи першого рядка матриці $B(t,\mu)$, як було відмічено вище, є одиницями. Отже, після диференціювання вони будуть нулями. Решта ж рядків мають порядок від $O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right)$ до $O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right)$, а значить, містять спільний множник $\mu^{\frac{p}{n}}$, який ми винесли за дужки. При диференціюванні, за означенням, отримуємо $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{B(t+\triangle t,\mu)-B(t,\mu)}{\triangle t}$. Очевидно, що ця границя не матиме особливості за параметром μ типу полюса, оскільки його не має функція $B(t,\mu)$. Це і дає можливість записати рівність (24).

Оцінимо $H_p(t,\mu)$. З (13) маємо

$$H_p = -\sum_{i=1}^{p-1} U_i(t,\mu)\Lambda_{p-i}(t,\mu) - U_0'(t,\mu) = -U_0'(t,\mu).$$

Тому з (9), (21) отримуємо

$$H_p(t,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix}.$$

Отже, з (12), (23) знаходимо

$$G_p(t,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p(n-1)}{n}}\right) \\ 1 & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p(n-1)}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} = G_p^a(t,\mu),$$

а тому

$$\Lambda_p(t,\mu) = \Lambda_p^a(t,\mu).$$

Із (15), (19) маємо

$$Q_p(t,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) \\ O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & 0 & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Із (12), (21) знаходимо

$$U_p(t,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) \\ O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & 0 & \dots & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\right) & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mu^{-\frac{p}{n}} \begin{pmatrix} u_{11}^a & u_{12}^a & \dots & u_{1n}^a \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} = \mu^{-\frac{p}{n}} U_p^a(t,\mu).$$

Припустимо, що для всіх $p \le j < s$ справедливими є формули

$$U_j(t,\mu) = \mu^{-\frac{p(j-p+1)}{n}} = \begin{pmatrix} u_{j11}^a & u_{j12}^a & \dots & u_{j1n}^a \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \mu^{-\frac{p(j-p+1)}{n}} U_j^a(t,\mu), \tag{25}$$

$$\Lambda_j(t,\mu) = \mu^{-\frac{p(j-p)}{n}}\Lambda_j^a(t,\mu), \qquad j = p, p+1, \dots, s-1. \tag{26}$$

Тоді з (12), (13) на підставі припущень (25), (26) отримуємо

$$G_s(t,\mu) = B^{-1}(t,\mu)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} D_j(t)U_{s-jq}(t,\mu) - \sum_{i=p}^{s-p} U_i(t,\mu)\Lambda_{s-i}(t,\mu) - U'_{s-p}(t,\mu)\right) =$$

$$= B^{-1}(t,\mu)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} D_j(t)\mu^{-\frac{p}{n}(s-jq+1-p)}U^a_{s-jq}(t,\mu) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=p}^{s-p} \mu^{-\frac{p}{n}(i+1-p)}\mu^{-\frac{p}{n}(s-i-p)}U_i^a(t,\mu)\Lambda^a_{s-i}(t,\mu) - \mu^{-\frac{p}{n}(s-p+1-p)}U'^a_{s-p}(t,\mu)\right) =$$

$$= B^{-1}(t,\mu)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} D_j(t)\mu^{-\frac{p}{n}(s-jq+1-p)}U^a_{s-jq}(t,\mu) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=p}^{s-p} \mu^{-\frac{p}{n}(s-2p+1)}U_i^a(t,\mu)\Lambda^a_{s-i}(t,\mu) - \mu^{-\frac{p}{n}(s-2p+1)}U^{a'}_{s-p}(t,\mu)\right).$$

Добутками $B^{-1}(t,\mu)U_i^a(t,\mu), B^{-1}(t,\mu)U_i^{a'}(t,\mu)$ на підставі (23) та припущення (25) будуть матриці, елементи яких не мають особливості по μ. Позначимо їх через $F_s^a(t,\mu), F_s^{a'}(t,\mu)$ відповідно. Тоді можна записати

$$G_s(t,\mu) = \mu^{-\frac{p}{n}(s+1-p)}\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} \mu^{\frac{pjq}{n}}B^{-1}(t,\mu)D_j(t)U^a_{s-jq}(t,\mu) - \mu^{-\frac{p}{n}(s-2p+1)}\sum_{i=p}^{s-p} F_i^a(t,\mu)\Lambda^a_{s-i}(t,\mu) -$$

$$- \mu^{-\frac{p}{n}(s-2p+1)}F^{a'}_{s-p}(t,\mu) = \mu^{-\frac{p}{n}(s-p)}\left(\mu^{-\frac{p}{n}}\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} \mu^{\frac{pjq}{n}}B^{-1}(t,\mu)D_j(t)U^a_{s-jq}(t,\mu) + \right.$$

$$\left. + \mu^{\frac{p(p-1)}{n}}\sum_{i=p}^{s-p} F_i^a(t,\mu)\Lambda^a_{s-i}(t,\mu) - \mu^{\frac{p(p-1)}{n}}F^{a'}_{s-p}(t,\mu)\right).$$

Розглянемо суму $\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} \mu^{\frac{p(jq-1)}{n}}B^{-1}(t,\mu)D_j(t)U^a_{s-jq}(t,\mu)$. Враховуючи (2), (23), її можна записати у вигляді $\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} \mu^{\frac{p}{n}(jq-n)} B^{-1a}(t,\mu) D_j(t) U^a_{s-jq}(t,\mu)$. Отже,

$$G_s(t,\mu) = \mu^{-\frac{p(s-p)}{n}} G^a_s(t,\mu).$$

Таким чином,

$$\Lambda_s(t,\mu) = \mu^{-\frac{p(s-p)}{n}} \Lambda^a_s(t,\mu),$$

$$U_s(t,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} \mu^{-\frac{p(s-p)}{n}} G^a_s(t,\mu) \mu^{-\frac{p}{n}} =$$

$$= \mu^{-\frac{p(s-p+1)}{n}} \begin{pmatrix} u^a_{j11} & u^a_{j12} & \dots & u^a_{j1n} \\ O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p}{n}}\right) & \dots & O(\mu^{\frac{p}{n}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) & \dots & O\left(\mu^{\frac{p(n-1)}{n}}\right) \end{pmatrix} = \mu^{-\frac{p(s-p+1)}{n}} U^a_s(t,\mu).$$

Тобто формули (25) та (26) є справедливими для $j = s$. Отже, за індукцією можна зробити висновок про їх справедливість для всіх $s \in N$.

Підставляючи $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{q}}$ в (25), (26), переконуємось у справедливості (17).

Лему доведено.

Підставимо (17) у (16). Отримаємо

$$\begin{gathered} U(t,\mu,\mu) = U_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=p}^{\infty} \varepsilon^{\frac{s}{q}} \varepsilon^{-\frac{p}{qn}(s-p+1)} U^a_s(t,\varepsilon), \\ \Lambda(t,\mu,\mu) = \Lambda_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=p}^{\infty} \varepsilon^{\frac{s}{q}} \varepsilon^{-\frac{p(s-p)}{qn}} \Lambda^a_s(t,\varepsilon). \end{gathered} \tag{27}$$

Очевидно, що для p, n, які задовольняють нерівність (2),

$$s - \frac{p}{n}(s-p+1) = \frac{s(n-p) - p(1-p)}{n} > 0, \qquad s = p, p+1, \dots . \tag{28}$$

Лема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, леми 1,*

$$\operatorname{Re}\left(\lambda_i(t,\mu)\right) \le 0 \tag{29}$$

на множині $\{K : t \in [0; L], 0 < \mu \le \mu_0\}$, *то на відрізку* $[0; L]$ m*-те наближення задовольняє диференціальну систему (1) з точністю до величини порядку* $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{q}\left((m+1-p)(1-\frac{p}{n})+p\right)}\right)$.

Доведення. Для доведення введемо матрицю

$$Y_m(t,\mu) = U_m(t,\mu,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right), \tag{30}$$

де

$$\begin{gathered} U_m(t,\mu,\mu) = \sum_{s=0}^{m}\mu^s U_s(t,\mu) = U_0(t,\mu) + \sum_{s=p}^{m}\mu^{s-\frac{p(s-p+1)}{n}}U_s^a(t,\mu), \\ \Lambda_m(t,\mu,\mu) = \sum_{s=0}^{m}\mu^s \Lambda_s(t,\mu) = \Lambda_0(t,\mu) + \sum_{s=p}^{m}\mu^{s-\frac{p(s-p)}{n}}\Lambda_s^a(t,\mu). \end{gathered} \tag{31}$$

Підставляючи (30) у диференціальний вираз

$$L(Y_m) = \mu^p \frac{dY_m}{dt} - D(t,\mu)Y_m, \tag{32}$$

маємо

$$\begin{aligned} L(Y_m(t,\mu)) = {} & [\mu^p U_m'(t,\mu,\mu) + U_m(t,\mu,\mu)\Lambda_m(t,\mu,\mu) - \\ & - D(t,\mu)U_m(t,\mu,\mu)]\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Оцінимо за нормою матрицю $\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right)$ на множині $\{K : 0 < \mu \le \mu_0; t \in \in [0; L]\}$. Для цього запишемо елементи $\lambda_{km}(t,\mu,\mu)$, $k = 1,\ldots,n$, діагональної матриці $\Lambda_m(t,\mu,\mu)$ у вигляді

$$\lambda_{km}(t,\mu,\mu) = \alpha_{km}(t,\mu,\mu) + i\beta_{km}(t,\mu,\mu), \tag{34}$$

де $\alpha_{km}(t,\mu,\mu), \beta_{km}(t,\mu,\mu)$ — відповідно дійсна і уявна частини елементів $\lambda_{km}(t,\mu,\mu)$.

Тоді, розуміючи під нормою матриці, наприклад, $\max\limits_k \sum\limits_m |\lambda_{km}|$, у відповідності з (29) одержуємо

$$\begin{aligned} \left\|\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu\right)\right\| = {} & \max_k e^{\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \alpha_{km}(\tau,\mu,\mu)\,d\tau} \le \\ & \le \max_k e^{\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \mu^p\alpha_{kp}(\tau,\mu)+\ldots+\mu^{m-\frac{p(m-p)}{n}}\alpha_{km}(\tau,\mu)\,d\tau}, \quad k = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

На підставі того, що функції $\alpha_{ks}(t,\mu)$ $s=1,\dots,m$, диференційовні на відрізку $[0;L]$ та за умови (28) не мають особливості по μ, існує стала $M>0$, яка не залежить від μ і така, що на множині K

$$\left|\sum_{s=p}^{m}\mu^{s-p-\frac{p}{n}(s-p)}\alpha_{ks}^{a}(t,\mu)\right| = \left|\sum_{s=p}^{m}\mu^{(s-p)(1-\frac{p}{n})}\alpha_{ks}^{a}(t,\mu)\right| \le M, \qquad k=1,\dots,n.$$

Тому

$$\left\|\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right)\right\| \le e^{ML}.$$

Оцінимо матрицю, що є множником при $\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\mu,\mu)\,d\tau\right)$ у правій частині рівності (33). З огляду на те, що визначаючи коефіцієнти рядів $U_m(t,\mu,\mu),\Lambda_m(t,\mu,\mu)$, ми зрівнювали коефіцієнти при зовнішніх степенях параметра μ до порядку m включно, зрозуміло, що ця матриця міститиме лише коефіцієнти при $\mu^{m+1},\mu^{m+2},\dots,\mu^{2m},\dots$. Тому

$$\mu^p\sum_{s=0}^{m}\mu^sU_s'(t,\mu)+\sum_{s=0}^{m}\mu^sU_s(t,\mu)\sum_{s=0}^{m}\mu^s\Lambda_s(t,\mu)-$$

$$-\left(D_0(t,\mu)+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^{qs}D_s(t)\right)\sum_{s=0}^{m}\mu^sU_s(t,\mu)=\mu^p\sum_{s=m-p+1}^{m}\mu^sU_s'(t,\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\mu^{m+j}\sum_{s=p}^{m}U_{m+j-s}(t,\mu)\Lambda_s(t,\mu)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]}\mu^{jq}D_j(t)\sum_{s=m+j-jq}^{m}\mu^sU_s(t,\mu)-$$

$$-\sum_{j=\left[\frac{m}{q}\right]+1}^{\infty}\mu^{jq}D_j(t)\sum_{s=0}^{m}\mu^sU_s(t,\mu)=\mu^p\sum_{s=m-p+1}^{m}\mu^{s-\frac{p(s+1-p)}{n}}U_s^{a'}(t,\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\mu^{m+j}\sum_{s=p}^{m}\mu^{-\frac{p}{n}(m+j-s+1-p)}\mu^{-\frac{p}{n}(s-p)}U_{m+j-s}^{a}(t,\mu)\Lambda_s^{a}(t,\mu)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\mu^{jq}D_j(t)\sum_{s=m+j-jq}^{m}\mu^{s-\frac{p}{n}(s+1-p)}U_s^{a}(t,\mu)-$$

$$- \sum_{j=\left[\frac{m}{q}\right]+1}^{\infty} \mu^{jq} D_j(t) \sum_{s=0}^{m} \mu^{s-\frac{p}{n}(s-p+1)} U_s^a(t,\mu) =$$

$$= O\left(\mu^{p+m-p+1-\frac{p(m-p+1+1-p)}{n}}\right) + O\left(\mu^{m+1-\frac{p}{n}(m+2-2p)}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} O\left(\mu^{jq+m+j-jq-\frac{p}{n}(m+j-jq+1-p)}\right) + O\left(\mu^{q\left[\frac{m}{q}\right]+q}\right) =$$

$$= O\left(\mu^{m+1-\frac{p}{n}(m+2-2p)}\right) + O\left(\mu^{m+1-\frac{p}{n}(m+2-(p+q))}\right) + O\left(\mu^{q\left[\frac{m}{q}\right]+q}\right) =$$

$$= O\left(\mu^{\frac{m}{n}(n-p)+1+\frac{p}{n}(2p-2)}\right) + O\left(\mu^{\frac{m}{n}(n-p)+1+\frac{p}{n}(p+q-2)}\right) + O\left(\mu^{q\left[\frac{m}{q}\right]+q}\right).$$

Оскільки на підставі означення цілої частини сума $q\left[\dfrac{m}{q}\right]+q$ обмежиться множиною значень $\{m+1,\ldots,m+q\}$, то задана матриця буде порядку

$$O\left(\mu^{m+1-\frac{p}{n}(m+1-p)}\right)\left(O\left(\mu^{\frac{p(p-1)}{n}}\right) + O\left(\mu^{\frac{p(q-1)}{n}}\right) + O\left(\mu^{\frac{p(m+1-p)}{n}}\right)\right) =$$

$$= O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})+p}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{q}\left((m+1-p)(1-\frac{p}{n})+p\right)}\right).$$

Лему доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, леми 1, умова (29) і для* $t=0$

$$y(t,\mu) = y_m(t,\mu), \tag{35}$$

де $y(t,\mu)$ *— точний розв'язок системи (4), то для будь-якого* $L>0$ *існує стала* $c>0$*, яка не залежить від* μ *і така, що для всіх* $t\in[0;L]$*,* $\mu\in(0;\mu_0]$ *виконується нерівність*

$$\|y(t,\mu) - y_m(t,\mu)\| \le \mu^{(m-p)(1-\frac{p}{n})-p+1} c. \tag{36}$$

Доведення. Введемо вектор

$$\xi(t,\mu) = y(t,\mu) - y_m(t,\mu).$$

За лемою 2 даний вектор задовольнятиме систему диференціальних рівнянь

$$\mu^p \frac{d\xi}{dt} = D(t,\mu^q)\xi + O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})+p}\right), \tag{37}$$

причому на підставі (35)

$$\xi(0,\mu) = 0.$$

У системі (37) виконаємо заміну змінних

$$\xi(t,\mu) = B(t,\mu^p)\eta(t,\mu).$$

В результаті отримаємо

$$\mu^p \frac{d\eta}{dt} = [W^*(t,\mu^p) + \mu^p D_1(t,\mu^q)]\eta + B^{-1}(t,\mu^p) O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})+p}\right), \tag{38}$$

де

$$D_1(t,\mu^q) = B^{-1}(t,\mu^p)\left[\sum_{s=1}^{\infty} \mu^{sq-p} D_s(t) B(t,\mu^p) - B'(t,\mu^p)\right].$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\mu^p \frac{d\eta}{dt} = W^*(t,\mu^p)\eta,$$

яка має розв'язок

$$\eta(t,\mu^p) = \exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_0^t W^*(\tau,\mu^p)\,d\tau\right)c,$$

де c — сталий n-вимірний вектор.

Тому систему (38) можна замінити еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$\eta(t,\mu) = \int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_{t_1}^t W^*(\tau,\mu^p)\,d\tau\right) D_1(t_1,\mu^q)\eta(t_1,\mu)dt_1 +$$

$$+ \int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_{t_1}^t W^*(\tau,\mu^p)\,d\tau\right) B^{-1}(t_1,\mu^p) O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})}\right) dt_1.$$

Звідси дістаємо

$$\|\eta(t,\mu)\| \le \int\limits_0^t \left\|\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_{t_1}^t W^*(\tau,\mu^p)\,d\tau\right)\right\| \|D_1(t_1,\mu^q)\| \|\eta(t_1,\mu)\| dt_1 +$$

$$+ \int\limits_0^t \left\|\exp\left(\frac{1}{\mu^p}\int\limits_{t_1}^t W^*(\tau,\mu^p)\,d\tau\right)\right\| \|B^{-1}(t_1,\mu^p)\| \|O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})}\right)\| dt_1. \tag{39}$$

Згідно з (29)

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{\mu^p} \int\limits_{t_1}^{t} W^*(\tau, \mu^p)\, d\tau \right) \right\| \leq 1.$$

Оскільки елементи матриці $D_s(t) = T^{-1}(t)A_s(t)T(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[0; L]$, $q \geq p$, то існує стала $M_1 > 0$, яка не залежить від μ і така, що для всіх $\tau \in [0; L], \mu \in (0, \mu_0]$ $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^{sq-p} D_s(t) \leq M_1$, тому

$$\|D_1(t_1, \mu)\| = \left\| B^{-1}(t, \mu) \left[\sum_{s=1}^{\infty} \mu^{sq-p} D_s(t) B(t, \mu) - B'(t, \mu) \right] \right\| \leq$$

$$\leq \left\| B^{-1}(t, \mu) M_1 B(t, \mu) - B^{-1}(t, \mu) B'(t, \mu) \right\| = \left\| M_1 - B^{-1}(t, \mu) B'(t, \mu) \right\|.$$

На підставі (21), (23), (24) існують додатні сталі M_2, M_3, які не залежать від μ і такі, що

$$\|B^{-1}(t, \mu)\| = \mu^{-\frac{p(n-1)}{n}} \begin{pmatrix} O\big(\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\big) & O\big(\varepsilon^{\frac{n-2}{n}}\big) & \ldots & O\big(\varepsilon^{0}\big) \\ O\big(\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\big) & O\big(\varepsilon^{\frac{n-2}{n}}\big) & \ldots & O\big(\varepsilon^{0}\big) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O\big(\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\big) & O\big(\varepsilon^{\frac{n-2}{n}}\big) & \ldots & O\big(\varepsilon^{0}\big) \end{pmatrix} \leq \mu^{-\frac{p(n-1)}{n}} M_2,$$

$$\|B^{-1}(t, \mu) B'(t, \mu)\| \leq M_3.$$

Крім того,

$$\|O\left(\mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})}\right)\| \leq \mu^{(m+1-p)(1-\frac{p}{n})} M_4.$$

Тому (39) можна переписати у вигляді

$$\|\eta(t, \mu)\| \leq M \int\limits_{0}^{t} \|\eta(t_1, \mu)\| dt_1 + \mu^{(m-p)(1-\frac{p}{n})-p+1} M_2 M_4 L,$$

де $M = |M_1 - M_3|$.

За лемою Гронуолла – Беллмана

$$\|\eta(t, \mu)\| \leq \mu^{(m-p)(1-\frac{p}{n})-p+1} M_2 M_4 L e^{ML}. \tag{40}$$

Оскільки

$$\|\xi\| = \|y(t,\mu) - y_m(t,\mu)\| = \|B(t,\mu^p)\|\|\eta(t,\mu)\|,$$

то на підставі (21), неперервної диференційовності елементів матриці $B(t,\mu)$ та (40) можна записати

$$\|y(t,\mu) - y_m(t,\mu)\| \leq \mu^{(m-p)(1-\frac{p}{n})-p+1}c.$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо систему

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{dt} = (A_0(t) + \varepsilon A_1(t))x,$$

де

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t^2 & 2t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 \\ -t^3+2t^2-1 & -t & t & 2t & -t^2 \\ t & -t & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 2t & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t & 0 \\ t^2 & 0 & t & 0 & -t \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити $\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \mu$, то отримаємо

$$\mu\frac{dx}{dt} = A_0(t) + \mu^3 A_1(t).$$

Розглянемо характеристичне рівняння $\det\|A_0(t) - \lambda_0 E\| = 0$, або

$$\begin{vmatrix} -\lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t^2 & 2t-\lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t-\lambda_0 & 0 & 0 \\ -t^3+2t^2-1 & -t & t & 2t-\lambda_0 & -t^2 \\ t & -t & 1 & 1 & -\lambda_0 \end{vmatrix} =$$

$$-\ \lambda_0(2t-\lambda_0)[(t-\lambda_0)(2t-\lambda_0)(-\lambda_0) + t^2(t-\lambda_0)] +$$

$$+\ t^2\left[(t-\lambda_0)(2t-\lambda_0)(-\lambda_0) + t^2(t-\lambda_0)\right] =$$

$$= (t-\lambda_0)[(-2t\lambda_0 + \lambda_0^2 + t^2)(-2t\lambda_0 + \lambda_0^2 + t^2)] = (t-\lambda_0)^5 = 0.$$

Отже, маємо корінь $\lambda_0 = t$ п'ятої кратності. Визначимо кратність елементарних дільників. Для цього розглянемо всі детермінанти четвертого порядку. Безпосередні обчислення показують, що детермінанти $D_{13}, D_{14}, D_{23}, D_{24}$ діляться без остачі на $(t-\lambda)^2$. Решта детермінантів діляться на $(t-\lambda)^3$ і т. д. Отже, $m_1 = 2$. Якщо розглянути детермінанти третього порядку, то видно, що не всі вони діляться на $t - \lambda_0$. Зокрема,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & t-\lambda_0 \\ -t^3+2t^2-1 & -t & t \\ t & -t & 1 \end{Vmatrix} = -t + t^2 + (t-\lambda_0)(t^4 - 2t^3 + t + t^2) \not\vdots (t-\lambda_0).$$

Отже, $m_2 = 0$. Тому, $l_1 = 5 - 2 = 3, l_2 = 2 - 0 = 2$. Канонічною формою матриці $A_0(t)$ є квазідіагональна матриця

$$W(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

За матрицю перетворення візьмемо матрицю

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 1 \\ -1 & t^2 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -2t+t^2 & 1 & 0 & -1 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2t & -1-t & 1 & 1 & -t \end{pmatrix}.$$

Виконавши підстановку $x = T(t)y$, перейдемо до системи вигляду (4), де

$$D_0(t) = W(t) - \mu T^{-1}(t)T'(t) = \begin{pmatrix} t & 1-\mu(1-2t) & 0 & \mu & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -\mu(t-1) & -\mu & -\mu & t \end{pmatrix},$$

$$D_1 = T^{-1}(t)A_1(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & -t & t & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & t & 0 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 1 & 0 \\ t^2-t-1 & -2t^2 & t & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det \begin{Vmatrix} t & 1-\mu(1-2t) & 0 & \mu & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -\mu(t-1) & -\mu & -\mu & t \end{Vmatrix} = (t-\lambda)((t-\lambda)^4 - \mu^2) = 0$$

має 5 простих коренів: $\lambda_1 = t, \lambda_2 = t - \mu^{\frac{1}{2}}, \lambda_3 = t + \mu^{\frac{1}{2}}, \lambda_4 = t - i\mu^{\frac{1}{2}}, \lambda_5 = t + i\mu^{\frac{1}{2}}$. Отже, можна застосувати теорему 1. Знаходимо

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-\sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t+\sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-i\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+i\sqrt{\mu} \end{pmatrix},$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & \frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t-\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} \\ 0 & \frac{2\mu}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & \frac{2\mu}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & \frac{2\mu}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & \frac{2\mu}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}-t+1)}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}+t-1)}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}-t+1)}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}-t+1)}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & \frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t-\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} & -\frac{2\sqrt{\mu}}{2+3\mu t+\mu\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}.$$

Наступні матриці рядів (8) знаходимо за формулами (11) – (15). При цьому з аналізу коренів „збуреного” характеристичного рівняння з (15) випливає, що кожна наступна матриця рядів (8) зменшується на величину порядку $O\left(\mu^{\frac{1}{2}}\right)$, що з кожним кроком приводить до збільшення особливості по μ типу полюса, яка, однак, усуватиметься за рахунок коефіцієнтів μ^s. Отже, за теоремою 2 отримане за теоремою 1 m-те наближення відрізнятиметься від точного розв'язку на величину порядку $O(\mu^{m(1-\frac{1}{2})})$. Цей же результат ми отримуємо при безпосередньому обчисленні.

1. *Григоренко В. К.* Об асимптотическом разложении решений систем линейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1971. — 213 с.

2. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. — Киев: КСУ, 1996. — Ч.1. — 198 с.; 1997. — Ч.2. — 226 с.

Одержано 10.10.2002,
після доопрацювання — 12.06.2003