УДК 517.9

НЕАВТОНОМНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОСОБОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: boichuk@dad.imath.kiev.ua

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск, ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We study the problem of finding existence conditions and the construction of solutions of periodic weakly nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. We consider the particular critical case when the equation for generating amplitudes is satisfied identically. We give a new classification of the critical cases and an iterative algorithm for constructing solutions of periodic weakly nonlinear boundary-value problems in the particular critical case.

Досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків слабконелінійних періодичних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто особливий критичний випадок, коли рівняння для породжуючих амплітуд слабконелінійної періодичної крайової задачі перетворюється в тотожність. Побудовано нову класифікацію критичних випадків та ітераційний алгоритм для побудови розв'язків слабконелінійних періодичних крайових задач в особливому критичному випадку.

Целью данной работы является нахождение необходимых и достаточных условий существования, а также сходящихся итерационных процедур для построения решений слабонелинейных периодических краевых задач в особом критическом случае, когда известное уравнение для порождающих амплитуд [1 – 3] обращается в тождество. В этом случае традиционная схема анализа слабонелинейных критических периодических краевых задач [1, 3] неприменима, поскольку ключевые в исследовании таких задач матрицы B_0, $B_1, \ldots$ обращаются в нулевые. Тем не менее, учитывая слагаемые, составляющие второй полный дифференциал нелинейности дифференциального уравнения, удается получить уравнение для порождающих амплитуд слабонелинейной периодической краевой задачи в особом критическом случае, при наличии действительных корней которого искомое периодическое решение либо представляет собой положение равновесия этой системы, либо определяется посредством сходящейся итерационной процедуры.

1. Постановка задачи. Установим необходимые и достаточные условия существования, а также сходящиеся итерационные процедуры для построения решений

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(z_1(t,\varepsilon),\ \ldots\ ,\ z_n(t,\varepsilon)),$$

$$z_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T],\ z_j(t,\ \cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих однородному периодическому краевому условию

$$\ell\, z(\cdot,\ \varepsilon) = z(0,\ \varepsilon) - z(T,\ \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающихся в решения порождающей периодической краевой задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \tag{3}$$

$$\ell\, z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(T) = 0. \tag{4}$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ $(n{\times}n)$-мерная матрица, $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно дифференцируемая по первому аргументу в окрестности порождающего решения, непрерывная по второму аргументу на отрезке $[0,T]$ и дважды непрерывно дифференцируемая по третьему аргументу на отрезке $[0,\varepsilon_0]$, $f(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ n-мерная T-периодическая вектор-функция.

Будем исследовать критический случай

$$\operatorname{rank}(Q = \ell X(\cdot)) = n - r,\ r > 0,$$

когда порождающая краевая задача (3), (4) (при условии $P_{Q_r^*}\ \ell K\{f\}(\cdot) = 0$) имеет r-параметрическое семейство решений

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f](t),\ c_r \in R^r,$$

где $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n\times r)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-мерной матрицы-ортопроектора $P_Q : R^n \to N(Q)$, $P_{Q_r^*}$ — $(r\times n)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n\times n)$-мерной матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : R^n \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (3), $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши

$$K[f](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

для системы (3), $G[f](t)$ — обобщенный оператор Грина

$$G[f;\alpha](t) = K[f](t) - X(t)Q^+\ell K[f](\cdot)$$

краевой задачи (3), (4), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1].

Решение краевой задачи (1),(2)

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$$

будем искать в окрестности решения порождающей задачи. Для нахождения возмущения

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_1(t,\varepsilon),\ \ldots,\ x_n(t,\varepsilon)),$$

$$x_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad x_j(t,\ \cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) \equiv 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

порождающего решения $z_0(t,c_r)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell\, x(\cdot,\ \varepsilon) = x(0,\ \varepsilon) - x(T,\ \varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Как известно [1], задача (5), (6) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_r^*}\, \ell K\{Z(z_0 + x, s, \varepsilon)\}(\cdot) = 0. \tag{7}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z(z_0, t, 0) + dZ(z_0, t, 0) + \varepsilon R(z_0 + x, t, \varepsilon). \tag{8}$$

Дифференциал вектор-функции $Z(z,t,\varepsilon)$

$$dZ(z_0, t, 0) = A_1(t)x + \varepsilon A_2(t)$$

выражается через производные

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r)\\ \varepsilon\ =\ 0}},$$

$$A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r)\\ \varepsilon\ =\ 0}}.$$

Остаток $\varepsilon R(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестностях точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем два первых члена разложения, поэтому $R(z_0(t,c_r),t,0) \equiv 0$. Разложение (8) и равенство (7) приводят к необходимому условию существования искомого решения исходной задачи [2, 3]

$$F_0(c_r) = P_{Q_r^*}\, \ell K\{Z(z_0(s,c_r), s, 0)\}(\cdot) = 0.$$

Традиционно это условие используют для нахождения параметра $c_r^* \in R^r$, определяющего амплитуду порождающего решения, однако это возможно не всегда — в ряде случаев [2, 4] последнее равенство выполняется тождественно:

$$F_0(c_r) \equiv 0. \tag{9}$$

Краевые задачи (1), (2) при условии (9) по классификации И. Г. Малкина [2, с. 139] представляют *особый критический случай,* поскольку традиционная схема анализа и построения решения [1, 3] для таких задач не применима в силу невозможности нахождения параметра c_r^*, определяющего амплитуду порождающего решения, непосредственно из уравнения (9).

2. Необходимое условие существования решения. Преобразуем условие (7), предполагая, что имеет место особый критический случай:

$$P_{Q_r^*}\, \ell K\{A_1(s)x + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon R(z_0 + x, s, \varepsilon)\}(\cdot) = 0. \tag{10}$$

Используя представление решения задачи (5), (6)

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon)$$

посредством обобщенного оператора Грина [1, 3]

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0 + x, s, \varepsilon)\right](t),$$

преобразуем условие (10) к виду

$$P_{Q_r^*}\, \ell K\left\{A_1(s)\left[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s, \varepsilon)\right] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon R(z_0 + x, s, \varepsilon)\right\}(\cdot) = 0. \tag{11}$$

Поскольку в особом критическом случае равенство (9) выполняется тождественно, ключевая в традиционной [1, 3] схеме анализа и построения решений задачи (1), (2) матрица

$$B_0 = \left.\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\right|_{c_r = c_r^*} = P_{Q_r^*} \quad \ell K\left[A_1(s)X_r(s)\right](\cdot) \equiv 0.$$

Последнее тождество (второе отличие задачи (1), (2) в особом критическом случае от случая неособого) упрощает равенство (11):

$$P_{Q_r^*}\, \ell K\left\{A_1(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon R(z_0 + x, s, \varepsilon)\right\}(\cdot) = 0$$

и с учетом разложения (8)

$$P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G\left[Z(z_0, \tau, 0) + A_1(\tau)x + \varepsilon A_2(\tau) + \varepsilon R(z_0 + x, \tau, \varepsilon)\right](s) +$$

$$+ \; A_2(s) + R(z_0 + x, s, \varepsilon)\Big\}(\cdot) = 0$$

определяет необходимое условие [2] существования искомого решения исходной задачи

$$F_1(c_r) = P_{Q_r^*}\, \ell K \Big\{ A_1(s) G\left[Z(z_0(\tau, c_r), \tau, 0)\right](s) + A_2(s) \Big\}(\cdot) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 (*необходимое условие*). *Пусть краевая задача (1), (2) представляет особый критический случай и имеет решение*

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(z_1(t,\varepsilon),\ \ldots\ ,\ z_n(t,\varepsilon)),$$

$$z_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad z_j(t,\ \cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$ *с константой* $c_r^* \in R^r$. *Тогда вектор* c_r^* *удовлетворяет уравнению (12).*

Данная теорема доказана И. Г. Малкиным [2] в предположении аналитичности вектор-функции $Z(z,t,\varepsilon)$ по неизвестной z и малому параметру ε в окрестности $x = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Уравнение (12) относительно параметра c_r^*, определяющего амплитуду порождающего решения $z_0(s, c_r^*)$, по аналогии с неособым критическим случаем назовем *уравнением для порождающих амплитуд.*

3. Достаточное условие существования решения. Предположим далее, что уравнение (12) не вырождается в тождество [1] и вектор $c_r^* \in R^r$ является его решением.

Для получения достаточного условия существования и нахождения итерационной процедуры, применимой для построения решений исходной задачи в особом критическом случае, воспользуемся тем, что согласно предположению $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, дважды непрерывно дифференцируемая по первому аргументу в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r^*)$ и непрерывно дифференцируемая по третьему аргументу на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, и выделим из остатка $\varepsilon R(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ слагаемые, содержащие ε^2 и εx :

$$\varepsilon R(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \frac{1}{2} d^2 Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + \varepsilon^2 r(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где второй дифференциал

$$\frac{1}{2} d^2 Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) = \varepsilon A_3(t) x + \varepsilon A_4(t, x(t,\varepsilon)) x + \varepsilon^2 A_5(t)$$

выражается посредством $(n \times n)$-мерных матриц

$$A_3(t) = \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon\, =\, 0}}$$

[1] В противном случае искомый вектор c_r^* может быть найден с учетом членов разложения исходной нелинейности в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, входящих либо во второй дифференциал этой нелинейности, либо в дифференциалы более высокого порядка.

и

$$A_4(t,x(t,\varepsilon)) = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\Bigg|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon\,=\,0}},$$

а также n-мерного вектор-столбца

$$A_5(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon\,=\,0}}.$$

Остаток $\varepsilon^2 r(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения вектор-функции $Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε, чем компоненты первого дифференциала $dZ(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, поэтому $r(z_0(t,c_r^*),t,0)\equiv 0$.

Последнее разложение с учетом уравнения (12) для порождающих амплитуд приводит к необходимому условию существования искомого решения исходной задачи

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)G\left[A_1(\tau)x+\varepsilon A_2(\tau)+\varepsilon R(z_0+x,\tau,\varepsilon)\right](s)+$$

$$+\;A_3(s)x+A_4(s,x(s,\varepsilon))x+\varepsilon A_5(s)+\varepsilon r(z_0+x,s,\varepsilon)\Big\}(\cdot)=0. \tag{13}$$

Равенство $B_0\equiv 0$ приводит к тождеству

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\Big[A_4\Big(s,X_r(s)\tilde{c_r}\Big)X_r(s)\Big](\cdot)\equiv 0. \tag{14}$$

Последнее выражение упрощает равенство (13):

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)G\left[A_1(\tau)\Big[X_r(\tau)c_r+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big]+\varepsilon A_2(\tau)+\varepsilon R(z_0+x,\tau,\varepsilon)\right](s)+$$

$$+\;A_3(s)\Big[X_r(s)c_r+x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]+A_4(s,x^{(1)}(s,\varepsilon))\Big[X_r(s)c_r+x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\;\varepsilon A_5(s)+\varepsilon r(z_0+x,s,\varepsilon)\Big\}(\cdot)=0$$

и приводит к уравнению

$$\Xi_0\,c_r = -\,P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)G\left[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_2(\tau)+\varepsilon R(z_0+x,\tau,\varepsilon)\right](s)+$$

$$+\;A_3(s)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+A_4\Big(s,G\big(A_1(\tau)x+\varepsilon A_2(\tau)+\varepsilon R(z,\tau,\varepsilon)\big)(s)\Big)x+$$

$$+\;A_4\Big(s,G\big(Z(z_0,\tau,0)\big)(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon)+A_4(s,X_r(s)c_r)G(A_1(\tau)x+$$

$$+\;\varepsilon A_2(\tau)+\varepsilon R(z,\tau,\varepsilon)\big)(s)+\varepsilon A_5(s)+\varepsilon r(z_0+x,s,\varepsilon)\Big\}(\cdot),$$

однозначно разрешимому в случае невырожденности $(r \times r)$-мерной матрицы

$$\Xi_0 = P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G[A_1(\tau)X_r(\tau)](s) + A_4\Big(s, G(Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0))(s)\Big)X_r(s) +$$

$$+\ A_4(s, X_r(s))G\Big(Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0)\Big)(s) + A_3(s)X_r(s)\Big\}(\cdot).$$

Тождество

$$A_4\Big(s, G\big(Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0)\big)(s)\Big)X_r(s) \equiv A_4(s, X_r(s))G(Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0))(s),$$

в свою очередь, упрощает матрицу

$$\Xi_0 = P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G\Big[A_1(\tau)X_r(\tau)\Big](s) +$$

$$+\ 2A_4\Big(s, G(Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0))(s)\Big)X_r(s) + A_3(s)X_r(s)\Big\}(\cdot).$$

Таким образом, для построения искомого решения $z(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2), при $\varepsilon = 0$ обращающегося в порождающее $z_0(t,c_r^*)$ решение задачи (3), (4), при условии невырожденности матрицы Ξ_0 применима операторная система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_r(\varepsilon) = -\,\Xi_0^{-1}\, P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G\left[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) + \varepsilon R(z_0 + x,\tau,\varepsilon)\right](s) +$$

$$+\ A_3(s)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + A_4\Big(s, G\big(A_1(\tau)x + \varepsilon A_2(\tau) + \varepsilon R(z,\tau,\varepsilon)\big)(s)\Big)x +$$

$$+\ A_4\Big(s, G\big(Z(z_0,\tau,0)\big)(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + A_4(s, X_r(s)c_r)G(A_1(\tau)x +$$

$$+\ \varepsilon A_2(\tau) + \varepsilon R(z,\tau,\varepsilon))(s) + \varepsilon A_5(s) + \varepsilon r(z_0 + x, s, \varepsilon)\Big\}(\cdot), \tag{15}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\Big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_3(s)\Big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[s, X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon^2 A_5(s) + \varepsilon^2 r\Big(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon\Big)\Big\}(t),$$

разрешимость которой эквивалентна разрешимости задачи (1), (2).

Операторная система (15) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [1, 3].

Первое приближение

$$z_1(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon)$$

к искомому решению $z(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) определяет возмущение $x_1(t,\varepsilon)$, которое ищем как решение задачи

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0),$$

$$\ell\, x_1(\cdot,\ \varepsilon) = x_1(0,\ \varepsilon) - x_1(T,\ \varepsilon) = 0$$

в виде

$$x_1(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$$

посредством обобщенного оператора Грина

$$x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0)\right](t).$$

В силу тождества (9) первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ является T-периодическим независимо от значения неизвестного вектора $c_{r_1}(\varepsilon)$. Другими словами, на первом шаге итерационной процедуры вектор $c_{r_1}(\varepsilon)$ остается неизвестным.

Для нахождения второго приближения

$$z_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r^* + x_2(t,\varepsilon)$$

к искомому решению $z(t,\varepsilon)$ используем задачу второго приближения к задаче (5), (6):

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + \varepsilon\Big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1 + \varepsilon A_2(t)\Big\},$$

$$\ell\, x_2(\cdot,\ \varepsilon) = x_2(0,\ \varepsilon) - x_2(T,\ \varepsilon) = 0.$$

Здесь

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon\ =\ 0}},$$

$$A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon\ =\ 0}}.$$

В отличие от задачи первого приближения последняя задача составлена с учетом членов разложения нелинейности $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, линейных по x и ε.

Решение задачи второго приближения ищем в виде

$$x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_2}(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)x_1 + \varepsilon A_2(s)\Big](t).$$

Условие разрешимости задачи второго приближения в силу равенства (9)

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)\left[X_r(s)c_{r_1}(\varepsilon) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon)\right] + \varepsilon A_2(s)\Big\}(\cdot) = 0$$

с учетом тождества

$$B_0 = P_{Q_r^*}\,\ell K\left[A_1(s)X_r(s)\right](\cdot) \equiv 0$$

преобразуется к виду

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)x_2^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon R(z_0+x_2,s,\varepsilon)\Big\}(\cdot) =$$

$$= P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)G\left[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0)\right](s) + A_2(s)\Big\}(\cdot) = 0.$$

Таким образом, второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ является T-периодическим независимо от значения неизвестных векторов $c_{r_1}(\varepsilon),\ c_{r_2}(\varepsilon)$. Другими словами, и на втором шаге итерационной процедуры векторы $c_{r_1}(\varepsilon),\ c_{r_2}(\varepsilon)$ остаются неизвестными.

Для нахождения третьего приближения

$$z_3(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_3(t,\varepsilon)$$

к искомому решению $z(t,\varepsilon)$ используем задачу третьего приближения к задаче (5), (6):

$$\frac{dx_3}{dt} = A(t)x_3 + \varepsilon\Big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)\Big[X_r(t)c_{r_2} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(t) + \varepsilon A_3(t)\Big[X_r(t)c_{r_1} + x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[t, X_r(t)c_{r_1} + x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(t)c_{r_1} + x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] + \varepsilon^2 A_5(t)\Big\},$$

$$\ell\, x_3(\cdot,\ \varepsilon) = x_3(0,\ \varepsilon) - x_3(T,\ \varepsilon) = 0.$$

Решение задачи третьего приближения ищем в виде

$$x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_3}(\varepsilon) + x_3^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\Big[X_r(s)c_{r_2} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_3(s)\Big[X_r(s)c_{r_1} + x_1^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[s, X_r(s)c_{r_1} + x_1^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(s)c_{r_1} + x_1^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] + \varepsilon^2 A_5(s)\Big\}(t).$$

В отличие от задач первого и второго приближений последняя задача составлена с учетом членов разложения нелинейности $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, входящих во второй дифференциал данной нелинейности.

Условие разрешимости задачи третьего приближения с учетом тождества (9) и уравнения (12) для порождающих амплитуд, а также в силу невырожденности матрицы Ξ_0 приводит к уравнению относительно неизвестного вектора $c_{r_1}(\varepsilon) \in R^r$:

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -\,\Xi_0^{-1}\, P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0) + A_1(\tau)x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\Big](s) +$$

$$+\ A_3(s)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + A_4(s,x_1^{(1)}(s,\varepsilon))x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_5(s)\Big\}(\cdot).$$

Для нахождения четвертого приближения

$$z_4(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_4(t,\varepsilon)$$

к искомому решению $z(t,\varepsilon)$ используем задачу четвертого приближения к задаче (5), (6):

$$\frac{dx_4}{dt} = A(t)x_4 + \varepsilon\Big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)\Big[X_r(t)c_{r_3} + x_3^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(t) + \varepsilon A_3(t)\Big[X_r(t)c_{r_2} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[t, X_r(t)c_{r_2} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(t)c_{r_2} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon^2 A_5(t) + \varepsilon^2 r(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big\},$$

$$\ell\, x_4(\cdot,\ \varepsilon) = x_4(0,\ \varepsilon) - x_4(T,\ \varepsilon) = 0.$$

Решение задачи четвертого приближения ищем в виде

$$x_4(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_4}(\varepsilon) + x_4^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_4^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{ Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\Big[X_r(s)c_{r_3} + x_3^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_3(s)\Big[X_r(s)c_{r_2} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[s, X_r(s)c_{r_2} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(s)c_{r_2} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon^2 A_5(s) + \varepsilon^2 r(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}(t).$$

В отличие от задач первого, второго и третьего приближений последняя задача составлена с учетом остатка $\varepsilon^2 r(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения нелинейной вектор-функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$.

Условие разрешимости задачи четвертого приближения с учетом тождества (9) и уравнения (12) для порождающих амплитуд, а также в силу невырожденности матрицы Ξ_0 приводит к уравнению относительно неизвестного вектора $c_{r_1}(\varepsilon) \in R^r$:

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -\,\Xi_0^{-1}\, P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{ A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0) + A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\Big](s) +$$

$$+\ A_3(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + A_4(s,x_2^{(1)}(s,\varepsilon))x_2^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+\ \varepsilon A_5(s) + \varepsilon^2 r(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon),s,\varepsilon\Big\}(\cdot).$$

Таким образом, для построения решения $z(t,\varepsilon)$ операторной системы (15) при условии невырожденности матрицы Ξ_0 применима итерационная процедура

$$x_{k+3}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+3}}(\varepsilon) + x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{ Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\Big[X_r(s)c_{r_{k+2}} + x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_3(s)\Big[X_r(s)c_{r_{k+1}} + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon A_4\Big[s, X_r(s)c_{r_{k+1}} + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big[X_r(s)c_{r_{k+1}} + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+\ \varepsilon^2 A_5(s) + \varepsilon^2 r(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}(t), \qquad (16)$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -\,\Xi_0^{-1}\,P_{Q_r^*}\,\ell K\Big\{A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0) + A_1(\tau)x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)\Big](s) +$$

$$+\ A_3(s)x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) + A_4(s,x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon))x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+\ \varepsilon A_5(s) + \varepsilon^2 r(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}(\cdot),$$

$$k = 0,1,2,\ \ldots\ ,\ x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv 0.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (16), может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова, так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяющего итерационную процедуру (16).

Теорема 2 *(достаточное условие). Пусть выполнено условие существования*

$$P_{Q_r^*}\,\ell K\{f\}(\cdot) = 0$$

r-параметрического решения

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f](t),\ c_r \in R^r,$$

критической краевой задачи (3), (4), порождающей для задачи (1), (2), причем имеет место особый критический случай

$$F_0(c_r) \equiv 0.$$

Тогда для каждого корня $c_r^* \in R^r$ уравнения (12) при условии невырожденности $(r \times r)$-мерной матрицы Ξ_0 краевая задача (1), (2) имеет единственное решение

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(z_1(t,\varepsilon),\ldots\ ,\ z_n(t,\varepsilon)),$$

$$z_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T],\ z_j(t,\ \cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(s,c_r^*)$.

Для нахождения этого решения применима сходящаяся на отрезке $[0,\varepsilon_*]$ итерационная процедура (16).

Теоремы 1 и 2 являются естественным дополнением к традиционной [1, 3] классификации краевых задач, в частности периодических.

При условии $\mathrm{rank}(Q = \ell X(\cdot)) = n - r,\ r > 0$, краевые задачи называют критическими, в случае же $\det Q \neq 0$ — некритическими. В критическом случае, если выражение $F_0(c_r)$ не обращается в нуль тождественно, появляется возможность традиционного анализа неособых периодических краевых задач в зависимости от разрешимости или неразрешимости уравнения $F_0(c_r) = 0$, причем в первом случае либо имеет место критический случай первого, второго или более высокого порядка, либо искомое периодическое решение представляет собой положение равновесия исходной системы.

Если же в критическом случае выражение $F_0(c_r)$ обращается в тождественное равенство нулю, имеет место особый критический случай. При этом в качестве уравнения для порождающих амплитуд используется равенство (12) $(F_1(c_r) = 0)$. При наличии действительных корней уравнения (12) искомое периодическое решение системы (1) либо представляет собой положение равновесия этой системы, либо определяется согласно теореме 2. При условии вырожденности матрицы Ξ_0 решение поставленной задачи может быть найдено (по аналогии с критическим случаем второго порядка [1]) с учетом входящих в остаток $\varepsilon r(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ слагаемых, содержащих ε^3, $\varepsilon^2 x$, $\ldots$. Если же в особом критическом случае равенство $F_1(c_r) = 0$ обращается в тождество, искомый вектор c_r^* может быть найден с учетом членов разложения исходной нелинейности в окрестностях точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, входящих либо во второй дифференциал этой нелинейности, либо в дифференциалы более высокого порядка.

Ключевая в особом критическом случае матрица Ξ_0 получена в явном виде и совпадает с производной уравнения (12) для порождающих амплитуд, использованной И. Г. Малкиным [2] для доказательства последней теоремы. В подтверждение этого утверждения (по аналогии с неособым критическим случаем первого порядка [1, 3]) продифференцируем левую часть равенства (12):

$$\frac{\partial F_1(c_r^*)}{\partial c_r} = P_{Q_r^*}\, \ell K\Big\{A_1(s)G\left[Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0)\right](s) + A_2(s)\Big\}(\cdot) =$$

$$= P_{Q_r^*}\, \ell K \left\{ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z} G\big[Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0)\big](s)\right]\Bigg|_{\substack{z \,=\, z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon \,=\, 0}} \cdot X_r(s) + \right.$$

$$+ \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z \,=\, z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon \,=\, 0}} \cdot G\big[A_1(\tau)X_r(\tau)\big](s) +$$

$$\left. + \left.\frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\right|_{\substack{z \,=\, z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon \,=\, 0}} \cdot X_r(s) \right\} =$$

$$= P_{Q_r^*}\ell K\Big\{2A_4(s, G(Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0)(s))X_r(s) +$$

$$+ A_1(s)G\Big[A_1(\tau)X_r(\tau)\Big](s) +$$

$$+ A_3(s)X_r(s)\Big\}(\cdot).$$

Последнее выражение — это матрица

$$\Xi_0 = \frac{\partial F_1(c_r^*)}{\partial c_r},$$

следовательно (по аналогии с неособым критическим случаем первого порядка [1, 3]), невырожденность матрицы Ξ_0 эквивалентна простоте корня c_r^* уравнения (12) для порождающих амплитуд.

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
4. *Мерман Г. А.* Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла // Тр. Ин-та теорет. астрономии АН СССР. — 1952. — Вып. 1 — С. 5 – 86.

Получено 12.06.2003