УДК 513.83

ГОМОЛОГІЇ ПЕРЕТИНІВ ПСЕВДОМНОГОВИДІВ З ЛОКАЛЬНИМИ ГОМОТОПІЧНИМИ УМОВАМИ НА ЛІНКИ СТРАТ

Л. П. Плахта

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України
Україна, 79000, Львів, вул.Наукова, 3б
e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua

In terms of local homotopic properties of the links of strata of an n-dimensional PL-pseudomanifold X, we present a sufficient condition for the natural homomorphisms $IH_j^{\bar{0}}(X) \to IH_j^{\bar{p}}(X)$ of j-th intersection homology groups with perversity multi-indexes $\bar{0}$ and $\bar{p}$ to be isomorphisms for all $j \leq i$, where $i < n-3$.

У термінах локальних гомотопічних властивостей лінків страт n-вимірного PL-псевдомноговиду X отримано достатню умову того, що природні гомоморфізми $IH_j^{\bar{0}}(X) \to IH_j^{\bar{p}}(X)$ j-х груп гомологій перетину з мультиіндексами перекручення $\bar{0}$ і $\bar{p}$ є ізоморфізмами для всіх $j \leq i$, де $i < n-3$.

1. Вступ. Для вивчення многовидів з особливостями М. Горескі і Р. Мак-Ферсон визначили мовою кусково-лінійних ланцюгів (PL-ланцюгів) спеціальні гомології, так звані гомології перетинів, і дослідили їх властивості [1].

Якщо X — орієнтовний компактний многовид без краю виміру n, а $\bar{p} = (p_2, \ldots, p_n)$ — послідовність цілих чисел, причому $p_2 = 0$ і $p_j \leq p_{j+1} \leq p_j + 1$ при $j = 2, \ldots, n-1$, то для будь-якого $i \in \mathbf{Z}$ псевдомноговиду X ставиться у відповідність група $IH_i^{\bar{p}}(X)$, яка називається i-ю групою цілочислових гомологій перетинів (або IH-групою) псевдомноговиду X з мультиіндексом перекручення (спотворення) $\bar{p}$. Групою коефіцієнтів тут є кільце цілих чисел $\mathbf{Z}$. Нехай $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ — мінімальний мультиіндекс перекручення, а $\bar{t} = (0, 1, \ldots, n-2)$ — максимальний мультиіндекс. Для дослідження многовидів з особливостями гомології перетинів мають наступні переваги перед звичайними гомологіями (наприклад, симпліціальними). Для гомологій перетину побудовано операцію перетину $\bigcap$ [1]:

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \longrightarrow IH_{i+j-n}^{\bar{r}}(X),$$

де $\bar{r} = \bar{p} + \bar{q}$.

Нехай $\varepsilon\colon IH_0^{\bar{t}}(X) \to \mathbf{Z}$ — „аугментація", причому $i+j = n$ і $\bar{p}+\bar{q} = \bar{t}$. Тоді аугментоване спарювання

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \longrightarrow IH_0^{\bar{t}}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

є невиродженим, якщо всі групи тензорно помножені на $\mathbf{Q}$ [1]. Отже, для гомологій перетину виконується дуальність Пуанкаре в узагальненому вигляді, хоча форма перетину

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \longrightarrow IH_0^{\bar{t}}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

не є унімодулярною [1, 2].

Зауважимо, що гомології перетину визначаються і для некомпактних псевдомноговидів, псевдомноговидів з краєм, і не обов'язково орієнтовних [2, 3], а у випадку, коли X — компактний многовид, всі групи $IH_i^{\bar{p}}(X)$ збігаються з $H_i(X)$. Крім того, за групу коефіцієнтів можна взяти будь-яке кільце з одиницею G. Відомо [1], що для гомологічних многовидів X для довільного i всі i-групи гомологій перетинів $IH_i^{\bar{p}}(X)$ ізоморфні. У даній роботі знайдено достатню умову того, що канонічні гомоморфізми $IH_j^{\bar{0}}(X) \to IH_j^{\bar{p}}(X)$ є ізоморфізмами для всіх $j \le i$, де X — псевдомноговид виміру n і $i < n-3$. Дана умова має локальний характер і формулюється в термінах i-зв'язності многовидів $N_k \setminus \Sigma_{n-k-1}$, де N_k — k-лінк страти $X_{n-k} - X_{n-k-1}$ псевдомноговиду X.

Групи гомологій перетинів (або, по-іншому, IH-групи) визначаються, виходячи з деякої (фіксованої) стратифікації псевдомноговиду X, хоча і не залежать від її вибору [1]. IH-групи є топологічно інваріантними, але не є гомотопічно інваріантними [1], що цілком природно, оскільки гомотопія може сильно змінити структуру сингулярностей псевдомноговиду.

Якщо орієнтовний компактний псевдомноговид M без краю допускає стратифікацію зі стратами парного ковиміру, то для нього можна ввести поняття сигнатури $\sigma(M)$, яка є інваріантом кобордизму [1]. Для дослідження гомологій перетину достатньо ефективним є спосіб еквівалентного їх означення мовою жмутків [1, 3, 4].

2. IH-групи псевдомноговидів з локальними гомотопічними умовами на страти. Перш ніж сформулювати основні результати даної праці, введемо необхідні означення з теорії гомологій перетинів. Детальніше про основи теорії гомологій перетину див. [1].

Означення 1. *Псевдомноговидом виміру n називається компактний поліедр X, для якого існує підполіедр $\Sigma, \dim(\Sigma) \le n-2$, такий, що $X \setminus \Sigma$ є n-вимірним орієнтовним многовидом, який є скрізь щільним у X.*

Стратифікацією n-вимірного псевдомноговиду X називається фільтрація X замкненими підполіедрами

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} = \Sigma \supset X_{n-3} \ldots \supset X_1 \supset X_0$$

така, що для кожної точки $p \in X_i \setminus X_{i-1}$ існує фільтрований поліедр

$$V = V_n \supset V_{n-1} \ldots \supset V_i = \{\text{точка}\},$$

і PL-відображення $h\colon V \times B^i \to X$, яке для кожного j відображає $V_j \times B^i$ PL-гомеоморфно на (замкнений) окіл точки p в X_j, причому $h(\{\text{точка}\}, u) = p$, де u — деяка внутрішня точка i-вимірного PL-диска B^i. Таким чином, якщо $X_i \setminus X_{i-1} \neq \emptyset$, то підпростір $X_i \setminus X_{i-1}$ є i-вимірним многовидом, який називається i-ю стратою даної стратифікації. Надалі будемо вважати, що X є n-вимірним псевдомноговидом з фіксованою стратифікацією.

Нехай K — триангуляція X. Позначимо через C_*^K ланцюговий комплекс симпліціальних ланцюгів в X відносно K. Геометричним PL-ланцюгом називається довільний ланцюг з C_*^K для деякої триангуляції K. Два геометричні PL-ланцюги $\xi_1 \in C_*^{K_1}$ і $\xi_2 \in C_*^{K_2}$ ототожнюються, якщо їхні канонічні образи в C_*^K збігаються для деякого спільного подрібнення K триангуляцій K_1 і K_2. Позначимо через $C_i(X)$ групу всіх геометричних PL-ланцюгів в X, яка є прямою границею груп C_i^K відносно подрібнень, за всіма триангуляціями псевдомноговиду X. Нехай C і D — відповідно i- і $(i-1)$-вимірні підполіедри в X такі, що $D \subset C$. Позначимо через $\partial_*\colon H_i(C, D) \to H_{i-1}(D)$ зв'язуючий гомоморфізм.

Мультиіндексом (перекручення) називається послідовність $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots, p_n)$ цілих чисел така, що $p_2 = 0$ і $p_{k+1} = p_k$ або $p_{k+1} = p_k + 1$.

Означення 2. *Нехай i — ціле число і $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots, p_n)$ — мультиіндекс (перекручення). Підпростір $Y \subset X$ називається $(\bar{p}, i)$-допустимим, якщо $\dim(Y) \leq i$ і $\dim(Y \cap \cap X_{n-k}) \leq i - k + p_k$ для всіх $k \geq 2$.*

Покладемо $IC_i^{\bar{p}} = \{\xi \in C_i(X) \mid |\xi|$ — $(\bar{p}, i)$-допустимий підпростір в X і $|\partial\xi|$ – $(\bar{p}, i-1)$-допустиме в $X\}$.

Означення 3. *Будемо називати i-ту групу гомологій ланцюгового комплексу $IC_*^{\bar{p}}(X)$ i-ю IH-групою (або i-ю групою гомологій перетинів) з мультиіндексом $\bar{p}$ і позначати $IC_i^{\bar{p}}(X)$.*

Якщо X не містить страт ковиміру k (тобто $X_{n-k} = X_{n-k-1}$), то виконується рівність $IH_*^{\bar{p}}(X) = IH_*^{\bar{q}}(X)$ для всіх $\bar{p}, \bar{q}$ таких, що $p_c = q_c$ при $c \neq k$ [1].

При $i = 0, n$ маємо $IH_0^{\bar{p}}(X) = H_0(X \setminus \Sigma), IH_n^{\bar{p}} = H_n(X)$. Якщо X — многовид, то X допускає стратифікацію з однією стратою X і тоді $IH_i^{\bar{p}}(X) = H_i(X)$. Хоча гомології перетину визначаються для деякої фіксованої стратифікації псевдомноговиду X, насправді вони не залежать від її вибору [1]. Тому надалі будемо користуватись тільки внутрішньою стратифікацією псевдомноговидів.

Означення 4. *Орієнтовний псевдомноговид X виміру n називається нормальним, якщо $H_n(X, X \setminus x) = \mathbf{Z}$ для всіх $x \in X$.*

Для гомологій і когомологій нормальних псевдомноговидів X мають місце канонічні ізоморфізми [1] $H^i(X) \cong IH_{n-i}^{\bar{0}}(X)$ і $H_i(X) \cong IH_i^{\bar{t}}(X)$. Таким чином, якщо в нормальному псевдомноговиді X всі i-групи $IH_i^{\bar{p}}(X)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ізоморфні (для будь-яких мультиіндексів $\bar{p}$), то X — простір, в якому виконується дуальність Пуанкаре.

Твердження 1. *Нехай B^n — n-вимірний PL-диск, s^m — m-симплекс, $B^n * s^m$ — їх з'єднання, u — барицентр симплекса s^m, а v — внутрішня точка PL-диска $B^n * s^m$. Тоді існує сильна деформаційна ретракція $R_t\colon B^n * s^m \to T$ PL-диска $B^n * s^m$ на деякий підполіедр T така, що $R_1(u) = v$ і $\{v\} \cup B^n * \partial s^m \subset T$.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, что B^n — n-симплекс t в $\mathbf{R}^{n+1}$, $B^n * s^m$ — $(n+m+1)$-симплекс p в $\mathbf{R}^{n+m+1}$ з взаємно доповнювальними гранями s і t, а точка v — барицентр симплекса p. Нехай K' — зіркове подрібнення комплексу ∂p в точці u, а K_1 — зіркове подрібнення кліткового комплексу $K' \cup \{p\}$ в точці v [5]. Тоді K_1 і K' — симпліціальні підрозбиття комплексу $\tilde{p} = \{q | q \preceq p\}$. Якщо $V = \{x_0, \ldots, x_{n+m+1}\}$ — множина вершин симплекса p, то $W = V \cup \{u, v\}$ є множиною вершин комплексу K_1.

Нехай L — підкомплекс комплексу $K_1 \times I$, натягнутий на множину вершин $V \cup \{v\}$. Розглянемо клітковий комплекс $K_1 \times I$ з множиною вершин $W \times \{0, 1\}$. Очевидно, що комплекс $K_1 \times I$ допускає триангуляцію M, що задовольняє таку умову:

множиною вершин триангуляції M є $W \times \{0, 1\}$.

Задамо відображення $\rho\colon W \times \{0, 1\} \to W$ таким чином: $\rho(a, t) = a$, якщо $t = 0$; $\rho(a, t) = a$, якщо $t = 1$ і $a \neq u$; $\rho(a, t) = v$, якщо $t = 1$ і $a = u$.

Відображення ρ однозначно поширюється до деякого симпліціального відображення $R\colon M \to K_1$. Оскільки $|M| \cong |K_1| \times I$, $R(x, \{0\}) = x$ для всіх $x \in |K_1|$ і $R(|K_1| \times I) \subset \subset |K_1|$, то відображення R можна розглядати як деформаційну ретракцію R_t поліедра

$|p| = |K_1|$ на підполіедр $R_1(|K_1|)$. Маємо $R_1(|p|) = |L|$, отже, R_t є шуканою деформаційною ретракцією поліедра $|p|$ на підполіедр $T = |L|$.

Нагадаємо, що пара просторів (не обов'язково поліедрів) (M, U) називається p-зв'язною, $p \geq 0$, якщо $\pi(M, U) = 0$ для всіх $i \leq p$. Тепер сформулюємо необхідне для подальшого викладу твердження.

Теорема Столлінгса про поглинання [6]. *Нехай M^n — зв'язний кусково-лінійний многовид (PL-многовид) без краю, U — відкрита множина в M^n, K — скінченний комплекс в M^n виміру не більше, ніж $n-3$, L — підкомплекс комплексу K, що міститься в U і такий, що $\mathrm{Cl}(|K| \setminus |L|)$ є r-вимірним поліедром. Припустимо також, що пара (M, U) — r-зв'язна. Тоді існують компактна множина $E \subset M^n$ і об'ємна ізотопія E_t многовиду M^n такі, що $|K| \subset e_1(U)$ і $e_t|_{(M^n \setminus E) \cup |L|} = \mathrm{id}_{(M^n \setminus E) \cup |L|}$.*

Зауваження 1. Нехай M — r-зв'язний многовид (можливо, з краєм), V — замкнений PL-диск в $\mathrm{Int} M$. Запишемо точну гомотопічну послідовність для пари (M, U), де $U = \mathrm{Int}\, V$:

$$\ldots \to \pi_m(U) \to \pi_m(M) \to \pi_m(M, U) \to \ldots \to \pi_1(U) \to \pi_1(M) \to \pi_1(M, U). \qquad (1)$$

Оскільки U — стягуване і $\pi_m(M) = 0$ при $1 \leq m \leq r$, з точної послідовності (1) одержимо $\pi_r(M, U) = \pi_{r-1}(M, U) = \ldots = \pi_1(M, U) = \pi_0(M, U) = \{e\}$, тобто пара (M, U) є r-зв'язною, так само як і пара $(\mathrm{Int}\, M, U)$.

Означення 5. *Нехай K — симпліціальний комплекс, L — його підкомплекс. L називається повним в K, якщо існує таке симпліціальне відображення $f\colon K \to L$, що $L = f^{-1}(0)$.*

Далі, якщо X — псевдомноговид, то через Σ_X будемо позначати його сингулярну частину, тобто елемент фільтрації X_{n-2} внутрішньої стратифікації X.

Твердження 2. *Нехай X — n-вимірний псевдомноговид, ξ — $(\bar{p}, i)$-допустимий цикл, де $i < n-3$ і (K, L, N) — така тріангуляція трійки поліедрів $(X, |\xi|, \Sigma_X)$, що L і N — повні підкомплекси в K, а $S = \{s_1, \ldots, s_q\}$ — множина всіх симплексів із $L \cap N$, що задовольняють умову*

$$\exists k \geq 2 : \dim(s_j \cap X_{n-k}) > i - k,$$

і $S_j = |\mathrm{lk}(s_j, K)|, j = 1, \ldots, q$. Якщо для довільного $s_j \in S$ многовид $S_j \setminus \Sigma_{S_j}$ — $(i - s_j - 1)$-зв'язний, то в X існують такі $(\bar{p}, i+1)$-допустимий ланцюг ζ і $(\bar{0}, i)$-допустимий цикл η, що $\partial\zeta = \xi - \eta$.

Доведення. Припустимо, що симплекси з S занумеровані в послідовність $s_1, \ldots, s_q$ в порядку незростання їх вимірів і $s_1, \ldots, s_k$ — симплекси максимального виміру $m, k \leq q$. Розглянемо симпліціальний комплекс $\mathrm{lk}(s_1, K)$. Оскільки s_1 має максимальний вимір в S, а L і N — повні підкомплекси в K, то $|\xi| \cap |\mathrm{lk}(s_1, K)| \subset S_1 \setminus \Sigma_{S_1}$ і $|\xi| \cap |\mathrm{st}(s_1, K)| = (|\xi| \cap S_1) * s_1$. З умови твердження випливає, що многовид $S_1 \setminus \Sigma_{S_1}$ — $(i - m - 1)$-зв'язний. Із зауваження 1 і теореми Столлінгса про поглинання випливає, що поліедр $|\xi| \cap S_1$ міститься в деякому $(n-m-1)$-вимірному PL-диску B^{n-m-1}, $B^{i-m-1} \subset S_1 \setminus \Sigma_{S_1}$, і тому $|\xi| \cap |\mathrm{st}(s_1, K)| \subset B^{n-m-1} * s_1$. Нехай $R_t\colon (B^{n-m-1} * s_1) \times I \to T$ — деформаційна ретракція поліедрів, обумовлена твердженням 1. Маємо $R_1((S_1 \cap |\xi|) * s_1) \cap s_1 = \partial s_1$. Оскільки R_t залишає точки з $B^{n-m-1} * \partial s_1$ нерухомими, то R_t також залишає нерухомими точки з $(S_1 \cap |\xi|) * \partial s_1$.

Покладемо $P_t(x) = x$, якщо $x \in |\xi| \setminus |\xi| \cap |\mathrm{st}(s_1, K)|$, і $P_t(x) = R_t(x)$, якщо $x \in |\xi| \cap$ $\cap |\mathrm{st}(s_1, K)|$.

Нехай $\xi \times [0,1] \in C_{i+1}(X \times I)$ — геометричний PL-ланцюг з орієнтацією добутку $X \times I$, а $P_*(\xi \times I)$ — $(i+1)$-вимірний геометричний PL-ланцюг в X, який є образом ланцюга $\xi \times I$ при ланцюговому відображенні P_*, індукованому PL-відображенням $P\colon |\xi| \times I \to$ $\to X$. Носієм $(\bar{p}, i+1)$-допустимого ланцюга $P_*(\xi \times I)$ є поліедр $P(|\xi| \times I)$. Оскільки ξ — цикл, то маємо $\partial P_*(\xi \times I) = P_* \partial(\xi \times I) = P_*(\partial \xi \times I) + (-1)^i P_{1*}(\xi) - (-1)^i P_{0*}(\xi) =$ $= (-1)^i (P_{1*}(\xi) - P_{0*}(\xi))$, так що цикли $\xi_1 = P_{1*}(\xi)$ і ξ — гомологічні. Крім цього, цикл ξ_1 — $(\bar{p}, i)$-допустимий і $|\xi_1| \cap \Sigma_X = |\xi| \cap \Sigma_X \setminus \mathrm{Int}\, s_1$.

Подрібнимо комплекс до такого комплексу K_1, щоб виконувались такі умови:

1) на $|\xi_1| \cap \Sigma$ триангуляція K_1 збігається з триангуляцією, індукованою K;

2) комплекс K_1 індукує на $|\xi_1|$ триангуляцію, повну в K_1.

Існування такого K_1 випливає з властивостей деформаційної ретракції R, описаної при доведенні твердження 1. Далі до PL-ланцюга ξ_1 застосовується індуктивний процес деформації в порядку, заданому нумерацією симплексів з S. Перебираючи таким чином всі симплекси $s_1, \ldots, s_q$ і деформуючи цикл ξ_j на кожному $(j+1)$-му кроці в $|\mathrm{st}(s_{j+1}, K_j)|$, де K_j — відповідне симпліціальне подрібнення комплексу K_{j-1}, отримаємо таку послідовність $(\bar{p}, i)$-допустимих геометричних PL-циклів $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ і таку послідовність $(\bar{p}, i+$ $+1)$-допустимих геометричних PL-ланцюгів $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q$, що $\xi_i - \xi_{j-1} = \partial \zeta_j$ і

$$|\xi_j| \cap \Sigma_X = |\xi| \cap \Sigma_X \setminus (\mathrm{Int}\, s_1 \cup \ldots \cup \mathrm{Int}\, s_j).$$

Задана таким чином деформація ланцюга на кожному (попередньому) j-му кроці в $|\mathrm{st}(s_j, K_{j-1})|$, де $\dim s_1 \geq \dim s_2 \geq \ldots \geq \dim s_q$, а також умови теореми забезпечують коректність деформації ланцюга на наступному $(j+1)$-кроці. Далі покладемо $\eta = \xi_q$. Маємо $\xi_q - \xi = \partial(\zeta_1 + \ldots + \zeta_q)$, де $\zeta_1 + \ldots + \zeta_q$ — $(\bar{p}, i+1)$-допустимий ланцюг і $|\eta| \cap \Sigma_X =$ $= |\xi| \cap \Sigma_X \setminus (\mathrm{Int}\, s_1 \cup \ldots \cup \mathrm{Int}\, s_q)$, так що η — $(\bar{0}, i)$-допустимий цикл.

Твердження 3. *Нехай X — n-вимірний псевдомноговид, ξ — $(\bar{0}, i)$-допустимий цикл, $i < n-2, \zeta$ — $(\bar{p}, i+1)$-допустимий ланцюг такий, що $\partial \zeta = \xi, (K, L, M, N)$ — така триангуляція четвірки $(X, \Sigma_X, |\zeta|, |\xi|)$, що L, M і N — повні підкомплекси в K, а $S =$ $= \{s_1, \ldots, s_q\}$ — множина симплексів з $L \cap M$, що задовольняють умову*

$$\exists k \geq 2 : \dim(s_j \cap X_{n-k}) > i - k.$$

Якщо для довільного $s_j \in S$ многовид $|\mathrm{lk}(s_j, K)| \setminus \Sigma_{s_j}$ — $(i - \dim s_j)$-зв'язний, де Σ_{s_j} — сингулярна частина псевдомноговиду $|\mathrm{lk}(s_j, K)|$, то в X існує такий $(\bar{0}, i+1)$-допустимий ланцюг ζ_1, що $\partial \zeta_1 = \xi$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що жоден симплекс комплексу N не міститься в S. Далі, ланцюг ζ послідовно піддається деформації в $|\mathrm{st}(s_1, K)|, |\mathrm{st}(s_2, K_1)|, \ldots |\mathrm{st}(s_q, K_{q-1})|$ в порядку, що задається нумерацією симплексів $s_1, \ldots, s_q$, де $\dim s_1 \geq \ldots \geq \dim s_q$. З рівності $N \cap S = \emptyset$ і з властивостей деформаційної ретракції R (твердження 1) випливає, що на кожному кроці j деформація R_j ланцюга ζ_j з носієм $|\mathrm{st}(s_j, K_{j-1})|$ залишає точки з $|\xi|$

нерухомими. Зрозуміло, що одержаний в результаті застосування послідовності деформацій до $|\zeta|$ PL-ланцюг ζ_q є $(\bar{0}, i+1)$-допустимим і задовольняє умову $\partial\zeta_q = \partial\zeta = \xi$.

Нехай s — m-вимірний симплекс з деякої фіксованої триангуляції K псевдомноговиду X і $\operatorname{Int} s \subset X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$, тобто $\operatorname{Int} s$ містяться в страті ковиміру k. Покладемо $T = |\mathrm{lk}(s, K)|$. Розглянемо тепер більш детально умову про те, що многовид $T \setminus \Sigma_T$ — r-звязний. Виберемо в $\operatorname{Int} s$ довільну точку x. Тоді маємо $P = |\mathrm{lk}(x, X)| \cong S^{n-k-1} * N_k$, де псевдомноговид N_k — надбудовно нерозкладний, тобто N_k не допускає зображення $N_k \cong S^r * N'_k$, де $r \geq 0$. Далі отримуємо $\Sigma_P \cong S^{n-k-1} * \Sigma_{N_k}$ і $P \setminus \Sigma_P = S^{n-k-1} * N_k \setminus S^{n-k-1} * \Sigma_{N_k} \cong N_k \setminus \Sigma_{N_k}$. Аналогічно, виконуються співвідношення $T = S^{n-k-m-1} * N_k$ і $T \setminus \Sigma_T \cong S^{n-k-m-1} * N_k \setminus S^{n-k-m-1} * N_k \cong N_k \setminus \Sigma_{N_k}$. Таким чином, умова „многовид $(T \setminus \Sigma_T)$ — r-зв'язний" не залежить від виміру симплекса s, для якого виконується умова $\operatorname{Int} s \subset X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$, і еквівалентна умові: многовид $(N_k \setminus \Sigma_{N_k})$ — r-зв'язний. Зауважимо, що N_k залежить (з точністю до PL-гомеоморфізму) тільки від компоненти зв'язності страти $X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$.

Назвемо N_k k-лінком страти $X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$. Таким чином, у кожної страти $X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ є рівно стільки k-лінків, скільки в ній є компонент зв'язності.

Наслідок 1. *Якщо у псевдомноговиді X виміру n для всіх k-лінків страт $N_k, k = 2, \ldots, n$, виконується умова $\pi_j(N_k \setminus \Sigma_{N_k}) = 0$ для всіх $j \leq i$, де $i < n-3$, то канонічні гомоморфізми $IH_j^{\bar{0}}(X) \to IH_j^{\bar{p}}(X)$ є ізоморфізмами для всіх $j \leq i$.*

Приклад 1. Нехай $\xi(S^p)$ — векторне розшарування над сферою S^p з шаром $\mathbf{R}^{p+1}$, $T(\xi)$ — простір Тома цього розшарування і ΣT — надбудова над ним. Тоді для псевдомноговиду ΣT виміру $2p+2$ виконуються умови наслідку 1 для $i = p-1$ і тому $IH_j^{\bar{0}}(X) \to IH_j^{\bar{p}}(X)$ є ізоморфізмом для всіх $j \leq p-1$.

Зауваження 2. Умови $i < n-3$ і $i < n-2$ в твердженнях відповідно 2 і 3 є суттєвими, оскільки теорема Столлінгса про поглинання виконується при умові $r \leq n-3$, де n — вимір многовиду, а r — вимір його підполіедра, що поглинається диском.

Зауваження 3. Твердження 2 і 3 сформульовано для $(\bar{p}, i)$-допустимих ланцюгів з коефіцієнтами в кільці **Z**. Проте метод доведення цих тверджень не залежить від вибору кільця коефіцієнтів, над яким розглядаються геометричні PL-ланцюги ξ і ζ. Тому справедливим є наступне твердження.

Твердження 4. *Якщо у псевдомноговиді X виміру n для всіх лінків N_k страт $X_{n-k} - X_{n-k-1}$ многовид $N_k \setminus \Sigma_{N_k}$ — i-зв'язний, де $i < n-3$, то природні гомоморфізми $IH_j^{\bar{0}}(X, R) \to IH_j^{\bar{p}}(X, R)$ є ізоморфізмами для всіх $j \leq i$, де R — довільне кільце з одиницею.*

Якщо R — поле і псевдомноговид X — R-орієнтовний, то виконуються ізоморфізми [2]

$$IH_i^{\bar{p}}(X, R) \simeq \mathrm{Hom}(IH_{n-i}^{\bar{q}}(X, R), R),$$

де $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$.

Наслідок 2. *Нехай R — поле. Тоді за умов твердження 4 природні гомоморфізми $IH_j^{\bar{0}}(X, R) \to IH_j^{\bar{p}}(X, R)$ є ізоморфізмами для всіх $j \leq i$ і $j \geq n-i$.*

Зауважимо, що коли псевдомноговид X виміру n є орієнтовним, умови на i-зв'язність лінків страт, де $i \geq 0$, автоматично включають в себе умову нормальності цього псевдомноговиду.

1. *Goresky M., MacPherson R.* Intersection homology theory // Topology. — 1980. — **19**. — P. 135 – 162.
2. *Haefliger A.* Introduction to piecewise-linear intersection homology // Seminar Intersection Homology (Bern). — 1984. — P. 1 – 22.
3. *Goresky M., MacPherson R.* Intersection homology theory II // Invent. math. — 1983. — **71**. — P. 77 – 129.
4. *Borel A.* Sheaf theoretic intersection cohomology // Seminar Intersection Homology (Bern). — 1984. — P. 47 – 182.
5. *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно-линейную топологию. — М.: Мир, 1974. — 208 с.
6. *Rushing T.B.* Topological embeddings // Pure and Appl. Math. — New York; London: Acad. Press, 1973. — **52**. — 268 p.

Одержано 31.07.2003