УДК 517.91

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У РЕЗОНАНСНОМУ ВИПАДКУ

Т.В. Горбачук

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 64

For a periodic system of impulsive differential equations we established conditions for which isolated balance position of corresponding averaged system, generates disconnected limiting cycle in the resonance case.

Для однієї періодичної системи з імпульсним збуренням у резонансному випадку встановлено умови, за яких ізольоване положення рівноваги відповідної усередненої системи породжує при малих ε періодичний розв'язок вихідної системи.

Нехай система з одним ступенем вільності описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega y + \varepsilon f(\nu t, x, y) y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x + \varepsilon g(\nu t, x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

коли $y \neq 0$, і піддається імпульсному збуренню кожен раз при проходженні фазовою точкою (x, y) положення $y = 0$. Будемо вважати, що в момент дії миттєвого імпульсу зміна кількості руху в системі задається виразом

$$\Delta y\,|_{y=0} = \varepsilon I\,(x), \tag{2}$$

де ε — малий параметр.

Дослідимо траєкторії, що описуються точкою, яка рухається за законом (1), (2) за умови, що функції $f(\nu t, x, y)$, $g(\nu t, x, y)$ — періодичні по νt з періодом 2π і $\omega \simeq \nu$. Для розв'язання систем, в яких доводиться враховувати дію миттєвих сил, як показано в [1 – 4], можна успішно застосовувати асимптотичний метод Крилова – Боголюбова. Зокрема, в роботі [4] на системи вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad \text{коли } x \neq x_0,$$

$$\Delta \frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} \varepsilon I(\dot{x}_-), & \text{коли } x = x_0, \ \dot{x}_- \geq 0; \\ 0, & \text{коли } x = x_0, \ \dot{x}_- < 0, \end{cases}$$

у резонансному випадку перенесена одна з теорем М.М. Боголюбова по обґрунтуванню методу усереднення. В роботі [5] за допомогою численно-аналітичного методу А.М. Самойленка встановлено умови існування розривних граничних циклів для автономних систем, подібних до систем (1), (2).

В даній роботі для 2π-періодичної по νt системи (1), (2) у резонансному випадку доводиться, що ізольоване положення рівноваги усередненої системи, яка відповідає системі (1), (2), породжує при малих ε періодичний розв'язок вихідної системи. Справедливе таке твердження.

Теорема. *Нехай функції $f(\nu t, x, y)y$, $g(\nu t, x, y)$, $I(x)$, що характеризують систему*

$$\frac{dx}{dt} = \omega y + \varepsilon f(\nu t, x, y)y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -\omega x + \varepsilon g(\nu t, x, y), \quad \textit{коли} \;\; y \neq 0,$$
$$\Delta y\,\big|_{y=0} = \varepsilon I(x),$$

визначені, неперервні, періодичні по νt з періодом 2π і задовольняють умову Ліпшіца відносно x, y для t, x, y з області

$$-\infty < t < \infty, \qquad \alpha^2 \leq x^2 + \frac{y^2}{\omega^2} \leq \beta^2,$$

де α, β — деякі сталі, $\beta > \alpha > 0$. Припустимо, що система

$$\begin{aligned} &A(a,\theta) = 0, \\ &B(a,\theta) + \overline{\Delta} a + \frac{\nu}{2\pi}\Big(I(a) - I(-a)\Big) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$A(a,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f(\theta-\varphi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + \\ + g(\theta-\varphi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)\Big]\sin\varphi d\varphi,$$

$$B(a,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[g(\theta-\varphi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - \\ - f(\theta-\varphi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi\Big]\,d\varphi,$$

$$\omega = \nu + \varepsilon\overline{\Delta}\,,$$

має ізольований розв'язок $a = a^0$, $\theta = \theta^0$, який знаходиться у смузі $\alpha \leq a^0 \leq \beta$ разом з деяким своїм ρ-околом, і такий, що індекс відображення, визначеного лівими частинами рівнянь (3), в точці (a^0, θ^0) не дорівнює нулю.

Тоді можна знайти таке $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ система (1), (2) має періодичний з періодом 2π відносно νt розв'язок, для якого

$$\left|a(t) - a^0\right| + \left|\theta(t) - \theta^0\right| \leq \eta(\varepsilon),$$

де $\eta(\varepsilon) \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Нехай (1), (2) має періодичний з періодом 2π відносно νt розв'язок

$$x = x\,(t),$$

$$y = y\,(t),$$

який при $t = t_0$ набуває значень $x(t_0) = x_0,\;\; y(t_0 - 0) = 0,\;\; x_0 > 0$, де t_0 підлягає визначенню. Моменти t_k імпульсного впливу такого розв'язку визначаються співвідношеннями

$$\nu t_k = \nu t_0 + 2k\pi, \quad \nu t_k = \nu t_0 + \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а стрибки в ці моменти визначаються рівністю

$$\Delta y = \varepsilon I(x) = \begin{cases} \varepsilon I_+ & \text{при} \quad x > 0; \\ \varepsilon I_- & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Внаслідок періодичності розв'язку системи I_+, I_- — сталі для всіх t_k.

Таким чином, періодичний розв'язок (1), (2) задовольняє систему

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega y + \varepsilon f(\nu t, x, y) y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x + \varepsilon g(\nu t, x, y) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \nu t \neq \nu t_0 + k\pi, \\ &\Delta y = \varepsilon I_+ \qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad \nu t = \nu t_0 + 2k\pi, \\ &\Delta y = \varepsilon I_- \qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad \nu t = \nu t_0 + \pi + 2k\pi, \end{aligned} \tag{4}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$.

З іншого боку, нехай система (4) має для деяких t_0, I_+, I_- періодичний з періодом 2π відносно νt розв'язок

$$x = x\,(t),$$

$$y = y\,(t).$$

Очевидно, що цей розв'язок є розв'язком вихідної системи (1), (2), якщо

$$\begin{aligned} &y(t_0 - 0) = 0, && y\left(t_0 + \frac{\pi}{\nu} - 0\right) = 0, \\ &I_+ = I(x_+), && I_- = I(x_-), \\ &x_+ = x(t_0) > 0, && x_- = x\left(t_0 + \frac{\pi}{\nu}\right) < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, відшукання періодичних розв'язків системи (1), (2) зводиться до відшукання періодичних розв'язків системи (4) періоду 2π відносно νt і підбору параметрів t_0, I_+, I_- для цих розв'язків, щоб вони задовольняли співвідношення (5). Оскільки $\nu \simeq \omega$, можна подати ν у вигляді $\nu = \omega + \varepsilon\overline{\Delta}$, де $\overline{\Delta}$ — параметр, який треба визначити.

Систему (4) перепишемо так:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \nu y + \varepsilon f(\nu t, x, y)y - \varepsilon\overline{\Delta}y \\
&\frac{dy}{dt} = -\nu x + \varepsilon g(\nu t, x, y) + \varepsilon\overline{\Delta}x
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \nu(t-t_0) \neq k\pi,
$$
$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta y\,|_{\nu(t-t_0)=2k\pi} = \varepsilon I_+ \\
&\Delta y\,|_{\nu(t-t_0)=\pi+2k\pi} = \varepsilon I_-
\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{6}
$$

Виконаємо в (6) заміну змінних:

$$x = \widetilde{x} + \varepsilon I_+\psi_+(\nu(t-t_0)) + \varepsilon I_-\psi_-(\nu(t-t_0)),$$

де

$$\psi_+(\nu(t-t_0)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right),$$

$$\psi_-(\nu(t-t_0)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right),$$

$$y = z + \varepsilon I_+\phi_+(\nu(t-t_0)) + \varepsilon I_-\phi_-(\nu(t-t_0)),$$

де

$$\phi_+(\nu(t-t_0)) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\sin k\nu(t-t_0)}{k^2-1},$$

$$\phi_-(\nu(t-t_0)) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k\sin k\nu(t-t_0)}{k^2-1}.$$

Враховуючи те, що функції $\psi_+(\nu(t-t_0))$, $\psi_-(\nu(t-t_0))$, $\phi_+(\nu(t-t_0))$ та $\phi_-(\nu(t-t_0))$ нескінченно диференційовні поза точками $\nu(t-t_0) = k\pi$, а в точках $\nu(t-t_0) = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, функція ϕ_- неперервна, а ϕ_+ зазнає розриву першого роду зі стрибком, що дорівнює 1:

$$\Delta\phi_+ = \phi_+(2k\pi + 0) - \phi_+(2k\pi - 0) = 1\,,$$

та в точках $\nu(t-t_0) = \pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, функція ϕ_+ неперервна, а ϕ_- зазнає розриву першого роду зі стрибком, що дорівнює 1:

$$\Delta\phi_- = \phi_-(2k\pi + 0) - \phi_-(2k\pi - 0) = 1\,,$$

після заміни змінних отримуємо систему, рівносильну (6):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \nu z + \varepsilon f(z + \varepsilon I_+\phi_+ + \varepsilon I_-\phi_-) - \varepsilon\overline{\Delta}(z + \varepsilon I_+\phi_+ + \varepsilon I_-\phi_-), \\
&\frac{dz}{dt} = -\nu\widetilde{x} + \varepsilon g + \varepsilon\overline{\Delta}(\widetilde{x} + \varepsilon I_+\psi_+ + \varepsilon I_-\psi_-) + \frac{\varepsilon\nu}{\pi}(I_+ - I_-)\cos\nu t\,.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Співвідношення (5) перепишемо так:

$$
\begin{aligned}
&z(t_0-0)-\frac{\varepsilon I_+}{2}=0, && z\left(t_0+\frac{\pi}{\nu}-0\right)-\frac{\varepsilon I_-}{2}=0,\\
&I_+=I\left(x_+\right), && I_-=I\left(x_-\right),\\
&x_+=\widetilde{x}(t_0)+\frac{5\varepsilon I_+}{4\pi}+\frac{3\varepsilon I_-}{4\pi}>0, && x_-=\widetilde{x}\left(t_0+\frac{\pi}{\nu}\right)+\frac{3\varepsilon I_+}{4\pi}+\frac{5\varepsilon I_-}{4\pi}<0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Від рівнянь (6) шляхом заміни

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}&=a\cos\varphi\\
z&=a\sin\varphi
\end{aligned}
\quad \text{при} \ \ \varphi=-\nu t+\theta
$$

перейдемо до системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\varepsilon(fa\sin\varphi\cos\varphi+g\sin\varphi)+\frac{\varepsilon\nu}{\pi}(I_+-I_-)\cos\nu(t-t_0)\sin\varphi,\\
\frac{d\theta}{dt}&=\frac{\varepsilon}{a}(g\cos-fa\sin^2\varphi)+\varepsilon\overline{\Delta}+\frac{\varepsilon\nu}{\pi a}(I_+-I_-)\cos\nu(t-t_0)\cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Співвідношення (8) у змінних a і θ з точністю до ε набирають вигляду

$$
\begin{aligned}
&a_0\sin(-\nu t_0+\theta_0)=0,\\
&I_+=I(x_+), \qquad I_-=I(x_-),\\
&x_+=a_0\cos(-\nu t_0+\theta_0)+\frac{\varepsilon}{4\pi}(5I_++3I_-)>0,\\
&x_-=-a_0\cos(-\nu t_0+\theta_0)+\frac{\varepsilon}{4\pi}(3I_++5I_-)<0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де

$$
a_0=a(t_0), \quad \theta_0=\theta(t_0)\,.
$$

За умовою теореми функції $f(\nu t,x,y)y$, $g(\nu t,x,y)$ в деякій області

$$
\nu^2\alpha^2\le\nu^2x^2+y^2\le\beta^2\nu^2, \qquad -\infty<t<\infty,
$$

неперервні за всіма аргументами і задовольняють умову Ліпшіца по x, y, функція $I(x)$ задовольняє умову Ліпшіца по x в області $\alpha\le x\le\beta$. Тоді система (9) при малих ε є T-системою $\left(T=\dfrac{2\pi}{\nu}\text{, див. [6]}\right)$ у смузі

$$
0<\alpha\le a\le\beta \tag{11}
$$

і, згідно з [6], розв'язок системи (9) є періодичним з періодом 2π відносно νt, якщо a_0 і θ_0 задовольняють рівняння

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon A(a_0,\theta_0)+\frac{\varepsilon\nu}{2\pi}(I_+-I_-)\sin(-\nu t_0+\theta_0)+\varepsilon^2\cdots=0,\\
&\frac{\varepsilon}{a_0}B(a_0,\theta_0)+\varepsilon\overline{\Delta}+\frac{\varepsilon\nu}{2\pi a_0}(I_+-I_-)\cos(-\nu t_0+\theta_0)+\varepsilon^2\cdots=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

де

$$A(a,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[f(\theta-\varphi,a\cos\varphi,a\sin\varphi)a\cos\varphi+$$
$$+g(\theta-\varphi,a\cos\varphi,a\sin\varphi)\Big]\,\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$B(a,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[g(\theta-\varphi,a\cos\varphi,a\sin\varphi)\cos\varphi-$$
$$-f(\theta-\varphi,a\cos\varphi,a\sin\varphi)a\sin^2\varphi\Big]\,d\varphi.$$

Крім того, в силу [6] вказаний періодичний розв'язок є границею послідовності:

$$a_n(t)=a_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\Big(F_1(t,a_{n-1}(t),\theta_{n-1}(t),\varepsilon)-\overline{F_1(t,a_{n-1}(t),\theta_{n-1}(t),\varepsilon)}\Big)\,dt,$$

$$\theta_n(t)=\theta_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\Big(F_2(t,a_{n-1}(t),\theta_{n-1}(t),\varepsilon)-\overline{F_2(t,a_{n-1}(t),\theta_{n-1}(t),\varepsilon)}\Big)\,dt,$$

де $\varepsilon F_1(t,a,\theta,\varepsilon)$ і $\varepsilon F_2(t,a,\theta,\varepsilon)$ — праві частини відповідно першого і другого рівнянь системи (9),

$$\overline{F(t)}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)\,dt,\quad T=\frac{2\pi}{\nu},\quad n=1,2,\dots\,.$$

Зокрема, при $n=1$ із (9) знаходимо, що з точністю до величин порядку ε^2:

$$\begin{aligned}
a(t)&=a_0-\frac{\varepsilon}{\nu}\int\limits_{-\nu t_0+\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\Big(f(\theta_0-\varphi,a_0\cos\varphi,a_0\sin\varphi)a_0\sin\varphi\cos\varphi\Big)\,d\varphi-\\
&-\frac{\varepsilon}{\nu}\int\limits_{-\nu t_0+\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\Big(g(\theta_0-\varphi,a_0\cos\varphi,a_0\sin\varphi)\sin\varphi-A(a_0,\theta_0)\Big)\,d\varphi+\\
&+\frac{\varepsilon}{4\pi}(I_+-I_-)\Big(\cos(2\nu t-\theta_0-\nu t_0)-\cos(-\nu t_0+\theta_0)\Big),\\
\theta(t)&=\theta_0-\frac{\varepsilon}{\nu a_0}\int\limits_{-\nu t_0+\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\Big(g(\theta_0-\varphi,a_0\cos\varphi,a_0\sin\varphi)\cos\varphi\Big)\,d\varphi+\\
&+\frac{\varepsilon}{\nu a_0}\int\limits_{-\nu t_0+\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\Big(f(\theta_0-\varphi,a_0\cos\varphi,a_0\sin\varphi)a_0\sin^2\varphi+B(a_0,\theta_0)\Big)\,d\varphi+\\
&+\frac{\varepsilon}{4\pi a_0}(I_+-I_-)\Big(\sin(2\nu t-\theta_0)-\sin(\nu t_0-\theta_0)\Big).
\end{aligned}\tag{13}$$

Із (10) випливає, що

$$\sin(-\nu t_0 + \theta_0) = 0, \qquad \cos(-\nu t_0 + \theta_0) = 1\ . \tag{14}$$

Підставляючи (14) в (10), отримуємо

$$\begin{aligned} I_+ &= I\left(a_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}\,(5I_+ + 3I_-)\right)\ , \\ I_- &= I\left(-a_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}\,(3I_+ + 5I_-)\right)\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Оскільки $I(y)$ задовольняє умову Ліпшіца, із (15) видно, що з точністю до величин порядку ε

$$I_+ = I\,(a_0), \qquad I_- = I\,(-a_0)\ . \tag{16}$$

Підставляючи (14) і (16) в (12), одержуємо систему рівнянь для визначення a_0 і θ_0:

$$\begin{aligned} &A(a_0,\theta_0) + \varepsilon\cdots = 0\ , \\ &B(a_0,\theta_0) + \overline{\Delta}a_0 + \frac{\nu}{2\pi}\Big(I(a_0) - I(-a_0)\Big) + \varepsilon\cdots = 0\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Оскільки ліві частини рівнянь (17) неперервні відносно $a_0, \theta_0, \varepsilon$, то система (17) при малих ε має розв'язок, якщо тільки система

$$\begin{aligned} &A(a_0,\theta_0) = 0\ , \\ &B(a_0,\theta_0) + \overline{\Delta}a_0 + \frac{\nu}{2\pi}\Big(I(a_0) - I(-a_0)\Big) = 0 \end{aligned}$$

має розв'язок (a^0, θ^0), що знаходиться у смузі $\alpha \le a^0 \le \beta$ разом з деяким своїм ρ-околом, і індекс відображення, що визначається лівими частинами рівнянь (3), в точці (a^0, θ^0) відмінний від нуля. Крім того, розв'язок системи (17) неперервно по ε і з точністю до величин деякого порядку $\delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon) \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$, визначається розв'язком системи (3). Теорему доведено.

Зауваження. Згідно з заміною, періодичні розв'язки системи (1), (2) з точністю до величин порядку $\delta(\varepsilon)$ визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\Bigg(&I(a_0)\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right) + \\ &+I(-a_0)\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right)\Bigg) + \\ &+a(t)\,\cos(-\nu t + \theta(t))\ , \\ y(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\Bigg(&I(a_0)\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\sin k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right) + \\ &+I(-a_0)\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k\sin k\nu(t-t_0)}{k^2-1}\right)\Bigg) + \\ &+a(t)\,\sin(-\nu t + \theta(t))\ , \end{aligned}$$

де $a(t), \theta(t)$ — функції (13), a_0, θ_0 — розв'язок системи (3),

$$\nu t_0 = \theta_0 + 2\pi k\,.$$

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.
2. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
3. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Укр. мат. журн. — 1967. — **19**, № 5. — С. 96 – 106.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* К вопросу обоснования метода усреднения для дифференциальных уравнений второго порядка с импульсами // Там же. — 1974. — **24**, № 3. — С. 411 – 418.
5. *Горбачук Т.В., Перестюк М.О.* Про існування розривних граничних циклів однієї системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Там же. — 1997. — **49**, № 8. — С. 1127 – 1134.
6. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Выща шк., 1976. — 180 с.
7. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. — Singapure: World Sci., 1995. — 462 p.

Одержано 22.03.98