УДК 517.91/912

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We find consistency conditions for systems of nonlinear differential equations with delay and restrictions, and substantiate the use of an iteration method for solving such problems.

Встановлено умову сумісності для систем нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями і обґрунтувано застосування до таких задач ітераційного методу.

Теорії функціонально-диференціальних рівнянь, що інтенсивно розвивається останні півстоліття, присвячено чимало робіт (див., наприклад, [1 – 3]).

Одним із сучасних напрямків досліджень у її межах є встановлення умов сумісності систем функціонально-диференціальних рівнянь, розв'язки яких задовольняють додаткові умови, та розробка наближених методів побудови цих розв'язків [4, 5].

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих у роботі [5]. Запропоновано ітераційний метод для системи нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями і наведено умову сумісності поставленої задачі.

1. Об'єкт дослідження. Розглянемо початкову задачу для системи функціонально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}x(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) = f(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x(a) = \varphi(a), \tag{2}$$

в якій $A(t)$ та $B(t)$ — неперервні матриці розмірності $m \times m$, $\Delta > 0$ — стале запізнення, вектор-функція $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задає оператор $f : D[a,b] \to L_2[a,b]$, $\varphi \in C[a-\Delta, a)$.

Зауважимо, що тут і надалі під просторами $D[a,b]$ та $L_2[a,b]$ будемо розуміти простори вектор-функцій, компоненти яких абсолютно неперервні чи сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$ відповідно.

Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо абсолютно неперервну вектор-функцію $x \in W_2^1[a,b]$, яка майже скрізь задовольняє рівняння (1) та умову (2).

Як відомо, за певних умов, накладених на праву частину системи (1), задача (1), (2) має розв'язок, і до того ж єдиний. Однак ситуація суттєво змінюється при наявності додаткових обмежень на вектор-функцію $x(t)$

$$\int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

де $S(t)$ — матриця розмірності $l \times m$ із сумовними з квадратом на відрізку $[a,b]$ елементами і $\alpha \in \mathbb{R}^l$. Постає питання сумісності задачі (1)–(3).

Задачу (1)–(3) вважатимемо сумісною, якщо існує розв'язок $x \in W_2^1[a,b]$ початкової задачі (1), (2), який задовольняє обмеження (3). Однак, так буває не завжди, і розглядувана задача, взагалі кажучи, несумісна.

У даній роботі встановлюється умова сумісності задачі (1)–(3) та дається обґрунтування застосування до неї ітераційного методу.

2. Допоміжна задача. Важливу роль у нашому подальшому дослідженні відіграватиме задача

$$\frac{d}{dt}x(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) = v(t) + u(t), \quad t \in [a,b], \tag{4}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x(a) = \varphi(a), \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{5}$$

$$u(t) = \Phi(t)\lambda, \tag{6}$$

у якій $\Phi(t)$ — матриця розмірності $m \times l$, елементи якої сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, $v \in L_2[a,b]$.

Припущення 1. *Вважатимемо матриці $A(t)$, $B(t)$ та $\Phi(t)$ такими, що однорідна задача (4)–(6) $(v(t) \equiv 0, \varphi(t) \equiv 0, \alpha = 0)$ має лише тривіальний розв'язок.*

Припущення 2. *Вважатимемо, що $b = a + N\Delta$, тобто відрізок $[a,b]$ можна розбити на N проміжків (τ_i, τ_{i+1}) з довжиною Δ, де $\tau_i = a + (i-1)\Delta$, $i = \overline{1, N+1}$.*

За таких припущень, скориставшись методикою, описаною у роботі [5], задачу (4)–(6) можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями на деякому новому проміжку $[0,T]$.

Справді, розглянемо систему (4) на кожному інтервалі (τ_i, τ_{i+1}) і введемо заміну $t = cs + \tau_i$, в результаті чого будемо мати

$$\frac{1}{c}\frac{d}{ds}x(cs+\tau_i) + A(cs+\tau_i)x(cs+\tau_i) + B(cs+\tau_i)x(cs+\tau_{i-1}) =$$

$$= v(cs+\tau_i) + \Phi(cs+\tau_i)\lambda, \quad i = \overline{1,N}, \quad s \in (0,T).$$

Ввівши тепер позначення

$$z_i(s) = x(cs+\tau_i), \quad z_0(s) = \varphi(cs+\tau_1),$$

$$A_i(s) = cA(cs+\tau_i), \quad B_i(s) = cB(cs+\tau_i),$$

$$\Phi_i(s) = c\Phi(cs+\tau_i), \quad S_i(s) = cS(cs+\tau_i), \quad i = \overline{1,N},$$

$$y_i(s) = cv(cs+\tau_i) - \begin{cases} B_1(s)\varphi(cs+\tau_1), & i = 1; \\ 0, \quad i = \overline{2,N}, \end{cases}$$

та врахувавши умову (2) і умови, що відображають неперервність вектор-функції $x(t)$ на $[a,b]$,

$$z_1(0) = \varphi(a), \quad z_i(T) = z_{i+1}(0), \quad i = \overline{1,N-1},$$

отримаємо згадану вище систему диференціальних рівнянь з обмеженнями

$$\frac{dz}{ds} + H(s)z = w(s) + y(s), \quad s \in (0,T), \tag{7}$$

$$z(0) + Dz(T) = \gamma, \quad \int\limits_0^T U(s)z(s)ds = \alpha, \tag{8}$$

$$w(s) = W(s)\lambda. \tag{9}$$

Тут матриці $H(s), W(s)$ та $U(s)$ розмірності $mN\times mN$, $mN\times l$ та $l\times mN$ відповідно, стала матриця D розмірності $mN\times mN$ і вектор $\gamma\in\mathbb{R}^{mN}$ мають вигляд

$$H(s) = \begin{pmatrix} A_1(s) & O & \cdots & O & O \\ B_2(s) & A_2(s) & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_N(s) & A_N(s) \end{pmatrix}, \quad y(s) = \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \cdots \\ y_N(s) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & O & O \\ -I & O & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & -I & O \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \varphi(a) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W(s) = \begin{pmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \cdots \\ \Phi_N(s) \end{pmatrix},$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} S_1(s) & S_2(s) & \cdots & S_N(s) \end{pmatrix},$$

де I — одинична матриця із $\mathbb{R}^m$.

Вектор-функції $x(t)$ та $z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s), & z_2(s), & \cdots & z_N(s) \end{pmatrix}$, що є розв'язками задач (4) – (6) та (7) – (9) відповідно, пов'язані між собою співвідношеннями

$$x(t) = z_i(s), \quad z_i(s) = x(cs + \tau_i),$$

де $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{1, N}$, $c = \Delta/T$, $s \in [0, T]$ і $z_i(T) = z_{i+1}(0)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Справедливим є таке твердження [5].

Лема. *За припущень 1 та 2 існують вектор-функції* $h(s), r(s)$ *та матриці* $G(s,\xi)$, $R(s,\xi)$ *розмірності* $mN \times mN$ *такі, що єдиний розв'язок задачі (7) – (9) зображається формулами*

$$z(s) = h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \quad w(s) = r(s) + \int\limits_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{10}$$

і справджуються рівності

$$\int\limits_0^T G(s,\xi)W(\xi)d\xi = O, \quad W(s) + \int\limits_0^T R(s,\xi)W(\xi)d\xi = O. \tag{11}$$

Задачу (1) – (3) можна звести до деякої системи інтегральних рівнянь. Справді, нехай вектор-функція $v(t)$ у системі (4) має вигляд

$$v(t) = f(t, x(t), x(t - \Delta)). \tag{12}$$

Скориставшись знову методикою із [5], вираз (12) можна записати у вигляді

$$y(s) = F(s, z(s)), \tag{13}$$

де

$$F(s, z(s)) = \begin{pmatrix} f_1(s, z_1(s), z_0(s)) \\ f_2(s, z_2(s), z_1(s)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_N(s, z_N(s), z_{N-1}(s)) \end{pmatrix},$$

і $f_i(s, z_i(s), z_{i-1}(s)) = cf(cs + \tau_i, x(cs + \tau_i), x(cs + \tau_{i-1})$, $i = \overline{1, N}$, $z_0(s) = \varphi(cs + \tau_1)$.

Підставивши перше із співвідношень (10) у (13), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$y(s) = F\left(s, h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi\right). \tag{14}$$

Повторивши схему доведення теореми 1 із [5], неважко переконатись у справедливості такого твердження.

Теорема 1. *За припущень 1 та 2 задача (1) – (3) сумісна тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi = 0,$$

де $y \in L_2[0,T]$ *— розв'язок системи інтегральних рівнянь (14).*

Систему (14) можна звести до системи інтегральних рівнянь, як це було показано у [5] для лінійного випадку, на деякому підпросторі простору $L_2[0,T]$.

Для цього введемо у розгляд оператор

$$(\Pi y)(s) := \int_0^T \Pi(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{15}$$

де

$$\Pi(s,\xi) = W(s)\Delta^{-1}W^*(\xi), \quad \Delta = \int_0^T W^*(s)W(s)ds, \tag{16}$$

ортогонального проектування простору $L_2[0,T]$ на його підпростір, породжений лінійно незалежними стовпцями матриці $W(s)$.

Введемо нову вектор-функцію $\widehat{v}(s)$ таким чином:

$$\widehat{v}(s) = y(s) - \int_0^T \Pi(s,\xi)y(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Вектор-функція $\widehat{v}(s)$, як випливає з першої властивості (11) та позначень (15), (16), задовольняє співвідношення

$$\int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi = \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi \qquad \forall y \in L_2[0,T]. \tag{18}$$

Скориставшись властивістю (18), рівність (14) можна записати у вигляді

$$y(s) = F\left(s, h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi\right). \tag{19}$$

Підставивши (19) у (17), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\widehat{v}(s) = (L\widehat{v})(s), \tag{20}$$

де

$$(L\widehat{v})(s) = F\left(s, h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi\right) -$$

$$- \int_0^T \Pi(s,\tau) F\left(\tau, h(\tau) + \int_0^T G(\tau,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi\right) d\tau. \tag{21}$$

3. Ітераційний метод. Наведена у попередньому пункті умова сумісності задачі (1) – (3) дозволяє зробити висновок про існування розв'язку згаданої вище задачі. Однак, відкритим залишається питання відшукання цього розв'язку у явному вигляді.

У цьому аспекті актуальною є спроба обґрунтування застосування до задачі (1) – (3) наближених методів, зокрема таких, які давали б змогу не лише знаходити наближені розв'язки задачі (1) – (3), а й робити висновки про її сумісність. Одним із таких методів є ітераційний метод, запропонований у [6] для інтегральних рівнянь з обмеженнями.

Суть його, стосовно задачі (1) – (3), є такою. Нехай наближення $x_{k-1}(t)$ вже побудоване. Наступне наближення визначатимемо за формулами

$$v_k(t) = f(t, x_{k-1}(t), x_{k-1}(t-\Delta)), \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}x_k(t) + A(t)x_k(t) + B(t)x_k(t-\Delta) = v_k(t) + u_k(t), \quad t \in [a,b], \tag{23}$$

$$x_k(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x_k(a) = \varphi(a), \quad \int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha, \tag{24}$$

$$u_k(t) = \Phi(t)\lambda_k. \tag{25}$$

Початкове наближення $x_0(t)$ визначатимемо із задачі (23) – (25) при $k = 0$ і заданій векторфункції $v_0 \in L_2[a,b]$.

Метод (22) – (25) можна звести до методу послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (20). Справді, за припущенням 2 задачу (22) – (25) можна звести до задачі

$$y_k(s) = F(s, z_{k-1}(s)), \tag{26}$$

$$\frac{d}{ds}z_k(s) + H(s)z_k(s) = y_k(s) + w_k(s), \quad s \in (0, T), \tag{27}$$

$$z_k(0) + Dz_k(T) = \gamma, \quad \int\limits_0^T U(s)z_k(s)ds = \alpha, \tag{28}$$

$$w_k(s) = W(s)\lambda_k. \tag{29}$$

Врахувуючи також припущення 1, бачимо, що на підставі леми задача (27) – (29) має єдиний розв'язок

$$z_k(s) = h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y_k(\xi)d\xi, \quad w_k(s) = r(s) + \int\limits_0^T R(s,\xi)y_k(\xi)d\xi. \tag{30}$$

Відмітимо також, що розв'язки $x_k(t)$ задачі (23) – (25) та $z_k(s) = \left(z_1^k(s),\ z_2^k(s),\ \cdots \cdots\ z_N^k(s)\right)$ задачі (27) – (29) пов'язані між собою співвідношеннями

$$x_k(t) = z_i^k(s), \quad z_i^k(s) = x_k(cs + \tau_i),$$

де $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{1, N}$, $c = \Delta/T$, $s \in [0, T]$ і $z_i^k(T) = z_{i+1}^k(0)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Підставивши перше із співвідношень (30), попередньо замінивши у ньому індекс k на $k-1$, у (26), отримаємо ітераційний метод для системи інтегральних рівнянь (14):

$$y_k(s) = F\left(s, h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y_{k-1}(\xi)d\xi\right), \quad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{31}$$

Метод (31), у свою чергу, можна звести до методу послідовних наближень для системи (20). Для цього потрібно ввести вектор-функцію

$$\widehat{v}_k(s) = y_k(s) - \int\limits_0^T \Pi(s,\xi)y_k(\xi)d\xi, \tag{32}$$

з допомогою зображення якої та властивості (18) отримаємо

$$y_k(s) = F\left(s, h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)\widehat{v}_{k-1}(\xi)d\xi\right), \quad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{33}$$

Підставивши (33) у (32), використавши позначення (21), отримаємо згаданий вище метод послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (20):

$$\widehat{v}_k(s) = (L\widehat{v}_{k-1})(s), \quad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{34}$$

Умови збіжності методу (34) відомі [7]. Сформулюємо на їх основі відповідні твердження і для методу (22) – (25).

Припустимо, що для довільної вектор-функції $y \in L_2[0,T]$ справджується нерівність

$$\int_0^T \left| \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi \right|^2 ds \le \frac{p^2}{c} \int_0^T |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi,$$

де вектор-функція $\widehat{v}(s)$ має вигляд (17), $c = \Delta/T$ і нелінійний оператор L, який визначається формулою (21), є неперервним і задовольняє умову Ліпшиця, тобто

$$\|L\widehat{v}_1 - L\widehat{v}_2\| \le q\|\widehat{v}_1 - \widehat{v}_2\|. \tag{35}$$

Теорема 2. *Якщо задача (1) – (3) сумісна і $q < 1$, то вона має єдиний розв'язок $x^* \in W_2^1[a,b]$, послідовність $\{x_k(t), \quad k \ge 0\} \subset W_2^1[a,b]$, побудована за методом (22) – (25), збігається до цього розв'язку і справедливі оцінки похибки*

$$\|x^* - x_k\| \le pq^k\|\widehat{v}^* - \widehat{v}_0\|,$$

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{pq^{k-\nu}}{1-q}\|\widehat{v}_{\nu+1} - \widehat{v}_\nu\|, \quad 0 \le \nu \le k-1,$$

де $\widehat{v}^*(s)$ та $\widehat{v}_k(s)$ — точний та наближений, отриманий за методом (34), розв'язки системи інтегральних рівнянь (20).

Зауваження. Умова Ліпшиця (35) виконується, зокрема, якщо вектор-функція $F(s,u)$, $s \in [0,T], u \in \mathbb{R}^{mN}$, задовольняє умову Каратеодорі і виконуються нерівності

$$|F(s,u)| \le a(s) = b|u|,$$

$$|F(s,u_1) - F(s,u_2)| \le \delta(s)|u_1 - u_2|, \tag{36}$$

$$\int_0^T \left[\delta(s) \left| \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi \right| \right]^2 ds \le b \int_0^T |y(\xi)|^2 d\xi,$$

де $a \in L_2[0,T]$, $b = \mathrm{const}$, $\delta(s)$ — відома вектор-функція із $L_2[0,T]$.

За умов (36) нелінійний оператор

$$(\widehat{F}y)(s) = F\left(s, h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi\right)$$

переводить $L_2[0,T]$ в себе, є цілком неперервним і задовольняє умову Ліпшиця, тобто

$$\|\widehat{F}y_1 - \widehat{F}y_2\| \le b\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in L_2[0,T].$$

Умова $b < 1$ також є достатньою для збіжності методу (22)–(25), однак цінність зведення методу (22)–(25) до методу послідовних наближень не для системи (14), а для системи (20), підкреслюється тим фактом, що, взагалі кажучи, $q \leq b$.

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 120 с.
3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
5. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206–232.
6. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
7. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 10.06.2003