УДК 517.949

ПРО ІСНУВАННЯ ГЛАДКОГО ОБМЕЖЕНОГО НАПІВІНВАРІАНТНОГО МНОГОВИДУ ВИРОДЖЕНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ m

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, 4, вул. Терещенківська, 3

Ю. В. Теплінський, І. В. Семенишина

Кам'янець-Поділ. пед. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський Хмельницької обл., вул. Огієнка, 61

By using the Green – Samoilenko function, we construct a bounded and Frechet differentiable semiinvariant manifold for a nonlinear system of difference equations in the Banach space of bounded number sequences.

Методом функції Гріна – Самойленка побудовано обмежений диференційовний у сенсі Фреше напівінваріантний многовид нелінійної системи різницевих рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей.

Останнім часом опубліковано досить багато робіт [1 – 11], в яких метод функції Гріна – Самойленка (ФГС) застосовувався до побудови та дослідження інваріантних тороїдальних многовидів різноманітних систем диференціальних, диференціально-різницевих та різницевих рівнянь, визначених як на скінченновимірних, так і на нескінченновимірних торах.

У монографії [2] (§ 15) звернено увагу на те, що деякі відомі результати з теорії інваріантних торів диференціальних систем зберігаються і тоді, коли праві частини вихідних диференціальних рівнянь не є періодичними відносно кутової змінної. Цю ідею ми використали для побудови напівінваріантних многовидів вироджених різницевих систем у банаховому просторі обмежених числових послідовностей.

Розглянемо спочатку систему різницевих рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \qquad x_{n+1} = P(\varphi_n)x_n + c(\varphi_n), \quad n \in Z, \tag{1}$$

де $\varphi \in W$, $x = (x^1, x^2, x^3, \dots) \in \boldsymbol{m}$, W — довільний лінійний нормований простір, $\boldsymbol{m}$ — простір обмежених послідовностей дійсних чисел з нормою $\|x\| = \sup\limits_i \{|x^i|\}$, функції $a(\varphi)$ та $c(\varphi) = \{c_1(\varphi), c_2(\varphi), c_3(\varphi), \dots\}$ визначені на W і набувають значень з просторів W та $\boldsymbol{m}$ відповідно, $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця з дійснозначними елементами, Z — множина цілих чисел.

Домовимось надалі норму матриці $P(\varphi)$ та норми в просторах $W, \boldsymbol{m}$ позначати одним символом $\|\cdot\|$ і розрізняти ці норми за контекстом.

Будемо вважати, що

$$\|a(\varphi)\| \leq A^0, \quad \|c(\varphi)\| \leq C^0, \quad \|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)| \leq P^0,$$

де A^0, P^0, C^0 — додатні сталі, що не залежать від $\varphi \in W$.

Означення 1. *Обмеженим інваріантним многовидом системи рівнянь (1) назвемо множину точок $x \in \boldsymbol{m}$:*

$$x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), u_3(\varphi), ...),$$

якщо функція $u(\varphi)$ визначена для будь-якого $\varphi \in W$, обмежена за нормою і задовольняє рівність

$$u(\varphi_{n+1}(\varphi)) = P\left(\varphi_n(\varphi)\right) u\left(\varphi_n(\varphi)\right) + \left(\varphi_n(\varphi)\right), \quad n \in Z, \ \varphi \in W, \tag{2}$$

де $\varphi_n(\varphi)$ — розв'язок першого рівняння системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in W$.

Означення 2. *Вказану у попередньому означенні множину точок назвемо обмеженим напівінваріантним многовидом систем рівнянь (1), якщо рівність (2) справджується для будь-якого $n \in Z_0^+$, де Z_0^+ — множина цілих невід'ємних чисел.*

Як відомо, для побудови інваріантного многовиду системи (1) методом ФГС необхідною умовою є існування матриціанта рівняння

$$x_{n+1} = P(\varphi_n(\varphi))x_n, \quad n \in Z. \tag{3}$$

Нагадаємо, що матрицантом рівняння (3) в точці l при значенні параметра $\varphi \in W$ називають матрицю $\Omega_l^n(\varphi)$, визначену для будь-якого $n \in Z$, i-м стовпцем якої є розв'язок $\overset{(i)}{x}_n$ цього рівняння з початковими умовами

$$\overset{(i)}{x}_l = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots,}_{n-1} 0, 1, 0, 0, 0, \ldots), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Якщо справджуються твердження:

а) для будь-якого $\varphi \in W$ матриця $P(\varphi)$ оборотна, причому обернена до неї матриця $P^{-1}(\varphi)$ обмежена за нормою;

б) відображення $\Phi(\varphi) = \varphi + a(\varphi) : W \to W$ оборотне,

то матрицант $\Omega_l^n(\varphi)$ існує для будь-яких $l \in Z, \varphi \in W$ і легко записується [8].

Якщо хоча б одне з цих тверджень не виконується, то систему рівнянь (1) називатимемо виродженою. Зрозуміло, що в цьому разі рівняння (3) взагалі може не мати матрицанта, оскільки потрібні для його побудови розв'язки можуть виявитись непродовжуваними „вліво".

Наведемо достатні умови, при яких вироджена система рівнянь (1) має обмежений інваріантний або напівінваріантний многовид.

Лема 1. *Справджуються твердження:*

1^0) якщо умова б) виконується, а умова а) — ні, причому для будь-якого $n > l$ ($\{n, l\} \subset \subset Z$)

$$\left\| \prod_{i=n-1}^{l} P(\varphi_i(\varphi)) \right\| \leq K\lambda^{n-l}, \tag{4}$$

то система рівнянь (1) має обмежений інваріантний многовид;

2^0) якщо умова а) виконується, а умова б) — ні, причому для $0 \leq n < l$ ($\{n, l\} \subset Z$)

$$\left\| \prod_{i=n}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi)) \right\| \leq K\lambda^{l-n}, \tag{5}$$

то система рівнянь (1) має обмежений напівінваріантний многовид.

Тут K і $\lambda < 1$ — додатні сталі, що не залежать від $\varphi \in W$.

Доведення леми традиційне, тому наведемо лише його схему.

У випадку 1^0 за ФГС рівняння (3) виберемо функцію

$$G_0(l, \varphi) = \begin{cases} \prod\limits_{i=-1}^{l} P(\varphi_i(\varphi)) & \text{при } l < 0; \\ E & \text{при } l = 0; \\ 0 & \text{при } l > 0, \end{cases}$$

де E — нескінченна одинична матриця.

Очевидно, що коли умова а) не справджується, але виконується умова б), то для будь-якого $n > l$ матриця $\Omega_l^n(\varphi)$ будується однозначно, причому

$$\Omega_l^n(\varphi) = \prod_{i=n-1}^{l} P(\varphi_i(\varphi)) \qquad \forall \varphi \in W.$$

Тоді обмежений інваріантний многовид системи рівнянь (1) існує і визначається функцією

$$u(\varphi) = c(\varphi_{-1}(\varphi)) + \sum_{l=-\infty}^{-1} \prod_{i=-1}^{l} P(\varphi_i(\varphi)) c(\varphi_{l-1}(\varphi)),$$

оскільки

$$x_n = c(\varphi_{n-1}(\varphi)) + \sum_{l=-\infty}^{n-1} \prod_{i=n-1}^{l} P(\varphi_i(\varphi)) c(\varphi_{l-1}(\varphi)) = u(\varphi_n(\varphi))$$

є розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = P(\varphi_n(\varphi)) x_n + c(\varphi_n(\varphi)), \qquad n \in Z, \quad \varphi \in W.$$

Обмеженість функції $u(\varphi)$ за нормою, рівномірна відносно $\varphi \in W$, очевидна.

У випадку 2^0 за ФГС рівняння (3) виберемо функцію

$$G_0(l,\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } l \leq 0; \\ -\prod\limits_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi)) & \text{при } l > 0. \end{cases}$$

Якщо умова а) виконується, а умова б) — ні, то матриця $\Omega_l^n(\varphi)$ для будь-якого $\varphi \in W$, $0 \leq n < l$, $\{n,l\} \subset Z$, однозначно визначається рівністю

$$\Omega_l^n(\varphi) = \prod_{i=n}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi)).$$

Тоді існує обмежений напівінваріантний многовид системи рівнянь (1), який визначається функцією

$$u(\varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi))c(\varphi_{l-1}(\varphi)),$$

оскільки

$$x_n = -\sum_{l=n+1}^{\infty}\prod_{i=n}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi))c(\varphi_{l-1}(\varphi)) = u(\varphi_n(\varphi))$$

є розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = P(\varphi_n(\varphi))x_n + c(\varphi_n(\varphi)), \qquad n \in Z_0^+, \quad \varphi \in W.$$

Зрозуміло, що виконання нерівностей (4), (5) забезпечують, наприклад, оцінки $\|P(\varphi)\| \leq g$, $\|P^{-1}(\varphi)\| \leq g$ відповідно, де $g = \text{const} < 1$, $\varphi \in W$.

Наступні міркування стосуватимуться побудови обмеженого напівінваріантного многовиду нелінійної системи різницевих рівнянь, що має виродження, вказані у твердженні 2^0.

Розглянемо систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, x_n), \quad x_{n+1} = P(\varphi_n, x_n)x_n + c(\varphi_n), \quad n \in Z, \tag{6}$$

де φ, x — такі самі, як і раніше, функція $a(\varphi, x)$ та матриця $P(\varphi, x)$ визначені на множині $D = W \times D_0 = W \times \{x \in \boldsymbol{m} \,\big|\, \|x\| \leq d = \text{const} > 0\}$, причому на цій множині $\|a(\varphi, x)\| \leq A^0$, $\|c(\varphi)\| \leq C^0$, $\|P(\varphi, x)\| \leq P^0$, де A^0, C^0 і P^0 — додатні сталі. Вважатимемо також, що для будь-яких $(\varphi, x) \in D$ матриця $P(\varphi, x)$ оборотна, і обернена до неї матриця $P^{-1}(\varphi, x)$ рівномірно відносно $(\varphi, x) \in D$ обмежена за нормою додатною сталою P_1.

Означення 3. *Обмеженим напівінваріантним многовидом системи рівнянь (6) назвемо множину точок $x = u(\varphi)$, що задовольняє умови означення 1, якщо в ньому рівняння (2) замінити таким:*

$$u(\varphi_{n+1}(\varphi)) = P(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi)))u(\varphi_n(\varphi)) + c(\varphi_n(\varphi)), \qquad n \in Z_0^+, \tag{7}$$

де $\varphi_n(\varphi)$ є розв'язком рівняння

$$\varphi_{n+1}(\varphi) = \varphi_n(\varphi) + a(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi))), \qquad n \in Z_0^+, \tag{8}$$

причому $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in W$.

Припустимо, що виконуються нерівності

$$P_1 < 1, \qquad C^0 P_1 \leq d(1 - P_1), \tag{9}$$

і запишемо систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, 0), \quad x_{n+1} = P(\varphi_n, 0)x_n + c(\varphi_n), \qquad n \in Z. \tag{10}$$

Очевидно, що при $P_1 < 1$ для неї виконуються умови 2^0 леми 1. Тоді система (10) має обмежений напівінваріантний многовид, що визначається функцією

$$u^{(0)}(\varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(0)}(\varphi), 0)c(\varphi_{l-1}^{(0)}(\varphi)). \tag{11}$$

Це означає, що справджуються рівності

$$\varphi_0^{(0)}(\varphi) = \varphi \in W, \quad \varphi_{n+1}^{(0)}(\varphi) = \varphi_n^{(0)}(\varphi) + a(\varphi_n^{(0)}(\varphi), 0),$$

$$u^{(0)}(\varphi_{n+1}^{(0)}(\varphi)) = P(\varphi_n^{(0)}(\varphi), 0)u^{(0)}(\varphi_n^{(0)}(\varphi)) + c(\varphi_n^{(0)}(\varphi)), \qquad n \in Z_0^+.$$

При цьому з (9), (11) випливають оцінки

$$\left\| u^{(0)}(\varphi) \right\| \leq \frac{C^0 P_1}{1 - P_1} \leq d,$$

тобто $u^{(0)}(\varphi) \in D_0 \ \ \forall \, \varphi \in W$.

Індуктивними міркуваннями неважко переконатись у можливості побудови послідовності функцій $\{u^{(s)}(\varphi)\}_{s=1}^{\infty}$, кожна з яких визначає обмежений напівінваріантний многовид системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, u^{(s-1)}(\varphi_n)), \quad x_{n+1} = P(\varphi_n, u^{(s-1)}(\varphi_n))x_n + c(\varphi_n), \qquad n \in Z.$$

Це означає, що для будь-яких $n \in Z_0^+$, $s \in Z^+ = Z_0^+ \setminus \{0\}$, $\varphi \in W$ справджуються рівності

$$\begin{aligned} &\varphi_{n+1}^{(s)}(\varphi) = \varphi_n^{(s)}(\varphi) + a(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi))), \qquad \varphi_0^{(s)}(\varphi) = \varphi \in W, \\ &u^{(s)}(\varphi_{n+1}^{(s)}(\varphi)) = P(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)))u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)) + c(\varphi_n^{(s)}(\varphi)), \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$u^{(s)}(\varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi)))c(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)), \tag{13}$$

причому $\left\|u^{(s)}(\varphi)\right\| \le \dfrac{C^0 P_1}{1-P_1} \le d \ \ \forall s \in Z^+$.

Лема 2. *Нехай справджуються нерівності (9) і для будь-яких $\varphi \in W$, $\{x, \bar{x}\} \subset D_0$*

$$\|a(\varphi, x) - a(\varphi, \bar{x})\| \le \alpha \|x - \bar{x}\|,$$

$$\left\|P^{-1}(\varphi, x) - P^{-1}(\varphi, \bar{x})\right\| \le \beta \|x - \bar{x}\|,$$

де додатні сталі α, β не залежать від $\varphi, x, \bar{x}$. Якщо при цьому для будь-яких $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \subset W$, $s \in Z_0^+$

$$\left\|u^{(s)}(\varphi) - u^{(s)}(\bar{\varphi})\right\| \le L^{(s)} \|\varphi - \bar{\varphi}\|,$$

де додатні сталі $L^{(s)}$ не залежать від $\varphi, \bar{\varphi}$ і обмежені зверху сталою L та виконується оцінка

$$\gamma = \frac{P_1 L\alpha + \beta d + \beta C^0}{1 - P_1} < 1,$$

то послідовність $\left\{u^{(s)}(\varphi)\right\}_{s=0}^{\infty}$ збігається в $\mathfrak{m}$ рівномірно відносно $\varphi \in W$.

Доведення. Запишемо рівності (12) при $n = 0$:

$$\varphi_1^{(s)}(\varphi) = \varphi + a(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi)),$$

$$u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) = P(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))u^{(s)}(\varphi) + c(\varphi), \qquad s \in Z^+.$$

Враховуючи оборотність матриці $P(\varphi, x)$ на D, отримуємо рівність

$$u^{(s)}(\varphi) = P^{-1}(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - c(\varphi)), \qquad s \in Z^+.$$

Тоді

$$u^{(s+1)}(\varphi)-u^{(s)}(\varphi)=P^{-1}(\varphi,u^{(s)}(\varphi))(u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))-c(\varphi))-$$

$$-\;P^{-1}(\varphi,u^{(s-1)}(\varphi))(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))-c(\varphi))=P^{-1}(\varphi,u^{(s)}(\varphi))(u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))-$$

$$-\;u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)))+(P^{-1}(\varphi,u^{(s)}(\varphi))-P^{-1}(\varphi,u^{(s-1)}(\varphi)))(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))-c(\varphi)).$$

Позначаючи через $\omega^{(s+1)}$ різницю $u^{(s+1)}(\varphi)-u^{(s)}(\varphi)$, покладаючи $\left\|\omega^{(s+1)}\right\|_0=\sup\limits_{\varphi\in W}\left\|\omega^{(s+1)}\right\|$ і беручи до уваги оцінку

$$\left\|\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)-\varphi_1^{(s)}(\varphi)\right\|\leq\alpha\left\|u^{(s)}(\varphi)-u^{(s-1)}(\varphi)\right\|=\alpha\left\|\omega^{(s)}\right\|,$$

записуємо ланцюжок нерівностей

$$\left\|\omega^{(s+1)}\right\|\leq P_1\left\|u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))-u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right\|+\beta\left\|u^{(s)}(\varphi)-\;u^{(s-1)}(\varphi)\right\|\times$$

$$\times\;(d+C^0)\leq P_1\left\|u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))-u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right\|+P_1\left\|u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))-\right.$$

$$\left.-\;u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right\|+\beta\left\|\omega^{(s)}\right\|(d+C^0)\leq P_1L^{(s+1)}\left\|\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)-\varphi_1^{(s)}(\varphi)\right\|+$$

$$+\;P_1\left\|\omega^{(s+1)}\right\|_0+\beta\left\|\omega^{(s)}\right\|(d+C^0)\leq P_1\left\|\omega^{(s+1)}\right\|_0+$$

$$+\;\left(P_1L^{(s+1)}\alpha+\beta(d+C^0)\right)\left\|\omega^{(s)}\right\|,$$

з яких випливає рекурентна оцінка

$$\left\|\omega^{(s+1)}\right\|_0\leq\gamma\left\|\omega^{(s)}\right\|,s\in Z^+.$$

Очевидні індуктивні міркування приводять до нерівностей

$$\left\|\omega^{(s+1)}\right\|_0\leq\gamma^s\left\|\omega^{(1)}\right\|\leq\gamma^s\cdot 2d,$$

які гарантують фундаментальність послідовності $\left\{u^{(s)}(\varphi)\right\}_{s=0}^{\infty}$ у просторі $\boldsymbol{m}$. Повнота останнього завершує доведення леми 2.

За норму елемента $(\varphi,x)\in D$ приймемо вираз $\max\{\|\varphi\|,\|x\|\}$ і позначимо її через $\|(\varphi,x)\|$. Тут $\|\varphi\|$ і $\|x\|$ — норми φ та x у просторах W та $\boldsymbol{m}$ відповідно.

Лема 3. *Припустимо, що функції $a(\varphi,x)$ та $c(\varphi)$ неперервні на D та W відповідно, матрична функція $P(\varphi,x)$ неперервна на D і виконуються умови леми 2. Тоді система рівнянь (6) має обмежений напівінваріантний многовид.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varphi \in W$ і перейдемо у першій з рівностей (12) до границі послідовно при $n = 0, n = 1, n = 2, \ldots$ в процесі $s \to \infty$. Очевидно, що $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \varphi_0^{(s)}(\varphi) = \varphi$, а $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \varphi_1^{(s)}(\varphi) = \varphi + a(\varphi, u(\varphi))$ позначимо через $\varphi_1(\varphi)$.

При $n = 1$

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \varphi_2^{(s)}(\varphi) = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \varphi_1^{(s)}(\varphi) + \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} a(\varphi_1^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))) =$$

$$= \varphi_1(\varphi) + a(\varphi_1(\varphi), u(\varphi_1(\varphi)).$$

Це випливає з неперервності функції $a(\varphi, x)$ на D та збіжності за нормою простору D послідовності $\left\{\left(\varphi_1^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right)\right\}_{s=1}^{\infty}$, що забезпечується оцінкою $\|u^{(s)}(\varphi) - -u^{(s)}(\bar{\varphi})\| \leq L\|\varphi - \bar{\varphi}\| \quad \forall s \in Z^+,\ \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W$.

Справді,

$$V_1 = \left\|\left(\varphi_1^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right) - (\varphi_1(\varphi), u(\varphi_1(\varphi)))\right\| =$$

$$= \left\|(\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - u(\varphi_1(\varphi)))\right\| =$$

$$= \max\left\{\left\|\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi)\right\|, \left\|u^{(s-1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - u(\varphi_1(\varphi))\right\|\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\left\|\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi)\right\|, L\left\|\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi)\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|u^{(s-1)}(\varphi_1(\varphi)) - u(\varphi_1(\varphi))\right\|\right\}.$$

Оскільки для будь-якого як завгодно малого додатного дійсного числа ε існують такі натуральні числа N_1, N_2, N_3, що

$$\left\|\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi)\right\| \leq \varepsilon \quad \forall s \geq N_1, \qquad \left\|\varphi_1^{(s)}(\varphi) - \varphi_1(\varphi)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2L} \quad \forall s \geq N_2,$$

$$\left\|u^{(s-1)}(\varphi_1(\varphi)) - u(\varphi_1(\varphi))\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall s \geq N_3,$$

то для будь-якого $s \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ справджується оцінка $V_1 \leq \varepsilon$.

Позначимо $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \varphi_2^{(s)}(\varphi)$ через $\varphi_2(\varphi)$. Продовжуючи цей процес, одержуємо функцію $\varphi_n(\varphi)$, що є розв'язком рівняння (8), причому $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in W$.

Залишається довести рівність (7). Для цього досить перейти до границі при $s \to \infty$ в останній з рівностей (12) для кожного $n \in Z_0^+$. Цей процес не викликає труднощів. Покажемо, наприклад, що

$$P\left(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi))\right) u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)) \to P\left(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi))\right) u(\varphi_n(\varphi))$$

при $s \to \infty$ за нормою простору $\boldsymbol{m}$.

Норму різниці двох останніх добутків позначимо через V_2. Легко переконатись у виконанні нерівностей

$$V_2 = \left\| P\left(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi))\right) \right\| \left\| u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)) - u(\varphi_n(\varphi)) \right\| +$$

$$+ \left\| P\left(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi))\right) - P\left(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi))\right) \right\| \|u(\varphi_n(\varphi))\| \leq$$

$$\leq P^0 \{J_1 + J_2\} + dJ_3,$$

де

$$J_1 = \left\| u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)) - u^{(s)}(\varphi_n(\varphi)) \right\|, \quad J_2 = \left\| u^{(s)}(\varphi_n(\varphi)) - u(\varphi_n(\varphi)) \right\|,$$

$$J_3 = \left\| P(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi))) - P(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi))) \right\|.$$

Оскільки $J_1 \leq L \left\| \varphi_n^{(s)}(\varphi) - \varphi_n(\varphi) \right\|$, то $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} J_1 = 0$; $\left\| \varphi_n^{(s)}(\varphi) - \varphi_n(\varphi) \right\| \to 0$ при $s \to \infty$, як показано вище; $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} J_2 = 0$ за лемою 2, а $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} J_3 = 0$, оскільки матриця $P(\varphi, x)$ неперервна на D і послідовність $\left\{ \left(\varphi_n^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_n^{(s)}(\varphi)) \right) \right\}_{s=1}^{\infty} \subset D$ збігається при $s \to \infty$ до точки $(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi))) \in D$.

Лему 3 доведено. Зауважимо лише, що всі граничні переходи, які розглянуто в останньому доведенні, здійснюються рівномірно відносно $\varphi \in W$, якщо в умовах леми 3 функції $a(\varphi, x)$, $P(\varphi, x)$ та $c(\varphi)$ рівномірно неперервні на відповідних множинах.

Через D_0^ρ та D_ρ, де ρ — як завгодно мале додатне число, позначимо множини $\{x \in m |\ \|x\| < d + \rho\}$ та $W \times D_0^\rho$ відповідно, а через $C_W^1(\varphi)$ та $C_{D_\rho}^1(\varphi, x)$ — множини, елементами яких є функції, неперервно диференційовні за Фреше відносно φ на W та (φ, x) на D_ρ відповідно.

Надалі під похідною розумітимемо виключно похідну в сенсі Фреше. Під символом $P(\varphi, x)$ розумітимемо також відображення (матричну функцію) D_ρ у множину Γ нескінченних обмежених за нормою $\|\cdot\|$ матриць з дійсними елементами. Відображення $P(\varphi, x)$ від його значення (матриці $P(\varphi, x)$) будемо розрізняти за контекстом.

Напівінваріантний многовид системи рівнянь (6) вважатимемо гладким, якщо породжуюча ого функція $u(\varphi)$ неперервно диференційовна за Фреше на W.

Теорема 1. *Нехай матрична функція $P(\varphi, x)$ рівномірно неперервна на D_ρ і виконуються такі умови:*

1) $\left\{a(\varphi, x), P^{-1}(\varphi, x)\right\} \subset C_{D_\rho}^1(\varphi, x), c(\varphi) \in C_W^1(\varphi)$, причому для будь-яких $\varphi \in W$, $(\varphi, x) \in D_\rho$ справджуються оцінки

$$\left\| \frac{da(\varphi, x)}{d(\varphi, x)} \right\| \leq A^*, \qquad \left\| \frac{dP^{-1}(\varphi, x)}{d(\varphi, x)} \right\| \leq P_*, \qquad \left\| \frac{dc(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq C_*,$$

де A^*, P_*, C_* — додатні сталі, що не залежать від φ, x;

2) виконуються нерівності

$$P < \frac{1}{1+A^*}, \qquad \frac{C^0 P_1}{1-P_1} \le d, \qquad \eta = \frac{P_* C^0(1+A^*) + C_* P_1 A^*}{A^*(1-P_1(1+A^*))} \le 1,$$

$$\gamma = \frac{P_1 \eta A^* + P_*(d + C^0)}{1-P_1} < 1.$$

Тоді система рівнянь (6) має обмежений напівінваріантний многовид, породжуюча функція $u(\varphi)$ якого задовольняє умову Ліпшиця на W:

$$\|u(\varphi) - u(\bar\varphi)\| \le \eta \, \|\varphi - \bar\varphi\| \quad \forall \{\varphi, \bar\varphi\} \subset W.$$

Доведення. Очевидно, що в умовах сформульованої теореми функції $a(\varphi, x)$ та $\varphi(x)$ рівномірно неперервні на D_ρ та W відповідно. З опуклості множин D_ρ та W випливає існування сталих α і β, що фігурують в умові леми 2, причому $\alpha = A^*$, $\beta = P_*$. Отже, доведення теореми зводиться до обґрунтування правильності нерівності

$$\left\| u^{(s)}(\varphi) - u^{(s)}(\bar\varphi) \right\| \le \eta \, \|\varphi - \bar\varphi\| \quad \forall s \in Z_0^+, \ \{\varphi, \bar\varphi\} \subset W. \tag{14}$$

Доведення розіб'ємо на дві частини.

1. Покажемо, що нерівність (14) виконується при $s = 0$. Методом повної математичної індукції неважко переконатися, що для будь-яких $n \in Z_0^+, \varphi \in W$ існує лінійний оператор $\dfrac{d\varphi_n^{(0)}(\varphi)}{d\varphi}$, який належить простору $L(W, W)$, причому

$$\left\| \frac{d\varphi_n^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \le (1 + A^*)^n. \tag{15}$$

Обґрунтування цього твердження буде наведено в другій частині доведення теореми.

Оскільки відображення $P^{-1}(\varphi, x)$ переводить відкриту в декартовому добутку $W \times \boldsymbol{m}$ множину D_ρ в лінійний нормований простір Γ, то $\dfrac{dP^{-1}(\varphi, x)}{d(\varphi, x)}$ є лінійним оператором з простору $L(W \times m, \Gamma)$. Очевидно, що для будь-якого $i \in Z_0^+$ виконуються нерівності

$$\left\| \frac{dP^{-1}(\varphi_i^{(0)}(\varphi), 0)}{d\varphi} \right\| \le P_* \left\| \frac{d\varphi_i^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \le P_*(1 + A^*)^i,$$
$$\left\| \frac{dc(\varphi_i^{(0)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| \le C_*(1 + A^*)^i. \tag{16}$$

Оскільки добуток n матриць із Γ визначає мультилінійне відображення $\Gamma^n \to \Gamma$, то [12] існує похідна добутку $\prod\limits_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(0)}(\varphi), 0)$ відносно $\varphi \in W$, причому

$$\left\| \frac{d \prod\limits_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(0)}(\varphi), 0)}{d\varphi} \right\| \leq P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \left\| \frac{dP^{-1}(\varphi_i^{(0)}(\varphi), 0)}{d\varphi} \right\| \leq$$

$$\leq P_1^{l-1} P_* \sum_{i=0}^{l-1} (1 + A^*)^i \leq \frac{P_*}{A^*} P_1^{l-1} (1 + A^*)^l, \quad l \in Z^+. \tag{17}$$

Вираз, що стоїть під знаком суми в рівності (11), позначимо через $u_l^{(0)}$. Співвідношення (16) та (17) дають можливість записати оцінку

$$\left\| \frac{du_l^{(0)}}{d\varphi} \right\| < \frac{P_* C^0}{A^*} P_1^{l-1} (1 + A^*)^l + P_1^l C_* (1 + A^*)^{l-1}, \qquad l \in Z^+, \ \ \varphi \in W.$$

Очевидно, що для завершення доведення першого етапу досить показати, що ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \left\| \frac{du_l^{(0)}}{d\varphi} \right\|$ є збіжним рівномірно відносно $\varphi \in W$. Останнє випливає з співвідношень

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\| \frac{du_l^{(0)}}{d\varphi} \right\| < \frac{P_* C^0}{A^* P_1} \sum_{l=1}^{\infty} (P_1(1 + A^*))^l + P_1 C_* \sum_{l=1}^{\infty} (P_1(1 + A^*))^{l-1} =$$

$$= \frac{P_* C^0 (1 + A^*) P_1}{A^* P_1 (1 - P_1(1 + A^*))} + \frac{P_1 C_*}{1 - P_1(1 + A^*)} = \eta.$$

Отже, $u^{(0)}(\varphi) \in C_W^1(\varphi)$ і $\left\| \frac{du^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq \eta \ \forall \varphi \in W$, звідки завдяки опуклості W одержуємо оцінку

$$\left\| u^{(0)}(\varphi) - u^{(0)}(\bar{\varphi}) \right\| \leq \eta \left\| \varphi - \bar{\varphi} \right\|.$$

2. Доведемо, що нерівність (14) виконується при всіх $s \in Z^+$. Для цього застосуємо метод повної математичної індукції.

Нехай $s = 1$. Покажемо спочатку, що при $\eta \leq 1$

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq (1 + A^*)^i \quad \forall i \in Z_0^+. \tag{18}$$

Очевидно, що $\left\|\dfrac{d\varphi_0^{(1)}(\varphi)}{d\varphi}\right\| = \left\|\dfrac{d\varphi}{d\varphi}\right\| = 1$. При $i = 1$ справджуються співвідношення

$$\left\|\frac{d\varphi_1^{(1)}(\varphi)}{d\varphi}\right\| = \left\|\frac{d\varphi}{d\varphi} + \frac{da(\varphi_0^{(1)}(\varphi), u^{(0)}(\varphi_0^{(1)}(\varphi)))}{d\varphi}\right\| \leq$$

$$\leq 1 + A^* \max\left\{\left\|\frac{d\varphi}{d\varphi}\right\|, \left\|\frac{du^{(0)}(\varphi)}{d\varphi}\right\|\right\} \leq 1 + A^* \max\{1, \eta\},$$

тобто нерівність (18) виконується. Припустимо, що вона виконується для будь-якого $i \leq \leq k,\ k \in Z^+$. Тоді

$$\left\|\frac{d\varphi_{k+1}^{(1)}(\varphi)}{d\varphi}\right\| \leq (1 + A^*)^k + A^* \max\left\{(1 + A^*)^k, \eta(1 + A^*)^k\right\} \leq$$

$$\leq (1 + A^*)^k + A^*(1 + A^*)^k = (1 + A^*)^{k+1},$$

оскільки $\eta \leq 1$. Отже, згідно з принципом повної математичної індукції оцінка (18) справджується для будь-якого $i \in Z^+$.

Аналогічно (16), (17), для будь-якого $\varphi \in W$ одержуємо оцінки

$$\left\|\frac{d\prod\limits_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(1)}(\varphi), u^{(0)}(\varphi_i^{(1)}(\varphi)))}{d\varphi}\right\| < \frac{P_*}{A^*} P_1^{l-1}(1 + A^*)^l,$$

$$\left\|\frac{dc(\varphi_{l-1}^{(1)}(\varphi))}{d\varphi}\right\| \leq C_*(1 + A^*)^{l-1}.$$

Запишемо рівність (13) при $s = 1$:

$$u^{(1)}(\varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(1)}(\varphi), u^{(0)}(\varphi_i^{(1)}(\varphi)))c(\varphi_{l-1}^{(1)}(\varphi))$$

і вираз, що стоїть у ній під знаком суми, позначимо через $u_l^{(1)}$. Неважко переконатись, що виконується нерівність

$$\left\|\frac{du_l^{(1)}}{d\varphi}\right\| < \frac{P_* C^0}{A^*} P_1^{l-1}(1 + A^*)^l + P_1^l C_*(1 + A^*)^{l-1} \quad \forall l \in Z^+,\ \varphi \in W,$$

оскільки $\eta \leq 1$. Тоді $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \left\| \dfrac{du_l^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq \eta$, отже, $u^{(1)}(\varphi) \in C_W^1(\varphi)$, причому $\left\| \dfrac{du^{(1)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq$ $\leq \eta \quad \forall \varphi \in W$, звідки

$$\left\| u^{(1)}(\varphi) - u^{(1)}(\bar{\varphi}) \right\| \leq \eta \|\varphi - \bar{\varphi}\| \quad \forall \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W.$$

Таким чином, нерівність (14) виконується при $s = 1$. Припустимо, що нерівність

$$\left\| \frac{du^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq \eta \quad \forall \varphi \in W \tag{19}$$

справджується для всіх $s \leq k \in Z^+$. Записавши рівність (13) при $s = k + 1$, аналогічно до попередніх перетворень одержуємо оцінку (19) при $s = k + 1$. Згідно з принципом повної математичної індукції ця оцінка виконується при всіх $s \in Z^+$, що веде до правильності оцінки

$$\left\| u^{(s)}(\varphi) - u^{(s)}(\bar{\varphi}) \right\| \leq \eta \left\| \varphi - \bar{\varphi} \right\| \quad \forall \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W, s \in Z_0^+.$$

Граничний перехід в останній нерівності при $s \to \infty$ завершує доведення теореми 1.

Через $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ та $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi, x)$ позначимо підмножини з $C^1_W(\varphi)$ та $C^1_{D_\rho}(\varphi, x)$, елементи яких мають ліпшицеві похідні відносно φ та (φ, x) відповідно. Це означає, що функція $f(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтом δ, якщо

$$\left\| \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{df(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \leq \delta \left\| \varphi - \bar{\varphi} \right\| \quad \forall \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W,$$

і $f(\varphi, x) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi, x)$ з коефіцієнтом δ, якщо

$$\left\| \frac{df(\varphi, x)}{d(\varphi, x)} - \frac{df(\bar{\varphi}, \bar{x})}{d(\bar{\varphi}, \bar{x})} \right\| \leq \delta \left\| (x, \varphi) - (\bar{x}, \bar{\varphi}) \right\| \quad \forall \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W, \;\; \{x, \bar{x}\} \subset D_0^\rho,$$

де δ — додатна стала, що не залежить від $\varphi, \bar{\varphi}, x, \bar{x}$.

Лема 4. *Нехай виконуються всі умови теореми 1, причому* $\left\{a(\varphi, x), P^{-1}(\varphi, x)\right\} \subset$ $\subset C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi, x)$, $c(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ *і* $P_1(1 + A^*)^2 < 1$. *Тоді* $u^{(s)}(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi) \quad \forall s \in Z_0^+$.

Доведення. Скориставшись рівністю (13), запишемо нерівність

$$\left\| \frac{du^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{du^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \leq \sum_{i=1}^{4} J_i^{(s)}, \tag{20}$$

де

$$J_1^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \frac{d\Pi^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \left\| c(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)) - c(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar{\varphi})) \right\|,$$

$$J_2^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \Pi^{(s)}(\varphi) - \Pi^{(s)}(\bar{\varphi}) \right\| \left\| \frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar{\varphi}))}{d\bar{\varphi}} \right\|,$$

$$J_3^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \Pi^{(s)}(\varphi) \right\| \left\| \frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar{\varphi}))}{d\bar{\varphi}} \right\|,$$

$$J_4^{(s)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \frac{d\Pi^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\Pi^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \left\| c(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar{\varphi})) \right\|,$$

$$\Pi^{(s)}(\varphi) = \prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi))),$$

яка справджується для будь-яких $s \in Z_0^+,\ \{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset W$, якщо під символом $u^{(-1)}(\varphi_i^{(0)}(\varphi))$ розуміти $0 \in \boldsymbol{m}$. Індуктивними відносно $i \in Z_0^+$ міркуваннями неважко переконатись у виконанні нерівностей

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq (1 + A^*)^i,$$

$$\left\| \varphi_i^{(s)}(\varphi) - \varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi}) \right\| \leq (1 + A^*)^i \left\| \varphi - \bar{\varphi} \right\| \tag{21}$$

для всіх $s \in Z_0^+$.

У цьому випадку справджуються такі оцінки:

$$\left\| \frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| \leq C_* \left\| \frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq C_*(1 + A^*)^{l-1},$$

$$\left\| P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi))) - P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi}), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi}))) \right\| \leq$$

$$\leq P_* \max \left\{ \left\| \varphi_i^{(s)}(\varphi) - \varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi}) \right\|, \left\| u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi)) - u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi})) \right\| \right\} =$$

$$= P_*(1 + A^*)^i \left\| \varphi - \bar{\varphi} \right\|,$$

$$\left\|\Pi^{(s)}(\varphi) - \Pi^{(s)}(\bar{\varphi})\right\| \le P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \left\|P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi))) -\right.$$

$$\left. - P^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi}), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi})))\right\| \le P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} P_*(1+A^*)^i \left\|\varphi - \bar{\varphi}\right\| =$$

$$= \frac{P_*}{A^*} P_1^{l-1}(1+A^*)^l \left\|\varphi - \bar{\varphi}\right\|,$$

$$\left\|\frac{d\Pi^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}\right\| \le P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_i^{(s)}(\varphi), u^{(s-1)}(\varphi_i^{(s)}(\varphi)))}{d\varphi}\right\| \le$$

$$\le P_* P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \left\|\frac{d\varphi_i^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}\right\| \le P_* P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} (1+A^*)^i <$$

$$< \frac{P_*}{A^*} P_1^{l-1}(1+A^*)^l \quad \forall \{i, s\} \subset Z_0^+,\ l \in Z^+.$$

Ці оцінки дають можливість для $J_1^{(s)}$ та $J_2^{(s)}$ записати нерівність

$$\max\left\{J_1^{(s)}, J_2^{(s)}\right\} \le \frac{P_* C_*}{A^* P_1(1+A^*)} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l (1+A^*)^{2l} \left\|\varphi - \bar{\varphi}\right\| =$$

$$= \ = \frac{P_* C_* (1+A^*)}{A^*(1 - P_1(1+A^*)^2)} \left\|\varphi - \bar{\varphi}\right\|,$$

яка не залежить від $s \in Z_0^+$.

Оцінити $J_3^{(s)}$ та $J_4^{(s)}$ значно складніше. З (12), (21) випливають нерівності

$$\left\|\frac{d\varphi_i^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_i^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}}\right\| \le \left\|\frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}}\right\| +$$

$$+ A^* \max\left\{\left\|\frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}}\right\|, \left\|\frac{du^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{du^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar{\varphi}))}{d\bar{\varphi}}\right\|\right\} +$$

$$+ A_* \max\left\{\left\|\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi) - \varphi_{i-1}^{(s)}(\bar{\varphi})\right\|, \left\|u^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi)) - u^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar{\varphi}))\right\|\right\} \times$$

$$\times\ \max\left\{\left\|\frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|,\left\|\frac{du^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar\varphi))}{d\bar\varphi}\right\|\right\}\leq$$

$$\leq(1+A^*)\left\|\frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}-\frac{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|+A_*(1+A^*)^{2(i-1)}\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|+$$

$$+\ A^*(1+A^*)^{i-1}\left\|\frac{du^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\varphi)}-\frac{du^{(s-1)}(\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar\varphi))}{d\varphi_{i-1}^{(s)}(\bar\varphi)}\right\|,\tag{22}$$

$$\left\|\frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi}-\frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi))}{d\bar\varphi}\right\|=\left\|\frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)}\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}-\right.$$

$$\left.-\ \frac{dc(\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi))}{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)}\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|\leq C_*\left\|\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}-\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|+$$

$$+\ C^*\left\|\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)-\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)\right\|\left\|\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|\leq C_*\left\|\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}-\frac{d\varphi_{l-1}^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|+$$

$$+\ C^*(1+A^*)^{2(l-1)}\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|,\tag{23}$$

де A_* та C^* — коефіцієнти, з якими у простори $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi,x)$ та $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ входять функції $a(\varphi,x)$ та $c(\varphi)$ відповідно.

У свою чергу записуємо ланцюжок оцінок

$$\left\|\frac{d\Pi^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}-\frac{d\Pi^{(s)}(\bar\varphi)}{d\bar\varphi}\right\|\leq$$

$$\leq P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_0)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_0)}{d\bar\varphi}\right\|+P_1^{l-2}\left\|\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_0)}{d\bar\varphi}\right\|\left\|P^{-1}(\varphi_1)-P^{-1}(\bar\varphi_1)\right\|+$$

$$+\ P_1^{l-2}\left\|\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_0)}{d\bar\varphi}\right\|\left\|P^{-1}(\varphi_2)-P^{-1}(\bar\varphi_2)\right\|+\ldots$$

$$\ldots+\left\|\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_0)}{d\bar\varphi}\right\|P_1^{l-2}\left\|P^{-1}(\varphi_{l-1})-P^{-1}(\bar\varphi_{l-1})\right\|+$$

$$+\ \left\|P^{-1}(\varphi_0)-P^{-1}(\bar\varphi_0)\right\|\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_1)}{d\varphi}\right\|P_1^{l-2}+P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_1)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_1)}{d\bar\varphi}\right\|+$$

$$+\ P_1^{l-2}\left\|\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_1)}{d\bar\varphi}\right\|\left\|P^{-1}(\varphi_2)-P^{-1}(\bar\varphi_2)\right\|+\ldots$$

$$\ldots+P_1^{l-2}\left\|\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_1)}{d\bar\varphi}\right\|\left\|P^{-1}(\varphi_{l-1})-P^{-1}(\bar\varphi_{l-1})\right\|+\ldots$$

$$\ldots+\left\|P^{-1}(\varphi_0)-P^{-1}(\bar\varphi_0)\right\|P_1^{l-2}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_{l-1})}{d\varphi}\right\|+$$

$$+\ P_1^{l-2}\left\|P^{-1}(\varphi_1)-P^{-1}(\bar\varphi_1)\right\|\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_{l-1})}{d\varphi}\right\|+\ldots+P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_{l-1})}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_{l-1})}{d\bar\varphi}\right\|\le$$

$$\le P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_0)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_0)}{d\bar\varphi}\right\|+P_1^{l-2}P_*^2(1+A^*)K\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|+$$

$$+\ P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_1)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_1)}{d\bar\varphi}\right\|+P_1^{l-2}P_*^2(1+A^*)^2K\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|+\ldots$$

$$\ldots+P_1^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_{l-1})}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_{l-1})}{d\bar\varphi}\right\|+P_1^{l-2}P_*^2(1+A^*)^lK\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|=$$

$$=P_1^{l-1}\sum_{k=0}^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_k)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_k)}{d\bar\varphi}\right\|+P_1^{l-2}P_*^2(1+A^*)K^2\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|<$$

$$<P_1^{l-1}\sum_{k=0}^{l-1}\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_k)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_k)}{d\bar\varphi}\right\|+\frac{P_*^2P_1^{l-2}}{A^{*2}}(1+A^*)^{2l+1}K^2\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|,$$

де через $P^{-1}(\varphi_k)$ та $P^{-1}(\bar\varphi_k)$ позначено вирази $P^{-1}(\varphi_k^{(s)}(\varphi),u^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\varphi)))$ та $P^{-1}(\varphi_k^{(s)}(\bar\varphi),$ $u^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\bar\varphi)))$ відповідно, а через K — суму $\sum\limits_{k=0}^{l-1}(1+A^*)^k$.

Враховуючи, що

$$\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi_k)}{d\varphi}-\frac{dP^{-1}(\bar\varphi_k)}{d\bar\varphi}\right\|\le$$

$$\le P_*\left\|\frac{d\varphi_k^{(s)}(\varphi_k)}{d\varphi}-\frac{d\varphi_k^{(s)}(\bar\varphi_k)}{d\bar\varphi}\right\|+P^*(1+A^*)^{2k}\left\|\varphi-\bar\varphi\right\|+$$

$$+ \; P_*(1+A^*)^k \left\| \frac{du^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_k^{(s)}(\varphi)} - \frac{du^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\bar{\varphi}))}{d\varphi_k^{(s)}(\bar{\varphi})} \right\|,$$

де P^* — коефіцієнт, з яким $P^{-1}(\varphi, x)$ входить до $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi, x)$, маємо оцінку

$$\left\| \frac{d\Pi^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\Pi^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| < P_1^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ P_* \left\| \frac{d\varphi_k^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_k^{(s)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| + \right.$$

$$\left. + \; P^*(1+A^*)^{2k} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + P_*(1+A^*)^k \left\| \frac{du^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_k^{(s)}(\varphi)} - \frac{du^{(s-1)}(\varphi_k^{(s)}(\bar{\varphi}))}{d\varphi_k^{(s)}(\bar{\varphi})} \right\| \right\} +$$

$$+ \; \frac{P_*^2 P_1^{l-2}}{A^{*2}} (1+A^*)^{2l+1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| . \tag{24}$$

Далі застосуємо метод повної математичної індукції. Доведемо твердження леми 4 при $s = 0$. У цьому випадку з (22) одержуємо індуктивну нерівність

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_i^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \leq (1+A^*) \left\| \frac{d\varphi_{i-1}^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_{i-1}^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| +$$

$$+ \; A_*(1+A^*)^{2(i-1)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| ,$$

з якої випливають оцінки

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_i^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \leq (1+A^*) \left\{ (1+A^*) \left\| \frac{d\varphi_{i-2}^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_{i-2}^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| + \right.$$

$$\left. + \; A_*(1+A^*)^{2(i-2)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| \right\} + A_*(1+A^*)^{2(i-1)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| \leq \ldots$$

$$\ldots \leq (1+A^*)^i \left\| \frac{d\varphi_0^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_0^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| + A_* \big\{ (1+A^*)^{i-1} + (1+A^*)^i + \ldots$$

$$\ldots + \; (1+A^*)^{2(i-1)} \big\} \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \frac{A_*}{A^*} (1+A^*)^{2i-1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| .$$

Тоді, використовуючи (23), (24), записуємо нерівності

$$J_3^{(0)} < \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l \left\{ \frac{A_*}{A^*} (1+A^*)^{2l-3} + C^*(1+A^*)^{2l-2} \right\} \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \frac{P_1(A_* + A^* C^*)}{A^*(1 - P_1(1+A^*)^2)} \|\varphi - \bar{\varphi}\|,$$

$$J_4^{(0)} < \sum_{l=1}^{\infty} C^0 \left\{ P_1^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \left[P_* \left\| \frac{d\varphi_k^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_k^{(0)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| + P^*(1+A^*)^{2k} \|\varphi - \bar{\varphi}\| \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{P_*^2 P_1^{l-2}}{A^{*2}} (1+A^*)^{2l+1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| \right\} \le C^0 \left\{ \frac{P_* A_*}{A^*(1+A^*)} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} (1+A^*)^{2k} + \right.$$

$$\left. + P^* \sum_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} (1+A^*)^{2k} + \frac{P_*^2(1+A^*)}{A^{*2} P_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l (1+A^*)^{2l} \right\} \|\varphi - \bar{\varphi}\| <$$

$$< C^0 \left\{ \left(P^* + \frac{P_* A_*}{A^*(1+A^*)} \right) \frac{(1+A^*)^2}{((1+A^*)^2 - 1)(1 - P_1(1+A^*)^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{P_*^2 (1+A^*)^3}{A^{*2} P_1 (1 - P_1(1+A^*)^2)} \right\} \|\varphi - \bar{\varphi}\| .$$

Отже, враховуючи (20) та оцінки для $J_1^{(0)}$ та $J_2^{(0)}$, приходимо до висновку, що $u^{(0)}(\varphi) \in \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтом, який ми позначимо через x_0. Вираз для цього коефіцієнта досить громіздкий, і ми його не наводимо, оскільки в цьому немає потреби.

Припустимо тепер, що твердження леми 4 справджується для всіх $s \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, і позначимо через x_s коефіцієнти, з якими функції $u^{(s)}(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi),\ s \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

З (22) випливає індуктивна нерівність

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(m+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_i^{(m+1)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| \le (1+A^*) \left\| \frac{d\varphi_{i-1}^{(m+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_{i-1}^{(m+1)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| +$$

$$+ \{A_* + A^* x_m\} (1+A^*)^{2(i-1)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| ,$$

яка приводить до оцінки

$$\left\| \frac{d\varphi_i^{(m+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_i^{(m+1)}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} \right\| < \frac{A_* + A^* x_m}{A^*} (1+A^*)^{2i-1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| .$$

Застосувавши останню нерівність, неважно переконатись у ліпшицевості $J_3^{(m+1)},\ J_4^{(m+1)}$, за аналогією з попередніми викладками. Враховуючи, що $J_1^{(s)}, J_2^{(s)}$ не залежать від $s \in \in Z_0^+$, приходимо до висновку, що $u^{(m+1)}(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$, що й завершує доведення леми 4.

Тепер сформулюємо основний результат цієї роботи.

Теорема 2. *Нехай матрична функція $P(\varphi, x)$ рівномірно неперервна на D_ρ і виконуються такі умови:*

1) $\{a(\varphi,x), P^{-1}(\varphi,x)\} \subset C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi,x), c(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$, *причому справджуються оцінки*

$$\left\|\frac{da(\varphi,x)}{d(\varphi,x)}\right\| \le A^*, \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,x)}{d(\varphi,x)}\right\| \le P_*, \left\|\frac{dc(\varphi)}{d\varphi}\right\| \le C_* \quad \forall\varphi \in W, (\varphi,x) \in D_\rho,$$

де A^*, P_*, C_* *— додатні сталі, що не залежать від* φ, x*;*

2) виконуються нерівності

$$P_1 < \frac{1}{(1+A^*)^2}, \quad \frac{C^0 P_1}{1-P_1} \le d, \quad \eta = \frac{P_* C^0(1+A^*) + C_* P_1 A^*}{A^*(1-P_1(1+A^*))} \le 1,$$

$$p = \frac{P_* d + P_* C^0 + P_1 A^*}{1-P_1(1+A^*)} < 1.$$

Тоді система рівнянь (6) має обмежений напівінваріантний многовид, породжуюча функція якого $u(\varphi)$ *задовольняє на* W *умову Ліпшиця з коефіцієнтом* η*, а функції* $u^{(s)}(\varphi)$*, що визначені рівністю (13), для всіх* $s \in Z_0^+$ *належать множині* $C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$*.*

Якщо при цьому $u^{(s)}(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ *з коефіцієнтом G, який не залежить від* $s \in Z_0^+$*, то цей многовид є гладким, причому* $u(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$*.*

Доведення. Легко бачити, що в умовах теореми 2 справджуються теорема 1 та лема 4, тому обґрунтування потребує лише умова гладкості напівінваріантного многовиду системи рівнянь (6).

Для зручності різницю $\dfrac{du^{(s+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \dfrac{du^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}$ позначимо через $\varpi_1^{(s+1)},\ s \in Z_0^+$.

Використовуючи подання функції $u^{(s)}(\varphi)$ з леми 2, переконуємось, що її похідна відносно $\varphi \in W$ діє на будь-яке $\xi \in W$ таким чином:

$$\frac{du^{(s)}(\varphi)}{d\varphi}\xi = \frac{dP^{-1}(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))}{d\varphi}\xi(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - c(\varphi)) +$$

$$+\ P^{-1}(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))\frac{d(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}-(\varphi)) - c(\varphi))}{d\varphi}\xi, s \in Z^+.$$

Звідси неважко одержати рівність

$$\omega_1^{(s+1)}\xi = \frac{dP^{-1}(\varphi, u^{(s)}(\varphi))}{d\varphi}\xi\left\{u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)) - u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))\right\} +$$

$$+\ \left(\frac{dP^{-1}(\varphi, u^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{dP^{-1}(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))}{d\varphi}\right)\xi\left(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - c(\varphi)\right) +$$

$$+\ P^{-1}(\varphi, u^{(s)}(\varphi)) \left(\frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} \right) \xi +$$

$$+\ \left\{ P^{-1}(\varphi, u^{(s)}(\varphi)) - P^{-1}(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi)) \right\} \frac{d(u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - c(\varphi))}{d\varphi} \xi,$$

з якої при $\eta \leq 1$ для будь-якого $s \in Z^+$ випливає нерівність

$$\left\| \omega_1^{(s+1)} \right\| \leq P_* \left\| u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)) - u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) \right\| + \left\{ P_* \left\| \varpi_1^{(s)} \right\| + P^* \cdot 2d\gamma^{s-1} \right\} (d + C^0) +$$

$$+\ P_1 \left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| +$$

$$+\ 2dP_* \gamma^{s-1} \left(\left\| \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| + C_* \right). \tag{25}$$

Враховуючи нерівності

$$\left\| \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq 1 + \left\| \frac{da(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| \leq 1 + A^*,$$

$$\left\| u^{(s+1)}\ (\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)) - u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) \right\| \leq \left\| u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)) - u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) \right\| +$$

$$+\ \left\| u^{(s+1)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) - u^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi)) \right\| \leq \left\| \varphi_1^{(s+1)}(\varphi) - \varphi_1^{(s)}(\varphi) \right\| + \left\| \varpi^{(s+1)} \right\| \leq$$

$$\leq A^* \left\| \varpi^{(s)} \right\| + \left\| \varpi^{(s+1)} \right\| \leq 2d(\gamma + A^*)\gamma^{s-1},$$

$$\left\| \frac{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| = \left\| \frac{da(\varphi, u^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{da(\varphi, u^{(s-1)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| \leq$$

$$\leq A^* \left\| w_1^{(s)} \right\| + A_* \cdot 2d\gamma^{s-1},$$

$$\left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)} \frac{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)} \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)} \right\| \left\| \frac{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)} \right\| \left\| \frac{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\| \leq A^* \left\| w_1^{(s)} \right\| +$$

$$+ A_* 2d\gamma^{(s-1)} + \left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)} \right\| (1 + A^*),$$

$$\left\| \frac{du^{(s+1)}(\varphi_1^{(s+1)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s+1)}(\varphi)} - \frac{du^{(s)}(\varphi_1^{(s)}(\varphi))}{d\varphi_1^{(s)}(\varphi)} \right\| \leq G \left\| \varphi_1^{(s+1)}(\varphi) - \varphi_1^{(s)}(\varphi) \right\| +$$

$$+ \left\| \omega_1^{(s+1)} \right\|_0 \leq 2dG\gamma^{s-1} + \left\| \omega_1^{(s+1)} \right\|_0,$$

з (25) одержуємо індуктивну оцінку

$$\left\| \omega_1^{(s+1)} \right\|_0 \leq \xi\gamma^{s-1} + p \left\| \omega_1^{(s)} \right\|_0 \quad \forall\, s \in Z^+,\ \varphi \in W, \tag{26}$$

де $\xi = 2d\left\{ P_*(\gamma + A^*) + P^*(d + C^0) + A_* P_1 + P_1(1 + A^*)G + P_*(1 + A^* + C_*) \right\}$ — додатна стала, яка не залежить від s, φ.

Індуктивними міркуваннями неважко перевірити, що з (26) випливають співвідношення

$$\left\| \omega_1^{(s+1)} \right\|_0 \leq \xi \sum_{i=0}^{s-1} p^i \gamma^{s-i-1} + p^s \left\| \omega_1^{(1)} \right\|_0 = \xi \frac{\gamma^{s-1}\left(\left(\frac{p}{\gamma} \right)^s - 1 \right)}{\frac{p}{\gamma} - 1} +$$

$$+ p^s \left\| \omega_1^{(1)} \right\|_0 < \xi \frac{p^s}{p - \gamma} + p^s \left\| \omega_1^{(1)} \right\|_0 \leq \left(\frac{\xi}{p - \gamma} + 2 \right) p^s \xrightarrow[s \to \infty]{},$$

оскільки $\gamma < p < 1$.

У цьому випадку послідовність $\left\{ \dfrac{du^{(s)}(\varphi)}{d\varphi} \right\}_{s=1}^{\infty}$ є фундаментальною в банаховому просторі $L(W, \boldsymbol{m})$, що гарантує її збіжність за його нормою, причому ця збіжність рівномірна відносно $\varphi \in W$. Як відомо [12], границя вказаної послідовності є похідною $\dfrac{du(\varphi)}{d\varphi}$. Включення $u(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ очевидне. Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Умови леми 4 не є достатніми для існування сталої G, що фігурує в формулюванні теореми 2, оскільки послідовність $\{x_s\}_{s=0}^{\infty}$ є зростаючою, а обмеженість її з умов леми 4 не випливає. Достатніми для існування сталої G є умови, при яких для всіх

$s \in Z_0^+$ існує похідна Фреше другого порядку $\dfrac{d^2u^{(s)}(\varphi)}{d\varphi^2}$, обмежена за нормою простору $L(W, L(W, \boldsymbol{m}))$ рівномірно відносно $s \in Z_0^+$ та $\varphi \in W$. Відшукання цих умов є далеко не тривіальною задачею і може стати об'єктом окремого дослідження.

Зауваження 2. Якщо під простором W розуміти простір $\boldsymbol{m}$ і вважати функції $\alpha(\varphi, x)$, $P(\varphi, x)$, $c(\varphi)$ періодичними відносно φ^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π, де $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) = = \varphi \in \boldsymbol{m}$, то напівінваріантний многовид системи рівнянь (6) перетворюється у напівінваріантний нескінченновимірний тор.

Зауваження 3. Очевидно, що в означеннях 2 і 3 напівінваріантних многовидів умову $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in W$ можна замінити умовою $\varphi_k(\varphi) = \varphi \in W$ для довільного $k \in Z$ і одночасно множину Z_0^+ замінити множиною $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$. Це досягається зсувом нумерації $n \to n + k \ \forall n \in Z$.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 214 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
3. *Мартынюк Д. И., Кравец В. М., Жанбусинова Б. Х.* Об инвариантном торе счетной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Асимптотические методы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 77 – 87.
4. *Мартинюк Д. І., Верьовкіна Г. В.* Інваріантні множини зліченних систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. — 1997. — Вип. 1. — С. 117 – 127.
5. *Марчук Н. А.* Про існування інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, що визначена на нескінченновимірному торі і містить відхилення дискретного аргумента // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. — 2002. — Вип. 7. — С. 160 – 170.
6. *Ельназаров А. А.* Деякі питання теорії зліченних систем та асимптотичних методів: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1998. — 16 с.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
8. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 244 – 251.
9. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Предельные теоремы в теории систем разностных уравнений. — Киев, 1998. — 60 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 98. 3).
10. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Про гладкість інваріантного тора зчисленної системи рівнянь // Допов. НАН України. — 2002. — № 2. — С. 33 – 37.
11. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Про C^ρ-гладкість інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, визначеної на m-вимірному торі // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 251 – 265.
12. *Шварц Л.* Анализ. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 824 с.

Одержано 13.12.2002