УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. А. Власенко

Киев. нац. ун-т
Харьков. нац. ун-т
Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4
e-mail: Larisa.A.Vlasenko@univer.kharkov.ua

Local and global existence and uniqueness theorems for the semilinear functional differential equation $\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u_t)$ in a Banach space with parabolic sheaf $\lambda A + B$ are obtained. The operator A is allowed to be noninvertible. Abstract results are applied to partial functional differential equations.

Одержано локальні та глобальні теореми існування та єдиності для напівлінійного функціонально-диференціального рівняння $\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u_t)$ у банаховому просторі з параболічним жмутком операторів $\lambda A+B$. Оператор A може бути необоротним. Абстрактні результати застосовуються до функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Введение. Рассматривается полулинейное функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u_t), \quad \sigma < t \le \sigma + \tau_0. \tag{1}$$

Здесь $\sigma \in \mathbf{R}$, $\tau_0 > 0$, A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, с областями определения D_A, D_B соответственно; f — отображение из $[\sigma, \sigma + \tau_0] \times \Omega$ в Y (Ω — открытое множество в $C([-\omega, 0], X)$, $\omega \ge 0$). Если $u(\cdot) \in C([\sigma - \omega, \sigma + \tau_0], X)$, то для любого $t \in [\sigma, \sigma + \tau_0]$ определим $u_t(\cdot) \in C([-\omega, 0], X)$ соотношением $u_t(\tau) = u(t + \tau)$, $-\omega \le \tau \le 0$. Через $C^p(I, X)$, $p = 0, 1, \ldots$, обозначается класс X-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I \subset \mathbf{R}$; $C^0(I, X) = C(I, X)$.

Для уравнения (1) начальное условие имеет вид

$$u_\sigma = \varphi, \tag{2}$$

где $\varphi(\tau) \in C([-\omega, 0], X)$. Оператор A может иметь нетривиальное ядро, и тогда уравнение (1) будем называть *вырожденным*. В общем случае уравнение (1) является *неявным*, а если $X = Y$ и $A = E$ (тождественный оператор), то уравнение (1) — *явное*. Неявные уравнения также называют *эволюционными уравнениями типа Соболева*, чаще всего они являются невырожденными [1, 2].

Уравнение (1) охватывает различные классы дифференциальных уравнений. Если

$\omega = 0$, то уравнение (1) является неявным полулинейным уравнением

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = F(t, u(t)). \tag{3}$$

Невырожденное уравнение (3) исследовалось в работе [1], вырожденное — в работах [3, 4] (см. также библиографию в этих работах).

Другой частный случай уравнения (1) — это дифференциально-разностное уравнение или уравнение с сосредоточенными запаздываниями:

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = g(t, u(t), u(t-\omega_1(t)), \ldots , u(t-\omega_n(t))).$$

В работах [5–7] исследовалось это уравнение, когда

$$g(t, u(t), u(t-\omega_1(t)), \ldots , u(t-\omega_n(t))) = \sum_{j=1}^{n} B_j(t)u(t-\omega_j) + h(t).$$

Уравнение с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = \int\limits_{-\omega}^{0} g(t, \tau, u(t+\tau))d\tau$$

также входит в класс уравнений (1). В работе [8] изучалось уравнение, содержащее как сосредоточенное, так и распределенные запаздывания, а именно уравнение (1) с

$$f(t, u_t) = \sum_{j=1}^{n} B_j u(t-\omega_j) + \int\limits_{-\omega}^{0} B_0(\tau)u(t+\tau)d\tau.$$

Условия однозначной разрешимости уравнения (1) общего вида указаны в [9]. Там также приведены некоторые приложения к функционально-дифференциальным уравнениям в частных производных. При исследовании невырожденного уравнения (1) в [2] не налагалось условие Липшица на правую часть f уравнения (1), а требовалась компактность оператора A^{-1}. В случае $\omega = 0$, т. е. уравнения (3), такие ограничения использованы в работе [1].

2. Предварительные результаты. Линейной части уравнения (1) соответствует операторный пучок $L(\lambda) = \lambda A + B$, определенный на $D = D_A \cap D_B$. Естественно требование $D \neq \{0\}$. На множестве *регулярных точек* ϱ пучка $L(\lambda)$ определена *резольвента* $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(Y, X)$, множество ϱ открыто [10]. Здесь и в дальнейшем через $\mathcal{L}(Y, X)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов из Y в X, $\mathcal{L}(Y, Y) = \mathcal{L}(Y)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что пучок $L(\lambda)$ имеет резольвенту $R(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geq \alpha$ и оператор-функция $AR(\lambda) \in \mathcal{L}(Y)$ удовлетворяет оценке

$$\|AR(\lambda)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha, \tag{4}$$

с некоторой константой $M > 0$. Если пучок $L(\lambda)$ удовлетворяет ограничению (4), то уравнение (1) будем называть *параболическим* по аналогии с уравнением

$$u'(t) = Tu(t),$$

для которого резольвента $R_T(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T удовлетворяет ограничению [11] (гл. I, § 5)

$$\|R_T(\lambda)\| \le \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \alpha. \tag{5}$$

Из неравенства (4) следует, что резольвента $R(\lambda)$ определена в более широкой области, чем полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda \ge \alpha$, а именно в области

$$\Sigma = \left\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \ge \alpha - \beta\frac{1 + |\mathrm{Im}\,\lambda|}{M}\right\}, \qquad \beta \in (0, 1).$$

В этой области для $AR(\lambda)$, по-прежнему, имеет место оценка типа (4). Действительно, $L(\lambda) = [E + (\mathrm{Re}\,\lambda - \alpha)AR(\alpha + i\mathrm{Im}\,\lambda)]L(\alpha + i\mathrm{Im}\,\lambda)$. Отсюда видно, что при $\lambda \in \Sigma$ существует резольвента $R(\lambda) = R(\alpha + i\mathrm{Im}\,\lambda)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha - \mathrm{Re}\,\lambda)^k[AR(\alpha + i\mathrm{Im}\,\lambda)]^k$ и выполнена оценка

$$\|AR(\lambda)\| \le \frac{M_0}{1 + |\lambda|}, \quad M_0 = \frac{M}{1 - \beta}\left(1 + \frac{\beta}{M}\right).$$

В области Σ также выполнены оценки

$$\|BR(\lambda)\| \le M_0', \quad \|R(\lambda)\| \le M_0'$$

с некоторой константой $M_0' > M_0$.

Явные полулинейные параболические уравнения

$$u'(t) = Tu(t) + g(t, u(t))$$

исследовались в монографии [12] при условии, что резольвента $R_T(\lambda)$ удовлетворяет ограничению (5) в области типа Σ.

Из соотношения [10]

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)AR(\mu) = (\mu - \lambda)R(\mu)AR(\lambda), \quad \lambda, \mu \in \varrho, \tag{6}$$

следует, что $AR(\lambda)$ удовлетворяет первому резольвентному уравнению

$$AR(\lambda) - AR(\mu) = (\mu - \lambda)AR(\lambda)AR(\mu), \quad \lambda, \mu \in \varrho.$$

Поэтому оператор-функция $AR(\lambda)$ является *псевдорезольвентой* (см. определение в [13, с. 140]). Воспользуемся обобщением эргодических теорем Хилле о псевдорезольвентах

[14, с. 299–303]. Если пространство Y рефлексивно и выполнена оценка (4), то в силу следствия 1´ из [14, с. 302] (гл. VIII, § 5) справедливо прямое разложение пространства Y:

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad Y_1 = \overline{\operatorname{Im} AR(\lambda)}, \quad Y_2 = \operatorname{Ker} AR(\lambda). \tag{7}$$

Здесь $\operatorname{Im} AR(\lambda)$ — образ $AR(\lambda)$ и $\overline{\operatorname{Im} AR(\lambda)}$ — его замыкание, $\operatorname{Ker} AR(\lambda)$ — ядро $AR(\lambda)$; $\operatorname{Im} AR(\lambda)$ и $\operatorname{Ker} AR(\lambda)$ не зависят от $\lambda \in \varrho$.

Конкретный вид псевдорезольвенты $AR(\lambda)$ позволяет уточнить разложение (7). Соответствующие результаты для удобства использования сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнена оценка (4) и пространство Y рефлексивно. Тогда пространство Y распадается в прямую сумму замкнутых подпространств*

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad Y_1 = \overline{AD}, \quad Y_2 = B(\operatorname{Ker} A \cap D). \tag{8}$$

Взаимно дополнительные проекторы Q_1, Q_2 на Y_1, Y_2 соответственно представляют собой

$$Q_1 y = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha}} \lambda AR(\lambda) y, \quad Q_2 y = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha}} BR(\lambda) y, \quad y \in Y. \tag{9}$$

Линеал D распадается в прямую сумму

$$D = D_1 \oplus D_2, \quad D_1 = R(\lambda) Y_1, \quad D_2 = \operatorname{Ker} A \cap D, \tag{10}$$

при этом $R(\lambda)Y_1$ не зависит от $\lambda \in \varrho$. Взаимно дополнительные проекторы P_1, P_2 на D_1, D_2 соответственно представляют собой

$$P_1 u = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha}} \lambda R(\lambda) A u, \quad P_2 u = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha}} R(\lambda) B u, \quad u \in D. \tag{11}$$

Операторы A, B переводят D_k в Y_k, $k = 1, 2$. Пусть A_k, B_k — операторы из $D_k \subset X$ в Y_k, представляющие собой сужения соответственно операторов A, B на D_k, $k = 1, 2$. Тогда $A_2 = 0$; если $D_1 \neq \{0\}$, то существует обратный оператор A_1^{-1}; если $D_2 \neq \{0\}$, то существует ограниченный обратный оператор $B_2^{-1} \in \mathcal{L}(Y_2, X)$; оператор $T = -B_1 A_1^{-1}$ является производящим оператором аналитической полугруппы e^{Tt} класса C_0 :

$$e^{Tt} y = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} AR(\lambda) y d\lambda = \frac{1}{2\pi i} A \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda) y d\lambda, \quad y \in Y_1, \quad t > 0, \tag{12}$$

где Γ — ломаная линия в ϱ, параллельная границе области Σ, и контур Γ ориентирован так, что область $\mathbf{C} \setminus \Sigma$ при обходе контура остается слева. Для полугруппы e^{Tt} справедлива оценка

$$\|e^{Tt}\| \leq M' e^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, из оценки (4) и рефлексивности пространства Y следует разложение (7). Непосредственные вычисления показывают, что подпространства Y_1, Y_2 можно построить по формулам (8). Выражения для проекторов Q_1, Q_2 по формулам (9) следуют из леммы 2´ [14, с. 302] (гл. VIII, § 5).

Поскольку $R(\lambda)$ взаимно однозначно отображает Y на D, из разложения (8) следует разложение D в прямую сумму $D = R(\lambda)Y_1 \oplus R(\lambda)Y_2$. С помощью соотношения (6) устанавливается, что $R(\lambda)Y_1 = D_1$ не зависит от $\lambda \in \varrho$. Из вида Y_2 (8) следует, что $R(\lambda)Y_2 = \operatorname{Ker} A \cap D = D_2$. Таким образом, разложение (10) установлено.

Оператор $L(\lambda)$ для $\lambda \in \varrho$ переводит D_k в Y_k. Поскольку $AD_2 = \{0\}$, оператор B переводит D_2 в Y_2. Очевидно, что A переводит D_1 в Y_1 и, следовательно, B переводит D_1 в Y_1. Поэтому можно рассмотреть суженные операторы A_k и B_k, $k = 1, 2$. Понятно, что $A_2 = 0$. Если $D_2 \neq \{0\}$, то существует $B_2^{-1} \in \mathcal{L}(Y_2, X)$, а если $D_1 \neq \{0\}$, то существует A_1^{-1} с областью определения AD, плотной в Y_1.

В дальнейшем предполагаем, что $D_1 \neq \{0\}$. Рассмотрим пучок операторов $L_1(\lambda) = \lambda A_1 + B_1$. Для $\lambda \in \varrho$ существует $L_1(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(Y_1, X)$. Заметим, что

$$B_1 A_1^{-1} = [A_1 L_1^{-1}(\lambda)]^{-1} - \lambda E, \quad \lambda \in \varrho.$$

Поэтому оператор $T = -B_1 A_1^{-1}$, как оператор из Y_1 в Y_1, является замкнутым линейным с плотной областью определения $D_T = AD$. Нетрудно видеть, что для резольвенты $R_T(\lambda)$ оператора T справедливо представление

$$R_T(\lambda)y = -AR(\lambda)y, \quad y \in Y_1. \tag{13}$$

Поэтому если для $AR(\lambda)$ справедлива оценка (4), то для $R_T(\lambda)$ — оценка (5). Отсюда следует [11] (раздел 5, гл. I, § 3), что T является производящим оператором аналитической полугруппы e^{Tt} класса C_0. Для полугруппы справедливо представление

$$e^{Tt} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R_T(\lambda)\, d\lambda, \quad t > 0$$

[12] (раздел 1.3). Учитывая (13), получаем (12).

Теперь осталось доказать выражения для проекторов P_1, P_2 по формулам (11). Для $u \in D$ имеем

$$P_1 u = R(\alpha)Q_1 L(\alpha)u = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda\geq\alpha}} \lambda R(\alpha)AR(\lambda)L(\alpha)u = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda\geq\alpha}} \lambda R(\lambda)Au.$$

Отсюда следует

$$P_2 u = u - P_1 u = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda\geq\alpha}} [u - R(\lambda)(\lambda A + B - B)u] = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \operatorname{Re}\lambda\geq\alpha}} R(\lambda)Bu.$$

Лемма доказана.

При исследовании уравнения (1) в работе [9] предполагалось, что конечный спектр пучка $L(\lambda)$ представляет собой ограниченное множество и в точке $\mu = 0$ резольвента $(\mu B + A)^{-1}$ имеет простой полюс. Это есть частный случай оценки (4). В этом частном случае разложения типа (8), (10) установлены в [10] без требования рефлексивности пространства Y. Там также были указаны формы проекторов P_1, Q_1 в виде интегралов по контуру, охватывающему конечный спектр пучка.

3. Основные результаты. Вектор-функцию $u(t) \in C([\sigma-\omega, \sigma+\tau_0], X)$ будем называть *решением уравнения (1) на* $[\sigma, \sigma+\tau_0]$, если $u_t \in \Omega$ для $\sigma < t \le \sigma+\tau_0$, $u(t) \in D_A$ для $\sigma \le t \le \sigma+\tau_0$, $u(t) \in D_B$ для $\sigma < t \le \sigma+\tau_0$, $Au(t) \in C([\sigma, \sigma+\tau_0], Y) \cap C^1((\sigma, \sigma+\tau_0], Y)$, $Bu(t) \in C((\sigma, \sigma+\tau_0], Y)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $\sigma < t \le \sigma+\tau_0$. Если $u(t)$ также удовлетворяет условию (2), то $u(t)$ будем называть *решением задачи (1),(2) на* $[\sigma-\omega, \sigma+\tau_0]$.

Введем в рассмотрение вспомогательный оператор

$$G = A + BP_2 = A + Q_2B, \quad D_G = D.$$

Оператор G переводит D_k в Y_k, $k = 1, 2$, и имеет обратный оператор G^{-1}, определенный на $AD \oplus Y_2$. Если $D_1 \ne \{0\}$ и $D_2 \ne \{0\}$, то $G^{-1} = A_1^{-1}Q_1 + B_2^{-1}Q_2$; если $D_1 = \{0\}$, то $G^{-1} = B_2^{-1}$; если $D_2 = \{0\}$, то $G^{-1} = A_1^{-1}$. Заметим, что $G^{-1}Q_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$ и справедливо соотношение

$$G^{-1}Q_1 = R(\alpha)(\alpha E - T)Q_1 = R(\alpha)(\alpha E + BG^{-1})Q_1. \tag{14}$$

Всюду в дальнейшем непрерывность и дифференцируемость вектор-функций будем понимать в сильном смысле. Справедлива следующая глобальная теорема существования и единственности решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть пространство Y рефлексивно, $\Omega = C([-\omega, 0], X)$ и выполнена оценка (4). Предположим, что значения функции $Q_1f(t,\psi)$ принадлежат AD, функции $f(t,\psi)$ и $BG^{-1}Q_1f(t,\psi)$ непрерывны по t и удовлетворяют условиям Липшица*

$$\begin{gathered} \|f(t,\psi_1) - f(t,\psi_2)\| \le M_1 \max_{-\omega\le\tau\le 0} \|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\|, \\ \|BG^{-1}Q_1f(t,\psi_1) - BG^{-1}Q_1f(t,\psi_2)\| \le M_2 \max_{-\omega\le\tau\le 0} \|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\| \end{gathered} \tag{15}$$

для всех $\psi_1, \psi_2 \in C([-\omega, 0], X)$, $t \in [\sigma, \sigma+\tau_0]$ с константой M_1 такой, что

$$M_1\|G^{-1}Q_2\| < 1. \tag{16}$$

Тогда для любой функции $\varphi(\tau) \in C([-\omega, 0], X)$ такой , что

$$\varphi(0) \in D_A, \quad Q_2A\varphi(0) = 0, \quad \exists \lim_{t\to\sigma+0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda(t-\sigma)}R(\lambda)A\varphi(0)d\lambda = \varphi(0) - G^{-1}Q_2f(\sigma,\varphi), \tag{17}$$

существует единственное решение задачи (1),(2) на всем интервале $[\sigma-\omega, \sigma+\tau_0]$.

Замечание 1. В теоремах существования и единственности для явных уравнений (см., например, [15, 16]) никакие дополнительные ограничения на константу Липшица, соответствующую нелинейной части уравнения, не налагаются. Дополнительное ограничение (16) появляется для вырожденного уравнения, когда $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$ и, следовательно, $Q_2 \neq 0$.

Замечание 2. Если $A = E$, то предел в (17) существует и равен $\varphi(0)$. А так как $Q_2 = 0$, то условия (17) выполняются.

В силу соотношения (12) для $t > \sigma$ имеем

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda(t-\sigma)}R(\lambda)A\varphi(0)d\lambda = G^{-1}e^{T(t-\sigma)}A\varphi(0). \tag{18}$$

Если $\varphi(0) \in D$, то с использованием (14) получаем, что существует $\lim\limits_{t\to\sigma+0} I(t) = P_1\varphi(0)$. В этом случае предельное соотношение в (17) принимает вид

$$Q_2B\varphi(0) = Q_2f(\sigma,\varphi). \tag{19}$$

Такое условие было использовано в [9]. Непрерывные решения линейного уравнения были получены в [5–7] с помощью условия, аналогичного (19). При исследовании обыкновенного дифференциального уравнения (3) в работе [3] также было использовано условие типа (19). Как показывает пример из п. 4, начальные функции $\varphi(\tau)$ в общем случае не удовлетворяют ограничению $\varphi(0) \in D_B$ и, следовательно, для таких начальных функций можно рассматривать только условие (17).

Доказательство теоремы 1. При выполнении условий теоремы выполнены утверждения леммы 1. Заметим, что функции $f(t,\psi)$ и $BG^{-1}Q_1f(t,\psi)$ непрерывны на $[\sigma,\sigma+\tau_0]\times$ $\times C([-\omega,0],X)$. Если $u(t) \in C([\sigma-\omega,\sigma+\tau_0],X)$, то $f(t,u_t)$ и $BG^{-1}Q_1f(t,u_t)$ непрерывны как функции от $t \in [\sigma,\sigma+\tau_0]$.

Если функция $u(t)$ является решением задачи (1),(2) на $[\sigma-\omega,\sigma+\tau_0]$, то она удовлетворяет уравнению

$$u(t) = \Phi_1(u)(t) =$$

$$= G^{-1}\left[e^{T(t-\sigma)}A\varphi(0) + \int\limits_{\sigma}^{t} e^{T(t-s)}Q_1f(s,u_s)ds + Q_2f(t,u_t)\right], \quad \sigma < t \leq \sigma+\tau_0, \tag{20}$$

и начальному условию (2). Действительно, применим к (1) проекторы Q_1, Q_2:

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] - T[Au(t)] = Q_1f(t,u_t),$$

$$Q_2Bu(t) = Q_2f(t,u_t), \quad \sigma < t \leq \sigma+\tau_0.$$

Значения функции $Q_1 f(t, u_t)$ принадлежат D_T и $TQ_1 f(t, u_t) = BG^{-1}Q_1 f(t, u_t)$ как функция от t, непрерывная на $[\sigma, \sigma + \tau_0]$. Поэтому [11] (гл. I, § 6)

$$Au(t) = e^{T(t-\sigma)}A\varphi(0) + \int\limits_{\sigma}^{t} e^{T(t-s)}Q_1 f(s, u_s)ds, \quad \sigma \le t \le \sigma + \tau_0.$$

Отсюда следует, что $u(t)$ удовлетворяет (20). Верно и обратное, если функция $u(t) \in \in C([\sigma - \omega, \sigma + \tau_0], X)$ удовлетворяет уравнению (20) и начальному условию (2), то $u(t)$ является решением задачи (1), (2).

В пространстве $C = C([\sigma - \omega, \sigma + \tau_1], Y)$, где $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ будет определено ниже, рассмотрим замкнутое подмножество $C_\varphi = \{u(t) \in C : u_\sigma = \varphi\}$. Введем отображение Φ, определенное на функциях $u(t) \in C_\varphi$:

$$\Phi(u)(t) = \Phi_1(u)(t), \quad \sigma < t \le \sigma + \tau_1; \quad \Phi(u)(t) = \varphi(t - \sigma), \quad \sigma - \omega \le t \le \sigma. \tag{21}$$

Отображение Φ_1 определяется по формуле (20). Покажем, что Φ отображает C_φ в себя. Понятно, что $\Phi(u)(t)$ непрерывна на $[\sigma - \omega, \sigma)$ и $\Phi(u)(\sigma - 0) = \varphi(0)$. Значения функции $\Phi(u)(t)$ принадлежат D при всех $t \in (\sigma, \sigma + \tau_1]$. Функция $P_2\Phi(u)(t)$ непрерывна при $t \in \in (\sigma, \sigma + \tau_1]$ и существует предел

$$\lim_{t \to \sigma + 0} P_2\Phi(u)(t) = G^{-1}Q_2 f(\sigma, \varphi). \tag{22}$$

Воспользуемся свойствами параболической полугруппы e^{Tt} из [11] (гл. I, § 2, 6). Поскольку $Q_1 f(t, \psi)$ принимает значения в AD, с помощью (14) получаем соотношение

$$P_1\Phi(u)(t) = G^{-1}Au(t) =$$

$$= R(\alpha)\left[(\alpha E - T)e^{T(t-\sigma)}A\varphi(0) + \int\limits_{\sigma}^{t} e^{T(t-s)}(\alpha E - T)Q_1 f(s, u_s)ds\right].$$

Отсюда следует, что функция $P_1\Phi(u)(t)$ непрерывна при $\sigma < t \le \sigma + \tau_1$ и существует предел

$$\lim_{t \to \sigma + 0} G^{-1}\int\limits_{\sigma}^{t} e^{T(t-s)}Q_1 f(s, u_s)ds = 0. \tag{23}$$

С помощью предельного соотношения в (17), а также равенства (18) устанавливаем существование предела

$$\lim_{t \to \sigma + 0} P_1\Phi(u)(t) = \varphi(0) - G^{-1}Q_2 f(\sigma, \varphi).$$

Таким образом, $\Phi(u)(t) \in C((\sigma, \sigma + \tau_1], X)$ и $\lim\limits_{t \to \sigma + 0} \Phi(u)(t) = \varphi(0)$. Поэтому $\Phi(u) \in C_\varphi$.

Если $u, v \in C_\varphi$, то

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_C \leq \left(M_1' \int\limits_0^{\tau_1} e^{\alpha s} ds + M_1 \|G^{-1} Q_2\| \right) \|u - v\|_C,$$

где

$$M_1' = M' \|R(\alpha)\| (|\alpha| M_1 \|Q_1\| + M_2).$$

Выберем $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ таким образом, чтобы

$$\int\limits_0^{\tau_1} e^{\alpha s} ds < \frac{1 - M_1 \|G^{-1} Q_2\|}{M_1'}. \tag{24}$$

Тогда отображение Φ является сжимающим. Согласно теореме о сжимающем отображении Φ имеет единственную неподвижную точку $u \in C_\varphi$, которая является решением задачи (20), (2). Следовательно, как замечено в начале доказательства теоремы, эта функция является единственным решением задачи (1), (2) на $[\sigma - \omega, \sigma + \tau_1]$.

Если $\tau_1 < \tau_0$, то мы продолжим полученное решение $u(t)$ на интервал $[\sigma + \tau_1, \sigma + \tau_2]$, где $\tau_2 = \min\{2\tau_1, \tau_0\}$. Для этого рассмотрим уравнение (1) на интервале $[\sigma + \tau_1, \sigma + \tau_2]$ с начальной функцией $u_{\sigma+\tau_1}$. Поскольку $u_{\sigma+\tau_1}(0) \in D$, то в силу замечания 2 начальная функция должна удовлетворять ограничению (19), которое в этом конкретном случае принимает вид

$$Q_2 B u(\sigma + \tau_1 - 0) = Q_2 f(\sigma + \tau_1, u_{\sigma+\tau_1}).$$

Функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (20) в точке $t = \sigma + \tau_1$ и поэтому это условие выполнено. Рассуждая, как и выше, мы единственным образом продолжим решение $u(t)$ на интервал $[\sigma + \tau_1, \sigma + \tau_2]$. Понятно, что таким образом полученная функция $u(t)$ имеет следующие свойства: $u(t) \in C([\sigma - \omega, \sigma + \tau_2], X)$, $Au(t) \in C([\sigma, \sigma + \tau_2], Y) \cap C^1((\sigma, \sigma + \tau_2] \setminus \{\sigma + \tau_1\}, Y)$, $Bu(t) \in C((\sigma, \sigma + \tau_2] \setminus \{\sigma + \tau_1\}, Y)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t \in (\sigma, \sigma + \tau_2] \setminus \{\sigma + \tau_1\}$ и начальному условию (2), в точке $t = \sigma + \tau_1$ функция $Au(t)$ имеет непрерывную левую производную, а функция $Bu(t)$ непрерывна слева. Поскольку $u(\sigma + \tau_1) \in D$, в точке $t = \sigma + \tau_1$ функция $Au(t)$ имеет также непрерывную правую производную, причем правая и левая производные совпадают. Следовательно, $Au(t) \in C^1((\sigma, \sigma + \tau_2], Y)$, $Bu(t) \in C((\sigma, \sigma + \tau_2], Y)$ и уравнение (1) удовлетворяется в точке $t = \sigma + \tau_1$ также. Понятно, что за конечное число шагов мы однозначно продолжим решение на весь интервал $[\sigma - \omega, \sigma + \tau_0]$. Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть функция $\varphi(\tau) \in C([-\omega, 0], X)$ является начальной для решения $u(t)$ задачи (1), (2). Тогда $\varphi(0) \in D_A$. Далее, $Au(t) \in Y_1$ для $t > \sigma$, поэтому $A\varphi(0) = \lim\limits_{t \to \sigma + 0} Au(t) \in Y_1$. Переходя в (20) к пределу при $t \to \sigma + 0$ и используя соотношения (18), (22), (23), убеждаемся в том, что начальная функция φ удовлетворяет предельному условию в (17). Поэтому ограничения (17) в теореме 1 на начальную функцию

$\varphi(\tau) \in C([-\omega,0],X)$ являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы задача (1), (2) имела решение.

Замечание 4. Если $\varphi(0) \in D$, то полученное решение $u(t)$ является таким, что $Au(t) \in \in C^1([\sigma,\sigma+\tau_1],Y)$, $Bu(t) \in C([\sigma,\sigma+\tau_1],Y)$ и уравнение (1) также удовлетворяется при $t=\sigma$.

Мы предполагали глобальные ограничения на функцию $f(t,\psi)$ по второму аргументу $\psi \in C([-\omega,0],X)$. Локальные ограничения приводят к локальной теореме существования и единственности.

Теорема 2. *Предположим, что пространство Y рефлексивно, выполнена оценка (4) и Ω — открытый шар в $C([-\omega,0],X)$ радиуса η и с центром $\varphi(\tau) \in C([-\omega,0],X)$ таким, что выполнены соотношения (17). Пусть значения функции $Q_1 f(t,\psi)$ принадлежат AD, функции $f(t,\psi)$ и $BG^{-1}Q_1 f(t,\psi)$ непрерывны по t и удовлетворяют условиям Липшица (15) для всех $\psi_1,\psi_2 \in \Omega$, $t \in [\sigma,\sigma+\tau_0]$ с константой M_1, для которой выполнено ограничение (16). Тогда существует $\tau_1 \in (0,\tau_0]$ такое, что задача (1), (2) имеет единственное решение на $[\sigma-\omega,\sigma+\tau_1]$.*

Доказательство. Укажем, какие изменения следует сделать в доказательстве теоремы 1, чтобы доказать теорему 2.

Положим $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t-\sigma)$ для $\sigma-\omega \le t \le \sigma$ и $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(0)$ для $t > \sigma$. Пусть $0 < \eta_0 < \eta$. Поскольку $\tilde{\varphi}(t)$ равномерно непрерывна, существует $\tau_2 \in (0,\tau_0]$ такое, что $\max\limits_{-\omega\le\tau\le 0} \|\tilde{\varphi}_t(\tau) - \varphi(\tau)\| < \eta - \eta_0$ для всех $t \in (\sigma,\sigma+\tau_2]$. Число $\tau_1 \in (0,\tau_2]$ определим ниже. В пространстве $C = C([\sigma-\omega,\sigma+\tau_1],X)$ рассмотрим замкнутое подмножество $C_0 = \{u \in C_\varphi : \|u-\tilde{\varphi}\|_C \le \eta_0\}$. Выбор η_0 и $\tau_1 \le \tau_2$ обеспечивает выполнение следующего свойства: если $u \in C_0$, то $u_t \in \Omega$ для $\sigma \le t \le \sigma+\tau_1$. Из доказательства теоремы 1 следует, что отображение Φ, определенное согласно (20), (21), переводит C_0 в C_φ. Покажем, что при соответствующем выборе $\tau_1 \in (0,\tau_0]$ отображение Φ переводит C_0 в C_0. Для этого нам нужно показать, что $\|\Phi(u)(t)-\tilde{\varphi}(t)\| \le \eta_0$ при всех $t \in (\sigma,\sigma+\tau_1]$. С использованием обозначения для $I(t)$ (18), первого неравенства в (15) и условия (16) имеем

$$\|\Phi(u)(t)-\tilde{\varphi}(t)\| \le \|I(t)-\varphi(0)+G^{-1}Q_2 f(\sigma,\varphi)\| +$$

$$+ \left\| G^{-1}\int\limits_{\sigma}^{t} e^{T(t-s)}Q_1 f(s,u_s)ds \right\| +$$

$$+ \|G^{-1}Q_2 f(t,\varphi) - G^{-1}Q_2 f(\sigma,\varphi)\| +$$

$$+ \max_{-\omega\le\tau\le 0}\|\tilde{\varphi}_t(\tau)-\varphi(\tau)\| + M_1\|G^{-1}Q_2\|\eta_0 =$$

$$= I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+M_1\|G^{-1}Q_2\|\eta_0, \quad \sigma < t \le \sigma+\tau_1.$$

В силу (17), (23), а также так как $\lim\limits_{t\to\sigma+0} G^{-1}Q_2 f(t,\varphi) = G^{-1}Q_2 f(\sigma,\varphi)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ равномерно непрерывна, существует $\tau_3 \in (0, \tau_2]$ такое, что

$$I_k(t) \le (1/4)(1 - M_1 \|G^{-1}Q_2\|)\eta_0, \quad k = 1,2,3,4, \quad \sigma < t \le \sigma + \tau_3. \tag{25}$$

Поэтому если $0 < \tau_1 \le \tau_3$, то $\|\Phi(u)(t) - \tilde{\varphi}(t)\| \le \eta_0$ для $\sigma < t \le \sigma + \tau_1$ и, следовательно, Φ переводит C_0 в C_0. А если также $\tau_1 \in (0, \tau_3]$ выбрано так, что неравенство (24) выполняется, то отображение Φ является сжимающим на C_0. Поэтому существует единственная неподвижная точка $u \in C_0$ этого отображения, которая является решением задачи (1), (2) на $[\sigma - \omega, \sigma + \tau_1]$. Более того, задача (1), (2) не имеет других решений, лежащих в C_0. Чтобы завершить доказательство, осталось показать, что любое решение $u(t)$ задачи (1), (2) на $[\sigma - \omega, \sigma + \tau_1]$ принадлежит C_0. Функция $u(t)$ удовлетворяет (20) при $\sigma < t \le \sigma + \tau_1$ и поэтому

$$\|u(t) - \tilde{\varphi}(t)\| \le I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + M_1\|G^{-1}Q_2\| \|u - \tilde{\varphi}\|_C, \quad \sigma < t \le \sigma + \tau_1.$$

Поскольку $\tau_1 \le \tau_3$, то для $\sigma < t \le \sigma + \tau_1$ выполнены соотношения (25). Следовательно, $\|u - \tilde{\varphi}\|_C \le \eta_0$, что означает $u(t) \in C_0$. Теорема доказана.

В [9] были получены теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 в случае, когда оценка (4) выполнена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки ($|\lambda| \ge C$). При таком более сильном ограничении на поведение резольвенты не требуется рефлексивность пространства Y. Теоремы 1, 2 являются также новыми и для обыкновенного дифференциального уравнения (3). Уравнение (3) в случае, когда оценка (4) выполнена в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, исследовалось в [4]. Условия соответствующих теорем из [4] отличаются не только требованием $\alpha = 0$ для оценки (4). В [4] налагаются более жесткие ограничения на операторы A, B и функцию F, а именно: $D_A \subset D_B$, $\exists B^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, $Q_2 F = 0$, $u(0) \in D$ (здесь $\sigma = 0$).

4. Приложение. Любую функцию $v : t, x \to v(t, x)$ будем также рассматривать как функцию от t со значениями в пространстве функций от x и записывать как $v(t)(x)$. Описание пространств функций от t и x можно найти в [17] (раздел 1.2). Через $W_2^m = W_2^m[0, \pi]$ обозначаем пространство Соболева функций из $L_2 = L_2[0, \pi]$, для которых обобщенные производные до порядка m включительно принадлежат L_2.

Покажем, как описанные выше методы применяются к исследованию нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в частных производных на примере следующей смешанной задачи:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) + q(x) u(t, x) = f(t, x, u_t), \\
\sigma < t \le \sigma + \tau_0, \quad 0 < x < \pi, \\
u(t, 0) = u(t, \pi) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \pi) = 0, \quad \sigma < t \le \sigma + \tau_0, \\
u(t + \sigma, x) = \varphi(t, x), \quad -\omega \le t \le 0, \quad 0 \le x \le \pi.
\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь $q(x) \in W_2^2$, $\sup\limits_{0\le x\le\pi} |q(x)| = q_0$; $f(t,x,\psi)$ — функция из $[\sigma,\sigma+\tau_0]\times[0,\pi]\times C([-\omega,0],L_2)$ в $\mathbf{C}$ и $f(t,\psi)(x)$ принимает значения в L_2; $\varphi(t)(x) \in C([-\omega,0],L_2)$. В пространстве $X = Y = L_2$ смешанная задача (26) записывается в абстрактной форме (1), (2) с операторами A и B вида

$$Au = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) - u(x), \quad D_A = \{u(x) \in W_2^2, u(0) = u(\pi) = 0\},$$

$$Bu = \frac{d^4}{dx^4}u(x) + q(x)u(x), \quad D_B = \{u(x) \in W_2^4, u(0) = u(\pi) = u''(0) = u''(\pi) = 0\}.$$

Покажем, что условие (4) выполнено. Рассмотрим вспомогательные операторы

$$A_0u = -\frac{d^2}{dx^2}u(x), \quad D_{A_0} = D_A, \quad B_0u = \frac{d^4}{dx^4}u(x), \quad D_{B_0} = D_B, \quad Fu = q(x)u(x).$$

Нетрудно показать, что существует ограниченный обратный

$$(\lambda A + B_0)^{-1}u = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda k^2 - \lambda + k^4)^{-1}u_k \sin kx,$$

$$u_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} u(x)\sin kx dx, \qquad \lambda \ne \frac{k^4}{1-k^2},\ k = 2,3,\ldots .$$

Поэтому

$$\|(\lambda A + B_0)^{-1}\| \le 1, \quad \|A(\lambda A + B_0)^{-1}\| \le \frac{3}{|3\lambda + 16|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0.$$

Если $q_0 < 1$, то существует ограниченный обратный

$$(\lambda A + B)^{-1} = (\lambda A + B_0)^{-1}[E + F(\lambda A + B_0)^{-1}]^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0.$$

Тогда

$$\|A(\lambda A + B)^{-1}\| \le \frac{3}{(1-q_0)|3\lambda + 16|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0.$$

Таким образом, оценка (4) выполнена.

Заметим, что конечный спектр пучка $\lambda A + B$ не является ограниченным множеством. Поэтому нельзя воспользоваться результатами работы [9].

Находим

$$Y_1 = AD_A = \operatorname{Ker} A^{\perp}, \ Y_2 = \operatorname{Lin}\{(q(x)+1)\sin x\}, \ D_1 = D_B \cap \operatorname{Ker} A^{\perp}, \ D_2 = \operatorname{Lin}\{\sin x\}.$$

Отсюда

$$P_1u = \sum_{k=2}^{\infty} u_k \sin kx, \quad P_2u = u_1 \sin x.$$

Операторы P_1 и P_2 являются ортогональными проекторами на AD_A и $\operatorname{Ker} A$ соответственно. Оператор G допускает замкнутое расширение $\bar{G}$ на D_A:

$$\bar{G}u = u_1(1+v_1)\sin x + \sum_{k=2}^{\infty}[(k^2-1)u_k + u_1v_k]\sin kx, \quad v_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\sin x \sin kx dx.$$

Оператор $\bar{G}$ имеет ограниченный обратный $\bar{G}^{-1} \in \mathcal{L}(L_2)$, сужение которого на $AD \oplus Y_2$ есть G^{-1}:

$$\bar{G}^{-1}u = \frac{u_1}{1+v_1}\sin x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}\left(u_k - \frac{u_1v_k}{1+v_1}\right)\sin kx.$$

Вычисляем

$$Q_2u = \bar{G}P_2\bar{G}^{-1}u = u_1 \sin x + \frac{u_1}{1+v_1}\sum_{k=2}^{\infty} v_k \sin kx = \frac{u_1}{1+v_1}(1+q(x))\sin x,$$

откуда

$$Q_1u = u - Q_2u = \sum_{k=2}^{\infty}\left(u_k - \frac{u_1v_k}{1+v_1}\right)\sin kx.$$

Для любой функции $f(t,x,\psi)$ существует единственная функция $g : [\sigma, \sigma+\tau_0]\times[0,\pi]\times$ $\times C([-\omega,0],L_2) \to \mathbf{C}$ такая, что $g(t,\psi)(x) \in W_2^2$ и

$$g(t,0,\psi) = g(t,\pi,\psi) = 0, \quad \int_0^{\pi} g(t,x,\psi)\sin x dx = 0,$$

$$Q_1f(t,x,\psi) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(t,x,\psi) - g(t,x,\psi).$$

Пусть $f(t,\psi)(x) \in D_A$. Тогда $g(t,\psi)(x) \in D$ и $Q_1f(t,\psi)(x) \in AD$. Предположим также, что $f(t,\psi)(x), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\psi)(x) \in C([\sigma,\sigma+\tau_0],L_2)$ для каждой $\psi(\tau)(x) \in C([-\omega,0],L_2)$ и выполнены условия Липшица

$$\begin{gathered}\|f(t,\psi_1)(x) - f(t,\psi_2)(x)\|_{L_2} \le M_3 \max_{-\omega\le\tau\le 0}\|\psi_1(\tau)(x)-\psi_2(\tau)(x)\|_{L_2},\\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\psi_1)(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\psi_2)(x)\right\|_{L_2} \le M_4 \max_{-\omega\le\tau\le 0}\|\psi_1(\tau)(x)-\psi_2(\tau)(x)\|_{L_2}\end{gathered} \tag{27}$$

для всех $\psi_1(\tau)(x), \psi_2(\tau)(x) \in C([-\omega, 0], L_2)$, $t \in [\sigma, \sigma+\tau_0]$. Справедливо соотношение

$$BG^{-1}Q_1 f = -P_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f - \frac{f_1}{1+v_1} q(x)\sin x\right) + Q_1 f + \bar{G}^{-1}Q_1 f + F\bar{G}^{-1}Q_1 f,$$

где

$$f_1 = f_1(t,\psi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(t,x,\psi)\sin x dx.$$

Отсюда видно, что $BG^{-1}Q_1 f(t,\psi)(x)$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по $\psi \in C([-\omega, 0], L_2)$. Нетрудно оценить норму

$$\|G^{-1}Q_2\| = \frac{1}{|1+v_1|} \le \frac{1}{1-q_0}.$$

Если $\varphi(0,x) \in D_A$, то $A\varphi(0,x) \in Y_1$. Следовательно, в этом случае для $I(t)$, определяемого по формуле (18), существует $\lim\limits_{t\to\sigma+0} I(t) = \bar{G}^{-1}A\varphi(0,x) = P_1\varphi(0,x)$. Поэтому последнее соотношение в (17) принимает вид

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(0,x)\sin x dx = \frac{f_1(\sigma,\varphi)}{1+v_1}. \tag{28}$$

Таким образом, применяя теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $q(x) \in W_2^2$ *и* $q_0 = \sup\limits_{0\le x\le\pi} |q(x)| < 1$. *Предположим, что значения функции* $f(t,\psi)(x)$ *принадлежат* W_2^2, $f(t,\psi,0) = f(t,\psi,\pi) = 0$ *и выполнены условия (27) с константой* $M_3 < 1 - q_0$. *Тогда для любой функции* $\varphi(\tau,x) = \varphi(\tau)(x) \in C([-\omega,0], L_2)$ *такой, что* $\varphi(0,x) \in W_2^2$, $\varphi(0,0) = \varphi(0,\pi) = 0$ *и выполняется условие (28), смешанная задача (26) имеет единственное решение* $u(t,x)$ *на* $[\sigma-\omega, \sigma+\tau_0]$ *такое, что* $u(t)(x) \in C([\sigma-\omega,\sigma+\tau_0], L_2)$, $u(t)(x) \in W_2^4$ $(\sigma < t \le \sigma+\tau_0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t)(x) + u(t)(x) \in C([\sigma,\sigma+\tau_0], L_2) \cap C^1((\sigma,\sigma+\tau_0], L_2)$.

1. *Brill H.* A semilinear Sobolev evolution equation in a Banach Space // J. Different. Equat. — 1977. — **24**. — P. 412 – 425.
2. *Lightbourne J.H., Rankin S.M.* A partial functional differential equation of Sobolev type // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **93**. — P. 328 – 337.
3. *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 252 – 263.
4. *Favini A., Plazzi P.* Some results concerning the abstract degenerate nonlinear equation $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ // Circuits, Systems, Signal Process. — 1986. — **5**, № 2. — P. 261 – 274.
5. *Власенко Л.А.* Теоремы существования и единственности для одного неявного дифференциального уравнения с запаздываниями // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 5. — С. 624 – 628.
6. *Vlasenko L.* Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications // Math. Meth. in Appl. Sci. — 2000. — **23**, № 10. — P. 937 – 948.

7. *Favini A., Vlasenko L.* On solvability of degenerate nonstationary differential-difference equations in Banach spaces // Different. and Integr. Equat. — 2001. — **14**, № 7. — P. 883 – 896.

8. *Власенко Л.А.* О построении и росте решений вырожденных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1443 – 1451.

9. *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Об однозначной разрешимости одного вырожденного функционально-дифференциального уравнения // Допов. НАН України. — 2003. — № 3. — С. 11 – 16.

10. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. — 1975. — **11**, № 11. — С. 1996 – 2010.

11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

12. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

13. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.

14. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

15. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993. — 447 p.

16. *Travis C.C., Webb G.F.* Existence and stability for partial functional differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — **200**. — P. 395 – 418.

17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

Получено 10.05.2003