УДК 517.95

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРА СІМ'Ї ЗБУРЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ У ГУСТИХ З'ЄДНАННЯХ

Т. А. Мельник

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: melnyk@imath.kiev.ua

An abstract scheme is developed to investigate the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenvectors of some family of self-adjoint compact operators $\{\mathrm{A}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ that act in different spaces $\mathcal{H}_\varepsilon$ and cease to be compact for $\varepsilon \to 0$. The Hausdorff convergence of the spectrum of the operator A_ε to the spectrum of the limiting operator A_0 is proved. We obtain asymptotic estimates for this convergence to both the points of the discrete spectrum and the points of the essential spectrum of to operator A_0; asymptotic estimates for eigenvectors of A_ε are also obtained.

This scheme is applied to study the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of the Neumann problem in a thick singularly degenerate junction which is the union of two domains connected among themselves by an ε-periodic system of thin rods of fixed length.

Розроблено схему дослідження асимптотичної поведінки власних значень та власних векторів сім'ї самоспряжених компактних операторів $\{\mathrm{A}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, які діють у різних просторах $\mathcal{H}_\varepsilon$ і втрачають компактність у граничному переході при $\varepsilon \to 0$. Доведено хаусдорфову збіжність спектра оператора A_ε до спектра граничного оператора A_0, отримано асимптотичні оцінки цієї збіжності як до точок дискретного спектра, так і до точок істотного спектра оператора A_0 та доведено асимптотичні оцінки для власних векторів.

Показано застосування даної схеми до вивчення асимптотичної поведінки власних значень та власних функцій задачі Неймана в густому сингулярно вироджувальному з'єднанні, яке складається з двох областей, з'єднаних між собою ε-періодичною системою тонких стержнів із фіксованою довжиною.

1. Вступ. Випадки, коли істотний спектр перетворюється внаслідок збурення в чисто дискретний, виникали в багатьох задачах теорії збурення (див., наприклад, [1] (§III.4), [2] (гл. VII, прикл. 1.19), [3] (гл. XIII), [4 – 10]). Велика кількість таких задач і різних методів їх дослідження пов'язані з різними типами збурення. Більша частина цих задач з'явилася спочатку в квантовій механіці, де різним чином збурюються потенціали. Ці дослідження переважно проводилися при таких припущеннях: сильна збіжність резольвент у деякій точці (або еквівалентні умови); області визначення як для збуреного, так і для незбуреного операторів є скрізь щільними в деякому просторі. У роботах [4], [5] (розд. V.11 – V.13) при вивченні спектральних сімей автори використовували збіжність розв'язків відповідних еволюційних задач та властивості їх перетворень Фур'є та Лапласа. В роботі [10] спектральна задача в перфорованій області зводилась до вивчення послідовностей деяких операторів $\{T^{\varepsilon,K}, K \in \mathbb{N}\}$ з фіксованою областю визначення, при цьому кожна з цих послідовностей сильно збігалася до оператора $\widetilde{T}^K$ при $\varepsilon \to 0$.

У схемі, яка пропонується в даній статті, узагальнюються результати робіт [11, 12]. Для даної схеми не можна застосувати згадані вище методи, оскільки для неї не підходять відповідні припущення. За своєю ідеологією дана схема близька до схеми, запропонованої в [13] (розд. III, § 1.2), проте між ними існують принципові відмінності, які обговорюються в зауваженні 3. Більш детальний огляд робіт з спектральної теорії збурення наведено в [12].

Дана схема узагальнює та суттєво спрощує процедуру обґрунтування асимптотики власних значень та власних функцій спектральних крайових задач у густих сингулярно вироджувальних з'єднаннях різних типів. Вона може застосовуватись і до інших збурених спектральних задач; для конкретної задачі обґрунтування асимптотики полягає в перевірці умов схеми. У п. 3 це демонструється на прикладі задачі Неймана в густому з'єднанні, яке складається з двох областей, з'єднаних між собою великою кількістю тонких стержнів. Класифікація густих з'єднань та інші особливості крайових задач у густих з'єднаннях описано в роботах [14 – 19].

2. Спектральні властивості деякої послідовності операторів. ***2.1. Збурена спектральна задача.*** Спектральна теорія операторів виникла при вивченні частот власних коливань різних механічних систем. Такі коливні процеси переважно описуються такою задачею:

$$\left(\frac{d^2 J_\varepsilon U_\varepsilon}{dt^2}, J_\varepsilon v\right)_{\mathcal{V}_\varepsilon} + a_\varepsilon(U_\varepsilon, v) = 0, \quad v \in \mathcal{H}_\varepsilon, \qquad U_\varepsilon(0) = \phi_1, \quad \frac{dU_\varepsilon}{dt}(0) = \phi_2,$$

де a_ε — білінійна, симетрична, неперервна, коерцитивна форма на гільбертовому сепарабельному просторі $\mathcal{H}_\varepsilon$, $J_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_\varepsilon$ — лінійний компактний оператор, область значень якого скрізь щільна в гільбертовому просторі $\mathcal{V}_\varepsilon$, і константи C_1, C_2, C_3 в нерівностях

$$|a_\varepsilon(u,v)| \le C_1 \|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \|v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \qquad a_\varepsilon(u,u) \ge C_2 \|u\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \qquad \|J_\varepsilon u\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} \le C_3 \|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon$$

не залежать від малого параметра задачі $\varepsilon > 0$. Очевидно, що форма a_ε задає скалярний добуток на $\mathcal{H}_\varepsilon$, а відповідна норма рівномірно відносно ε еквівалентна нормі в $\mathcal{H}_\varepsilon$. Тому можна вважати, що $(u,v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} := a_\varepsilon(u,v)\ \forall\, u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon$.

Тоді відповідна задача на власні коливання (коливання вигляду $U_\varepsilon = \exp(-i\sqrt{\lambda(\varepsilon)}\, t) u^\varepsilon$) зводиться до такої спектральної задачі: знайти таке число $\lambda(\varepsilon)$ і ненульовий елемент $u^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$, які задовольняють тотожність

$$\lambda(\varepsilon)\, (J_\varepsilon u^\varepsilon, J_\varepsilon v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = (u^\varepsilon, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} \quad \forall\, v \in \mathcal{H}_\varepsilon, \tag{1}$$

при цьому елемент u^ε називається власним вектором, який відповідає власному значенню $\lambda(\varepsilon)$.

Зведемо задачу (1) до спектральної задачі для деякого лінійного самоспряженого компактного оператора. Ототожнюючи з допомогою теореми Рісса про зображення лінійного неперервного функціонала простір $\mathcal{H}_\varepsilon$ зі спряженим до нього простором $\mathcal{H}_\varepsilon^*$, а простір $\mathcal{V}_\varepsilon$ з $\mathcal{V}_\varepsilon^*$ і вважаючи, що спряжений оператор J_ε^* діє з $\mathcal{V}_\varepsilon$ в $\mathcal{H}_\varepsilon$, отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Лінійний оператор* $\mathrm{A}_\varepsilon := J_\varepsilon J_\varepsilon^* : \mathcal{V}_\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_\varepsilon$ *— самоспряжений, додатний та компактний.*

Доведення. Самоспряженість оператора A_ε випливає з тотожності, яка визначає оператор $J_\varepsilon^* : (J_\varepsilon^* v, u)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = (v, J_\varepsilon u)_{\mathcal{V}_\varepsilon} \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_\varepsilon,\ \forall\, u \in \mathcal{H}_\varepsilon$. З цієї ж тотожності випливає, що $\ker J_\varepsilon^* = 0$, оскільки множина значень оператора J_ε є щільною в $\mathcal{V}_\varepsilon$, а також, що A_ε — додатний. Компактність оператора A_ε є очевидною.

Тепер задачу (1) можна переписати, як спектральну задачу для $\mathrm{A}_\varepsilon : \lambda(\varepsilon)\mathrm{A}_\varepsilon(J_\varepsilon u) = J_\varepsilon u$. І навпаки, якщо $\lambda(\varepsilon)$ — характеристичне число оператора A_ε, а φ^ε — відповідний власний вектор, то $\lambda(\varepsilon)$ — власне значення, а $u^\varepsilon = J_\varepsilon^*\varphi^\varepsilon$ — відповідний власний вектор задачі (1):

$$(u^\varepsilon, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = (\varphi^\varepsilon, J_\varepsilon v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \lambda(\varepsilon)\left(\mathrm{A}_\varepsilon\varphi^\varepsilon, J_\varepsilon v\right)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \lambda(\varepsilon)\left(J_\varepsilon u^\varepsilon, J_\varepsilon v\right)_{\mathcal{V}_\varepsilon}.$$

Зауваження 1. Якщо $\ker J_\varepsilon = \{0\}$, то оператор A_ε можна визначити рівністю $\mathrm{A}_\varepsilon := := J_\varepsilon^* J_\varepsilon$, тобто

$$(\mathrm{A}_\varepsilon u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = (J_\varepsilon u, J_\varepsilon v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon. \tag{2}$$

Легко перевірити, що такий оператор, який діє тепер з $\mathcal{H}_\varepsilon$ в $\mathcal{H}_\varepsilon$, також є самоспряженим, додатним та компактним, а задача (1) перепишеться у вигляді $\lambda(\varepsilon)\mathrm{A}_\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) = u^\varepsilon$ в просторі $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Зауваження 2. У конкретних крайових задачах оператор J_ε — це переважно або оператор звуження, або оператор сліду, або тотожний оператор вкладення. У випадку оператора вкладення використовується попереднє зауваження для запису спектральних задач в операторній формі, оскільки такий підхід дає можливість отримувати асимптотичні оцінки відразу в енергетичному просторі $\mathcal{H}_\varepsilon$ без додаткових викладок.

Внаслідок рівномірної обмеженості норми оператора J_ε відносно параметра ε маємо $\sup_{\varepsilon>0}\|\mathrm{A}_\varepsilon\| \le C_3^2$.

Отже, всі характеристичні числа оператора A_ε можна записати у неспадну послідовність

$$0 < \frac{1}{C_3^2} \le \lambda_1(\varepsilon) \le \ldots \le \lambda_n(\varepsilon) \le \ldots \to +\infty, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

з урахуванням їхньої кратності. Відповідні власні вектори проортонормуємо таким чином:

$$(J_\varepsilon u_n^\varepsilon, J_\varepsilon u_m^\varepsilon)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \delta_{n,m}, \quad \{n,\, m\} \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

де $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

2.2. Незбурена спектральна задача. Переважно для спектральних крайових задач у густих з'єднаннях оператор A_ε відповідає початковій задачі, а незбурену спектральну задачу знаходять як границю початкової при $\varepsilon \to 0$. Часто незбурену спектральну задачу називають граничною (або усередненою), і вона зводиться до знаходження такого числа μ та вектора $u \in \mathcal{H}_0 \setminus \{0\}$, що

$$\mu\left(J_0 u, J_0 v\right)_{\mathcal{V}_0} = (u, v)_{\mathcal{H}_0} \quad \forall v \in \mathcal{H}_0, \tag{5}$$

де $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{V}_0$ — гільбертові сепарабельні простори, а оператор $J_0 : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$ є лінійним та обмеженим і його область значень є скрізь щільною в $\mathcal{V}_0$.

Далі, як і в попередньому пункті, зводимо цю задачу до спектральної задачі для лінійного, обмеженого, самоспряженого і додатного оператора A_0. Якщо $\ker J_0 \neq \{0\}$, то задача (5) зводиться до спектральної задачі $\mu \mathrm{A}_0(J_0 u) = J_0 u$ в просторі $\mathcal{V}_0$ ($\mathrm{A}_0 = J_0 J_0^*$). Якщо ж $\ker J_0 = \{0\}$, то, визначивши A_0 рівністю $(\mathrm{A}_0 u, v)_{\mathcal{H}_0} = (J_0 u, J_0 v)_{\mathcal{V}_0}$ $\forall\, u, v \in \mathcal{H}_0$, отримаємо таку спектральну задачу: $\mu \mathrm{A}_0(u) = u$ в $\mathcal{H}_0$.

Зауважимо, що якщо J_0 — компактний оператор, то й оператор A_0 є таким. У загальному випадку A_0 — некомпактний. Таким чином, при граничному переході при $\varepsilon \to 0$ втрачається компактність. Це відбувається, зокрема, для спектральних задач у густих з'єднаннях.

Зробимо припущення про структуру спектра оператора A_0 на підставі аналізу спектра усереднених спектральних задач для спектральних задач у густих з'єднаннях різних типів. Це припущення є природним, оскільки при вивченні конкретної збуреної задачі обов'язково потрібно знати структуру спектра відповідної граничної задачі.

Припустимо, що спектр $\sigma(\mathrm{A}_0)$ оператора A_0 складається з дискретної частини $\sigma_d(\mathrm{A}_0)$, куди входять скінченнократні ізольовані власні значення $\{\mu^{-1}\}$, та істотного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0) = \sigma(\mathrm{A}_0) \setminus \sigma_d(\mathrm{A}_0)$, причому можливі такі випадки їх взаємного розміщення:

1) істотний спектр складається з ізольованих точок, які розбивають власні значення на зліченну кількість незростаючих послідовностей, збіжних до відповідних точок істотного спектра (див., наприклад, [14, 15]);

2) існує скінченна кількість інтервалів, що попарно не перетинаються, на додатній півосі, на кожному з яких розміщена незростаюча послідовність власних значень, яка збігається до лівого кінця інтервалу, а доповнення до об'єднання цих інтервалів в $[0, +\infty)$ є істотним спектром (див., наприклад, [17, 19]).

Далі, для визначеності розглядаємо другий випадок, який є більш загальним і складнішим, причому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що інтервалів, де розміщений дискретний спектр, є два. Тоді власні числа оператора A_0 формують дві послідовності:

$$0 < \frac{1}{b_3} \leftarrow \ldots \leq \frac{1}{\mu_n^{(2)}} \leq \ldots \leq \frac{1}{\mu_1^{(2)}} < \frac{1}{b_2} < \frac{1}{b_1} \leftarrow \ldots \leq \frac{1}{\mu_n^{(1)}} \leq \ldots \leq \frac{1}{\mu_1^{(1)}}, \quad n \to +\infty, \tag{6}$$

а істотним спектром є об'єднання відрізків $\left[0, b_3^{-1}\right] \cup \left[b_2^{-1}, b_1^{-1}\right] =: \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)$.

Вважаємо, що відповідні власні вектори належать деякому гільбертовому простору $\mathcal{Z}_0$, який щільно та неперервно вкладений у простір $\mathcal{H}_0$, а звуження оператора J_0 на $\mathcal{Z}_0$, тобто $J_0 : \mathcal{Z}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$, є компактним оператором. Проортонормуємо власні вектори таким чином:

$$\left(J_0 v_n^{(k)}, J_0 v_m^{(k)}\right)_{\mathcal{V}_0} = \delta_{n,m}, \quad \left(J_0 v_n^{(1)}, J_0 v_m^{(2)}\right)_{\mathcal{V}_0} = 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2. \tag{7}$$

2.3. Умови зв'язку між просторами. Оскільки для задачі з п. 3 виконується умова зауваження 1, то розглянемо оператор A_ε, визначений рівністю (2). Крім описаних вище припущень вважаємо, що між просторами $\mathcal{H}_\varepsilon, \mathcal{V}_\varepsilon$ і $\mathcal{Z}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{V}_0$ та спектрами операторів A_ε і A_0 виконуються деякі умови зв'язку ($\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_6$). Перед їх формулюванням введемо додаткові позначення.

Позначимо через $N\left(\dfrac{1}{\mu}, \mathrm{A}_0\right)$ власний підпростір, який відповідає власному значенню $\dfrac{1}{\mu}$ оператора A_0; через $\{(u^\varepsilon, \lambda(\varepsilon), \Lambda) :\ \varepsilon > 0\}$ послідовність, компоненти якої є власними векторами u^ε, $\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} = 1$, та відповідними характеристичними числами (порядковим номером нехтуємо, оскільки в деяких випадках він залежить від параметра ε) оператора A_ε, а число $\Lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon)$ (внаслідок лівосторонньої нерівності в (2) $\Lambda > 0$.)

Умова D_1. Існує лінійний оператор $\mathrm{S}_\varepsilon : \mathcal{Z}_0 \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$ такий, що $\|\mathrm{S}_\varepsilon u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_1\|u\|_{\mathcal{Z}_0} \quad \forall u \in \mathcal{Z}_0$, де стала c_1 не залежить ні від ε, ні від u.

Умова D_2. Існує лінійний оператор $\mathrm{P}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{Z}_0$ такий, що

$$\forall \{(u^\varepsilon, \lambda(\varepsilon), \Lambda) :\ \varepsilon > 0\},\ \frac{1}{\Lambda} \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0), \quad \exists c_2 > 0\, \exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) :$$

$$\|\mathrm{P}_\varepsilon u^\varepsilon\|_{\mathcal{Z}_0} \le c_2(\Lambda)\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

Умова D_3. Для довільної послідовності $\{(u^\varepsilon, \lambda(\varepsilon), \Lambda) :\ \varepsilon > 0\}$, $\dfrac{1}{\Lambda} \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)$, і для довільної підпослідовності $\{\varepsilon'\}$ послідовності $\{\varepsilon\}$ такої, що $\mathrm{P}_{\varepsilon'}u^{\varepsilon'} \to u^0$ слабко в $\mathcal{Z}_0$, маємо

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\left(u^{\varepsilon'}, \mathrm{S}_{\varepsilon'}v\right)_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} = \left(u^0, v\right)_{\mathcal{H}_0} \quad \forall v \in \mathcal{Z}_0.$$

Умова D_4. Якщо для деяких векторів $w^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ $\mathrm{P}_\varepsilon w^\varepsilon \to w^0$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ і $\mathrm{P}_\varepsilon v^\varepsilon \to v^0$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\lim_{\varepsilon\to 0}(J_\varepsilon w^\varepsilon, J_\varepsilon v^\varepsilon)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \left(J_0 w^0, J_0 v^0\right)_{\mathcal{V}_0}$. Якщо $v \in \mathcal{Z}_0$, то $\mathrm{P}_\varepsilon(\mathrm{S}_\varepsilon v) \to v$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Умова D_5. Існує таке число $\delta_0 > 0$, що для довільного $\dfrac{1}{\mu} \in \sigma_d(\mathrm{A}_0)$ існує лінійний оператор $R_\varepsilon : N\left(\dfrac{1}{\mu}, \mathrm{A}_0\right) \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$ такий, що для кожного вектора $v \in N\left(\dfrac{1}{\mu}, \mathrm{A}_0\right)$, $\|J_0 v\|_{\mathcal{V}_0} = 1$,

$$R_\varepsilon v = J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v + \mathcal{O}(\varepsilon) \ \text{ в } \mathcal{V}_\varepsilon, \qquad \|R_\varepsilon v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = c_v + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

і існує така додатна константа c_3, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $\|\mu\,\mathrm{A}_\varepsilon(R_\varepsilon v) - R_\varepsilon v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_3\varepsilon^{\delta_0}$.

Умова D_6. $\exists \delta_1 > 0\ \ \forall \dfrac{1}{\mu} \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)\ \ \exists c_4 > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \ \exists w_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$, $\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \|\mu\,\mathrm{A}_\varepsilon w_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_4\varepsilon^{\delta_1}$.

Для кращого розуміння цих умов використаємо діаграму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}_\varepsilon & \xrightarrow{J_\varepsilon} & \mathcal{V}_\varepsilon & & \\
\mathrm{P}_\varepsilon\big\downarrow\ \ \big\uparrow\mathrm{S}_\varepsilon & & & & \\
\mathcal{Z}_0, & & \mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{J_0} & \mathcal{V}_0,
\end{array}$$

де вкладення $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{H}_0$ означає, що простір $\mathcal{Z}_0$ щільно і тільки неперервно вкладений у $\mathcal{H}_0$, оператор $J_0 : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$ — обмежений, а його звуження на $\mathcal{Z}_0$ є компактним. Зазначимо, що оператор P_ε не є рівномірно обмеженим за параметром ε; таким він є тільки на деяких послідовностях (див. умову D_2). Отже умови D_1 та D_2 — це умови зв'язку між просторами $\mathcal{Z}_0$ та $\mathcal{H}_\varepsilon$. Умови D_3 та D_4 вказують на те, що задача (5) є граничною задачею для задачі (1). Умови D_5 та D_6 означають, що для конкретної задачі можна побудувати асимптотичні наближення як біля точок дискретного спектра, так і біля точок істотного спектра, і нев'язки від цих наближень в задачі є малими (переважно $\delta_1 \le \delta_0$).

Зауваження 3. Прокоментуємо принципові відмінності між даною схемою і схемою в [13] (розд. III.1). По-перше, граничний оператор A_0 в [13] є компактним. По-друге, в [13] сім'я операторів $\{\mathrm{A}_\varepsilon\}$ є рівномірно обмеженою. Фактично ця умова для спектральних задач в областях, залежних від малого параметра ε, означає, що існує рівномірно обмежений відносно ε оператор продовження в область, яка не залежить від ε. Виявляється (див. [14–16]), що для густих з'єднань операторів продовження з такими властивостями не існує і в даній схемі використовується його ерзац — оператор P_ε. По-третє, в запропонованій схемі немає аналогії до умови C_3 з [13]. І нарешті, в схемі з [13] розглядається тільки два простори H_ε та H_0, де діють оператори A_ε і A_0 відповідно.

Далі будемо використовувати таку лему.

Лема [20]. *Нехай B — самоспряжений компактний оператор у гільбертовому просторі H. Якщо існують число $\mu > 0$ і вектор $u \in H$ такі, що $\|Bu - \mu u\|_H \le \alpha, \quad \alpha > 0,$ то знайдеться таке власне значення μ_n оператора B, що $|\mu_n - \mu| \le \alpha$. Крім того, для будь-якого $d > \alpha$ існує вектор U, $\|U\|_H = 1$, такий, що $\|u - U\|_H \le 2d^{-1}\alpha$, де U — лінійна комбінація власних векторів оператора B, які відповідають власним значенням B з відрізка $[\mu - d, \mu + d]$.*

2.4. Низькочастотна збіжність. Власні коливання, які відповідають власним частотам $\{\sqrt{\lambda_n(\varepsilon)}\}$ при фіксованому значенні індексу n, називаються *низькочастотними коливаннями*, а відповідні частоти — *низькими частотами*. Введемо нову характеристику для низьких частот.

Означення. *Величина $\mathcal{T} := \sup_{n\in\mathbf{N}} \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \lambda_n(\varepsilon)$ називається порогом низьких власних частот для задачі (1).*

Теорема 1. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n(\varepsilon) \to \mu_n^{(1)}$ при $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{T} = b_1$. Існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}$ послідовності $\{\varepsilon\}$ така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{P}_{\varepsilon'} u_n^{\varepsilon'} \to \widetilde{v}_n^{(1)}$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ при $\varepsilon' \to 0$, де $\{\widetilde{v}_n^{(1)}\}$ — власні вектори усередненої задачі (5), вони відповідають характеристичним числам $\mu_n^{(1)}$ з послідовності (6) і задовольняють умову (7).*

Доведення. 1. Візьмемо довільне власне значення $\mu_n^{(1)}$ задачі (5) і відповідний власний вектор $v_n^{(1)}$, який нормований умовою (7). Згідно з умовою D_5 існує вектор $R_\varepsilon^n := R_\varepsilon v_n^{(1)} \in \mathcal{H}_\varepsilon$ такий, що $R_\varepsilon^n = J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v_n^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ в $\mathcal{V}_\varepsilon$, $\|R_\varepsilon^n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = c_n + \mathcal{O}(\varepsilon)$, і

$$\| \mu_n^{(1)} \mathrm{A}_\varepsilon(R_\varepsilon^n) - R_\varepsilon^n \|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_3 \varepsilon^{\delta_0}. \tag{8}$$

Внаслідок умови D_4 маємо $\lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v_n^{(1)}\|^2_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \|J_0 v_n^{(1)}\|^2_{\mathcal{V}_0} = 1$. Оскільки оператор J_ε рівномірно обмежений відносно параметра ε, то

$$0 < c_0 \le \|J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v_n^{(1)}\|^2_{\mathcal{V}_\varepsilon} \le C_3 \|R_\varepsilon^n\|^2_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c'_n, \tag{9}$$

де c_0 не залежить ні від ε, ні від $v_n^{(1)}$. Тепер, враховуючи (9), з (8) виводимо

$$\left\| \mathrm{A}_\varepsilon \left(\frac{R_\varepsilon^n}{\|R_\varepsilon^n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} \right) - \frac{1}{\mu_n^{(1)}} \frac{R_\varepsilon^n}{\|R_\varepsilon^n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq \ c\, \varepsilon^{\delta_0}. \tag{10}$$

З (10) і першої частини наведеної леми [20] робимо висновок, що в будь-якому малому околі кожного власного значення $\left(\mu_n^{(1)}\right)^{-1}$ оператора A_0 міститься деяке власне значення оператора A_ε. Оскільки на інтервалі $(0, b_1)$ міститься зліченна кількість характеристичних значень $\{\mu_n^{(1)}\}$ оператора A_0, то поріг низьких частот $\mathcal{T}$ задачі (1) не буде перевищувати b_1. Враховуючи це і умову (4), з тотожності (1) отримуємо $\|u_n^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c(n)$.

На підставі цієї нерівності і умови D_2 діагональним процесом вибираємо підпослідовність послідовності $\{\varepsilon\}$, яку знову перепозначимо через $\{\varepsilon\}$, таку, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $\lambda_n(\varepsilon) \to \lambda_n^*$, і $\mathrm{P}_\varepsilon u_n^\varepsilon \to \widetilde{v}_n^{(1)}$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Оскільки $\mathcal{T} \leq b_1$, то $0 < C_3^{-2} \leq \lambda_1^* \leq \ldots \leq \lambda_n^* \leq \ldots \leq b_1$.

Переходячи до границі в (4) і враховуючи умову D_4, одержуємо $(J_0\widetilde{v}_n^{(1)}, J_0\widetilde{v}_m^{(1)})_{\mathcal{V}_0} = \delta_{n,m}$, $\{n, m\} \in \mathbb{N}$, звідки $\widetilde{v}_n^{(1)} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Візьмемо в тотожності (1) пробну функцію v з $\mathcal{Z}_0$ і, скориставшись оператором S_ε, перепишемо її у вигляді

$$\lambda_n(\varepsilon)\, (J_\varepsilon u_n^\varepsilon, J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} \ = \ (u^\varepsilon, \mathrm{S}_\varepsilon v)_{\mathcal{H}_\varepsilon}\,. \tag{11}$$

Для знаходження границі лівої частини рівності (11) при $\varepsilon \to 0$ використаємо умову D_4, а для правої частини — умову D_3. В результаті отримаємо

$$\lambda_n^* \left(J_0\widetilde{v}_n^{(1)}, J_0 v \right)_{\mathcal{V}_0} = \left(\widetilde{v}_n^{(1)}, v \right)_{\mathcal{H}_0} \quad \forall\, v \in \mathcal{Z}_0.$$

Таким чином, оскільки $\mathcal{Z}_0$ щільно вкладений в $\mathcal{H}_0$, то λ_n^* — власне значення незбуреної задачі (5), а $\widetilde{v}_n^{(1)}$ — відповідний власний вектор, нормований умовою (7). Крім того, це власне значення міститься в першій серії (6).

2. Для завершення доведення залишається показати, що $\lambda_n^* = \mu_n^{(1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Для цього достатньо довести, що якщо $\mu_k^{(1)} = \mu_{k+1}^{(1)} = \ldots = \mu_{k+r-1}^{(1)}$ — характеристичне значення оператора A_0 кратності r, то існує рівно r характеристичних значень оператора A_ε з урахуванням кратності, які збігаються до $\mu_k^{(1)}$ при $\varepsilon \to 0$.

Припустимо, що існує q характеристичних чисел $\{\lambda_{n_i}(\varepsilon) : i = 1, \ldots, q\}$ оператора A_ε, які збігаються до $\mu_k^{(1)}$, і $q > r$. Тоді, повторюючи попередні міркування, одержуємо для відповідних власних векторів, що $\mathrm{P}_\varepsilon u_{n_i}^\varepsilon \to \widetilde{v}_{n_i}$ слабко в $\mathcal{Z}_0$ при $\varepsilon \to 0$, $i = 1, \ldots, q$, де $\{\widetilde{v}_{n_i} : i = 1, \ldots, q\}$ — власні вектори задачі (5), що задовольняють рівності (7). Отже, $\mu_k^{(1)}$ — характеристичне число кратності q.

Тепер припустимо, що $q < r$. Застосовуючи до (10) при $n = k + i$ другу частину наведеної леми [20], одержуємо, що існує лінійна комбінація

$$U_\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}(\varepsilon) u_{n_j}^\varepsilon, \qquad 0 < c_1 \leq \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}^2(\varepsilon) \leq c_2,$$

власних векторів оператора A_ε така, що

$$\left\| J_\varepsilon \left(R_\varepsilon^{k+i} - U_\varepsilon^{(i)} \right) \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} \le c_i \varepsilon^{\delta_0}, \quad i = 0, \ldots , r-1.$$

Переходячи до границі в останній нерівності по деякій підпослідовності послідовності $\{\varepsilon\}$, отримуємо на основі умови D_4 рівності

$$J_0 v_{k+i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}^* J_0 \widetilde{v}_{n_j} \qquad \left(0 < c_1 \le \sum_{j=1}^{q} (\alpha_{ij}^*)^2 \le c_2 \quad i = 0, \ldots , r-1 \right),$$

які суперечать лінійній незалежності векторів $J_0 v_k^{(1)}, J_0 v_{k+1}^{(1)}, \ldots , J_0 v_{k+r-1}^{(1)}$ (r лінійно незалежних векторів виражаються через q $(q < r)$ лінійно незалежних векторів).

Оскільки ці міркування правильні для будь-якої підпослідовності послідовності $\{\varepsilon\}$, вибраної на початку доведення, то $\lambda_n(\varepsilon) \to \mu_n^{(1)}$ при $\varepsilon \to 0$.

2.5. Хаусдорфова збіжність спектра. Нижче буде показано, що існують інші збіжні при $\varepsilon \to 0$ послідовності характеристичних чисел $\{\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\}$, границею яких можуть бути тільки точки множини $[b_1, b_2] \cup \{\mu_n^{(2)} : n \in \mathbb{N}\} \cup [b_3, +\infty)$. Відповідні коливання називаються *високочастотними коливаннями*.

Теорема 2. *Спектр оператора A_ε збігається до спектра оператора A_0 в хаусдорфовому розумінні, тобто:*

1) $\forall\ \dfrac{1}{\mu} \in \sigma(\mathrm{A}_0)\ \ \exists\ \dfrac{1}{\lambda(\varepsilon)} \in \sigma(\mathrm{A}_\varepsilon) :\ \lambda(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$;

2) якщо $\dfrac{1}{\lambda(\varepsilon)} \in \sigma(\mathrm{A}_\varepsilon)$ і $\lambda(\varepsilon) \to \Lambda$ при $\varepsilon \to 0$, то $\dfrac{1}{\Lambda} \in \sigma(\mathrm{A}_0)$.

Доведення. Перше твердження випливає з умов D_5, D_6 та першої частини наведеної леми [20]. Друге твердження доведемо від супротивного. Припустимо, що $\dfrac{1}{\Lambda} \notin \sigma(\mathrm{A}_0)$, а отже, $\dfrac{1}{\Lambda} \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)$ і $\dfrac{1}{\Lambda} \ne 0$ (див. (3)).

Розглянемо відповідну послідовність $\{(u^\varepsilon, \lambda(\varepsilon), \Lambda) : \varepsilon > 0\}$. Згідно з умовою D_2 існує вектор $\mathrm{P}_\varepsilon u^\varepsilon \in \mathcal{Z}_0$ такий, що при достатньо малих значеннях параметра ε виконується нерівність $\|\mathrm{P}_\varepsilon u^\varepsilon\|_{\mathcal{Z}_0} \le c_1(\Lambda) \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}$.

Оскільки $\|J_\varepsilon u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} = 1$ і послідовність $\{\lambda(\varepsilon)\}$ обмежена, то з (1) випливає $\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le \lambda(\varepsilon) \le c$. Тому існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}$ така, що $\mathrm{P}_{\varepsilon'} u^{\varepsilon'} \to u^0$ слабко в $\mathcal{Z}_0$.

Далі, як і в першій частині теореми 1, доводимо, що $u^0 \ne 0$ і u^0 — власний вектор, який відповідає власному значенню Λ задачі (5), тобто $\dfrac{1}{\Lambda} \in \sigma(\mathrm{A}_0)$, а це — суперечність.

2.6. Асимптотичні оцінки.

Теорема 3. *Нехай $\mu_n^{(1)} = \mu_{n+1}^{(1)} = \ldots = \mu_{n+r-1}^{(1)}$ — r-кратне власне значення задачі (5) з першої серії (6); $v_n^{(1)}, \ldots , v_{n+r-1}^{(1)}$ — відповідні лінійно незалежні власні вектори, які ортонормовані умовою (7).*

Тоді існують константи $\varepsilon_0,\ C_i(n), c_0$ та $\{\alpha_{ik}(\varepsilon)\}$ такі, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконуються нерівності

$$\left\| R_\varepsilon^{(n+i)} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{ik}(\varepsilon) u_{n+k}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le C_i(n)\, \varepsilon^{\delta_0}, \tag{12}$$

$$0 < c_1 \le \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{ik}^2(\varepsilon) \le c_2, \ i = \overline{0, r-1},$$

де $R_\varepsilon^{(n+i)} = R_\varepsilon\left(v_{n+i}^{(1)}\right)$.

Для власних значень справджуються такі оцінки:

$$|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n^{(1)}| \ \le \ c(n)\,\varepsilon^{\delta_0}. \tag{13}$$

Доведення. Застосовуючи до нерівності (10) (при $n = n + i$) другу частину наведеної леми [20] з числом

$$d = \frac{1}{4}\min\left\{\left|\frac{1}{\mu_n^{(1)}} - \frac{1}{\mu_{n-1}^{(1)}}\right|, \ \left|\frac{1}{\mu_n^{(1)}} - \frac{1}{\mu_{n+r}^{(1)}}\right|\right\}$$

і враховуючи теорему 1, отримуємо

$$\left\|\frac{R_\varepsilon^{(n+i)}}{\|R_\varepsilon^{(n+i)}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} - U_\varepsilon^{(i)}\right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le 2d^{-1}c(i)\,\varepsilon^{\delta_0}, \qquad \|U_\varepsilon^{(i)}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1, \tag{14}$$

де $U_\varepsilon^{(i)}$ — лінійна комбінація власних векторів $u_{n+i}^\varepsilon, \ i = \overline{0, r-1}$. З (14) та (9) випливає перше твердження даної теореми.

Оскільки власні функції $J_0 v_n^{(1)}, \ldots, J_0 v_{n+r-1}^{(1)}$ оператора A_0 утворюють скінченний ортонормований базис у власному підпросторі $N\big((\mu_n^{(1)})^{-1}, \mathrm{A}_0\big)$, то внаслідок умови D_5 для довільної $v \in \mathcal{L}(v_n^{(1)}, \ldots, v_{n+r-1}^{(1)}), \ \|J_0 v\|_{\mathcal{V}_0} = 1$

$$\|\mu \mathrm{A}_\varepsilon(R_\varepsilon v) - R_\varepsilon v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c_{\max}(n)\varepsilon^{\delta_0}, \tag{15}$$

де константа $c_{\max}(n)$ не залежить ні від ε, ні від v.

Покажемо, що на відрізку

$$I(\varepsilon) = \left\{\mu : \ \left|\mu - \mu_n^{(1)}\right| \le c_0(n)\,\varepsilon^{\delta_0}\right\},$$

де $c_0(n) = 2\sqrt{\mu_{n+r}^{(1)}}\, c_{\max}(n)$, міститься рівно r характеристичних чисел оператора A_ε.

Згідно з теоремою 1 це можуть бути лише такі характеристичні значення: $\lambda_{n+i}(\varepsilon), \ i = 0, \ldots, r-1$. Припустивши, що при достатньо малих значеннях параметра ε їх є менше (не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\lambda_{n+r-1}(\varepsilon)$ не попадає в цей відрізок), отримаємо, що існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}$ така, що

$$\mathrm{P}_{\varepsilon'}\left(u_{n+r-1}^{\varepsilon'}\right) \to \widetilde{v}_{n+r-1}^{(1)} \quad \text{слабко в} \quad \mathcal{Z}_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0, \tag{16}$$

де $\widetilde{v}_{n+r-1}^{(1)}$ — деякий власний вектор задачі (5) такий, що $\|J_0 v\|_{\mathcal{V}_0} = 1$, який належить лінійній оболонці $\mathcal{L}(v_n^{(1)}, \ldots, v_{n+r-1}^{(1)})$.

Розглянемо вектор $R_{\varepsilon'}\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1}$ замість v в умові D_5. Використовуючи означення оператора A_ε (див. (2)) з (1) виводимо рівність

$$(\lambda_{n+r-1}(\varepsilon') - \mu_n^{(1)}) \left(J_\varepsilon R_{\varepsilon'}\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} \,,\; J_\varepsilon u^{\varepsilon'}_{n+r-1} \right)_{\mathcal{V}_{\varepsilon'}} =$$

$$= \left(R_{\varepsilon'}\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} - \mu_n^{(1)} \mathrm{A}_{\varepsilon'}(R_{\varepsilon'}\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1}) \,,\; u^{\varepsilon'}_{n+r-1} \right)_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}}. \qquad (17)$$

З умови D_4 на підставі (16) і того, що $R_\varepsilon\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} = J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon \widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ в $\mathcal{V}_\varepsilon$, робимо висновок, що

$$\left(J_\varepsilon R_{\varepsilon'}\widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} \,,\; J_\varepsilon u^{\varepsilon'}_{n+r-1} \right)_{\mathcal{V}_{\varepsilon'}} = \left\| J_0 \widetilde{v}^{(1)}_{n+r-1} \right\|^2_{\mathcal{V}_0} + \alpha_{\varepsilon'} = 1 + \alpha_{\varepsilon'} > \frac{1}{2} \qquad (18)$$

при достатньо малих значеннях параметра ε; тут $\alpha_{\varepsilon'} \to 0$ при $\varepsilon' \to 0$. Беручи до уваги (18), з (17) виводимо

$$\left| \lambda_{n+r-1}(\varepsilon') - \mu_n^{(1)} \right| \le 2c_{\max}(n) \left(\varepsilon' \right)^{\delta_0} \|u^{\varepsilon'}_{n+r-1}\|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} \le c_0(n) \left(\varepsilon' \right)^{\delta_0},$$

тобто $\lambda_{n+r-1}(\varepsilon') \in I(\varepsilon')$, а це суперечить нашому припущенню.

Зауваження 4. Згідно з умовою D_5 $R_\varepsilon \left(v^{(1)}_{n+i} \right) = J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon \left(v^{(1)}_{n+i} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ в $\mathcal{V}_\varepsilon$. Тому, враховуючи рівномірну обмеженість оператора $J_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_\varepsilon$ відносно ε і той факт, що $\delta_0 > 0$, з (12) отримуємо

$$\left\| J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon v^{(1)}_{n+i} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{ik}(\varepsilon) J_\varepsilon u^\varepsilon_{n+k} \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} \le C_i(n)\varepsilon^{\delta_0}, \quad i = \overline{0, r-1}. \qquad (19)$$

Наступна теорема уточнює асимптотичну поведінку характеристичних чисел оператора A_ε біля точок послідовності $\{\mu_n^{(2)} : n \in \mathbb{N}\}$ з (6).

Теорема 4. *Нехай $\mu_n^{(2)} = \mu_{n+1}^{(2)} = \ldots = \mu_{n+r-1}^{(2)}$ — r-кратне власне значення задачі (5) з другої серії (6); $v_n^{(2)}, \ldots, v_{n+r-1}^{(2)}$ — відповідні лінійно незалежні власні вектори, які нормовані умовою (7).*

Тоді існують константи ε_m та $c_3(m)$ такі, що для всіх значень параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ в інтервалі $I_m(\varepsilon) = \left(\mu_m^{(2)} - c_3\varepsilon^{\delta_0} \,,\; \mu_m^{(2)} + c_3\varepsilon^{\delta_0} \right)$ міститься r власних значень задачі (1).

Для власних векторів мають місце такі асимптотичні оцінки:

$$\left\| \frac{R_\varepsilon(v^{(2)}_{m+i})}{\|R_\varepsilon(v^{(2)}_{m+i})\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} - \widetilde{U}^{(i)}_\varepsilon \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \le c(m)\, \varepsilon^{\delta_0}, \quad i = 0, \ldots, r-1, \qquad \|\widetilde{U}^{(i)}_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1, \qquad (20)$$

де $\widetilde{U}^{(i)}_\varepsilon$ — лінійна комбінація власних векторів задачі (1), які відповідають всім власним числам з інтервалу $I_m(\varepsilon)$.

Доведення. Воно базується на аргументах попередніх теорем. Припустимо, що при достатньо малих значеннях параметра ε існує q характеристичних чисел $\{\lambda_{n_i(\varepsilon)}(\varepsilon) : i = 1, \ldots, q\}$ оператора A_ε, які збігаються до $\mu_m^{(2)}$. Тоді згідно з умовою D_2 $\|\mathrm{P}_\varepsilon u^\varepsilon_{n_i(\varepsilon)}\|_{\mathcal{Z}_0} \leq c_1(\mu_m^{(2)})\, \|u^\varepsilon_{n_i(\varepsilon)}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, q$.

Як і в другому пункті теореми 1, доводимо, що $q = r$. Далі доведення повністю повторює доведення теореми 3.

Зауваження 5. Фактично асимптотична оцінка (19) — це оцінка розхилу між підпростором $J_\varepsilon \mathrm{S}_\varepsilon\left(N\left(\dfrac{1}{\mu_n^{(1)}}, \mathrm{A}_0\right)\right)$ та підпростором, натягнутим на власні вектори оператора A_ε, для яких відповідні власні значення прямують до $\dfrac{1}{\mu_n^{(1)}}$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогічні оцінки можна отримати з (20). Якщо в теоремах 3 або 4 власні значення задачі (5) є простими, то оцінки (12), (19) та (20) — асимптотичні оцінки для власних векторів задачі (1). Переважно норма в $\mathcal{H}_\varepsilon$ є енергетичною нормою, і для багатьох задач оцінки в енергетичній нормі є критерієм того, що знайдена гранична задача — „справжня".

Для отримання асимптотичних оцінок біля істотного спектра потрібно скористатись умовою D_6, з якої одержуємо нерівність

$$\left\| \mathrm{A}_\varepsilon\Big(\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}}\Big) - \frac{1}{\mu}\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c\,\varepsilon^{\delta_1}.$$

Застосовуючи до неї наведену лему [20] з константою $d = c\varepsilon^{\delta_1/2}$, отримуємо теорему.

Теорема 5. *Для всіх* $\dfrac{1}{\mu} \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)$ *існують* $c > 0$ *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *в інтервалі* $I_\mu(\varepsilon) = \left(\dfrac{1}{\mu} - c\varepsilon^{\delta_1}, \dfrac{1}{\mu} + c\varepsilon^{\delta_1}\right)$ *міститься скінченне число власних значень оператора* A_ε.

Існує скінченна лінійна комбінація $\widetilde{U}_\varepsilon$ $\left(\|\widetilde{U}_\varepsilon\|^2_\varepsilon = 1\right)$ *власних векторів* $u^\varepsilon_{k(\varepsilon)+i}$, $i = 0, \ldots, p(\varepsilon)$, *які відповідають відповідно всім власним значенням* $\lambda^{-1}_{k(\varepsilon)+i}(\varepsilon)$ *оператора* A_ε *з відрізка* $\left[\dfrac{1}{\mu} - c\varepsilon^{\delta_1/2}, \dfrac{1}{\mu} + c\varepsilon^{\delta_1/2}\right]$, *така, що*

$$\left\| \frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} - \widetilde{U}_\varepsilon \right\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq 2\varepsilon^{\delta_1/2}.$$

Зауваження 6. Таким чином, при достатньо малих значеннях параметра ε спостерігається згущення власних значень оператора A_ε біля спектра оператора A_0. При фіксованому значенні індексу n має місце збіжність $\lambda_n(\varepsilon) \to \mu_n^{(1)}$ при $\varepsilon \to 0$. Зрозуміло, що ця збіжність не є рівномірною відносно n. Згідно з теоремами 2, 4 та 5, як для кожного числа $\mu_0 = \mu_n^{(2)}$ з другої серії (6), так і для числа $\dfrac{1}{\mu_0} \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}_0)$, існує послідовність характеристичних чисел оператора A_ε така, що $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon) \to \mu_0$ при $\varepsilon \to 0$; тому $n(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

3. Спектральна задача Неймана в плоскому густому з'єднанні, яке складається з двох тіл, з'єднаних тонкими стержнями. Модельне густе з'єднання Ω_ε складається з двох областей (тіл з'єднання) $\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < \gamma^+(x_1)\}$, $\Omega_{-1} = \{x : \ 0 < x_1 < a, \ -\gamma^-(x_1) < x_2 < -1\}$ та великої кількості N тонких стержнів

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_\varepsilon^j, \quad G_\varepsilon^j = \left\{ x : \ \left| x_1 - \varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon \frac{h}{2}, \ x_2 \in (-1, 0) \right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

тобто Ω_ε — внутрішність об'єднання $\overline{\Omega_0} \cup \overline{G_\varepsilon} \cup \overline{\Omega_{-1}}$. Тут $\gamma^\pm$ — додатні неперервно диференційовні функції на відрізку $[0, a]$, h — фіксоване число з інтервалу $(0, 1)$; N — велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = a/N$ — малий дискретний параметр, який характеризує відстань між тонкими стержнями та їх товщину.

У Ω_ε розглядається спектральна задача Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta_x \, u(\varepsilon, x) &= \lambda(\varepsilon) \, u(\varepsilon, x), && x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu \, u(\varepsilon, x) &= 0, && x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{21}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial_\nu$ — зовнішня нормальна похідна.

При кожному фіксованому значенні параметра ε число $\lambda(\varepsilon)$ будемо називати власним значенням задачі (21), якщо існує функція $u(\varepsilon, \cdot) \in H^1(\Omega_\varepsilon) \setminus \{0\}$ (власна функція) така, що для всіх функцій $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ справджується інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(\varepsilon, x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \lambda(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x) v(x) \, dx. \tag{22}$$

Скориставшись зауваженням 1, визначимо оператор $\mathrm{A}_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \mapsto H^1(\Omega_\varepsilon)$ рівністю

$$\left(\mathrm{A}_\varepsilon u, v \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x) \, v(x) \, dx \quad \forall \, u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{23}$$

У цьому пункті J_ε — тотожний оператор вкладення простору $\mathcal{H}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon)$ у простір $\mathcal{V}_\varepsilon := L_2(\Omega_\varepsilon)$ і тому його записом нехтуємо. Отже, оператор A_ε — самоспряжений, додатний, компактний і $\|\mathrm{A}_\varepsilon\| = 1$.

Використовуючи (23), перепишемо тотожність (22) як спектральну задачу для оператора A_ε : $\mathrm{A}_\varepsilon u(\varepsilon, \cdot) = (\lambda(\varepsilon) + 1)^{-1} u(\varepsilon, \cdot)$. З класичної спектральної теорії для самоспряжених, додатних і компактних операторів випливає, що власні значення задачі (21) формують неспадну послідовність

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \le \ldots \le \lambda_n(\varepsilon) \le \ldots \to +\infty, \quad n \to \infty, \tag{24}$$

де кожне власне значення рахується стільки разів, яка його кратність. Послідовність відповідних власних функцій проортонормуємо таким чином:

$$(u_n, u_m)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \delta_{n,m}, \quad \{n, \, m\} \in \mathbb{N}_0, \tag{25}$$

причому власні функції утворюють базис як в $H^1(\Omega_\varepsilon)$, так і в $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

У цьому пункті вивчається асимптотична поведінка власних значень $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ і відповідних власних функцій $\{u_n\}$ задачі (21), а також знаходяться інші граничні точки спектра цієї задачі, коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких стержнів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Деякі результати для задачі (21) було анонсовано в роботі [21].

3.1. Усереднена задача та її спектр. Використовуючи метод двомасштабних розвинень і поєднуючи його з асимптотичними методами для дослідження крайових задач у тонких областях і методом узгодження внутрішніх та зовнішніх асимптотичних розвинень, як і в роботі [14], виводимо усереднену спектральну задачу

$$\begin{array}{rcll} -\Delta\, v(x) &=& \mu\, v(x), & x \in \Omega_0 \cup \Omega_{-1}, \\ -\partial^2_{x_2}\, v(x) &=& \mu\, v(x), & x \in D = (0,a) \times (-1,0), \\ \partial_\nu v(x) &=& 0, & x \in \Upsilon_0 \cup \Upsilon_{-1}, \\ v(x_1, 0+0) &=& v(x_1, 0-0), & x_1 \in (0,a), \\ \partial_{x_2} v(x_1, 0+0) &=& h\, \partial_{x_2} v(x_1, 0-0), & x_1 \in (0,a), \\ v(x_1, -1+0) &=& v(x_1, -1+0), & x_1 \in (0,a), \\ h\, \partial_{x_2} v(x_1, -1+0) &=& \partial_{x_2} v(x_1, -1-0), & x_1 \in (0,a), \end{array} \qquad (26)$$

для задачі (21). Тут $\Upsilon_0 = \partial\Omega_0 \cap \{x : x_2 > 1\}$; $\Upsilon_{-1} = \partial\Omega_{-1} \cap \{x : x_2 < -1\}$; $v(x_1, b \pm 0)$ — граничне значення функції $v(x_1, x_2)$ при $x_2 \to \pm b$. Зауважимо, що в прямокутнику D, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході, маємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно змінної x_2, на вертикальних сторонах якого не задаються жодні крайові умови.

Відповідна інтегральна тотожність для задачі (26) має вигляд

$$(\mu + 1)\,(J_0 v, J_0 \varphi)_{\mathcal{V}_0} = (v, \varphi)_{\mathcal{H}_0} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}_0,$$

де $\mathcal{V}_0$ — гільбертів простір функцій з $L_2(\Theta_0)$ із скалярним добутком

$$(v, \varphi)_{\mathcal{V}_0} = \int\limits_{\Omega_0 \,\cup\, \Omega_{-1}} v(x)\varphi(x)\,dx + h \int\limits_D v(x)\varphi(x)\,dx$$

(Θ_0 — внутрішність об'єднання $\overline{\Omega_0} \cup \overline{D} \cup \overline{\Omega_{-1}}$); $\mathcal{H}_0 = \{v \in L_2(\Theta_0) : \partial_{x_2} v \in L_2(\Theta_0),\ \partial_{x_1} v \in L_2(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})\}$ і скалярний добуток у цьому просторі задається рівністю

$$(v, \varphi)_{\mathcal{H}_0} = \int\limits_{\Omega_0 \,\cup\, \Omega_{-1}} \big(\nabla v(x) \cdot \nabla \varphi(x) \ + \ v(x)\varphi(x)\big)\,dx + h \int\limits_D \big(\partial_{x_2} v(x) \partial_{x_2} \varphi(x) \ + \ v(x)\varphi(x)\big)\,dx;$$

оператор $J_0 : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$ — тотожний оператор вкладення (очевидно, що він не є компактним).

Використавши підхід, застосований у пп. 2.1 та 2.2, отримаємо операторну постановку задачі (26) у визначеному вище просторі $\mathcal{H}_0$ для самоспряженого, додатного і обмеженого оператора $\mathrm{A}_0 = J_0^* J_0 :\ (\mu + 1)\mathrm{A}_0(v) = v$.

З інтегральної тотожності для (26) випливає, що якщо існує власне значення μ цієї задачі, то воно обов'язково є невід'ємним. Розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння в прямокутнику D з урахуванням умов спряження при $x_2 = 0$, маємо

$$v(x) = v(x_1, 0+0) \cos\left(\mu^{1/2} x_2\right) + \frac{1}{h\mu}\, \partial_{x_2} v(x_1, 0+0) \sin\left(\mu^{1/2} x_2\right), \quad x \in D.$$

Підставляючи цей вираз у другі умови спряження при $x_2 = -1$, отримуємо для граничних значень $v^+ := v(x_1, 0+0),\ v^- := v(x_1, -1-0)$ функції v та її похідних такі співвідношення:

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_2} v^+ \\ \partial_{x_2} v^- \end{pmatrix} = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sin\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\mu} & -1 \\ 1 & -\cos\sqrt{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix}, \qquad x_1 \in (0, a).$$

Ці умови разом із рівняннями

$$\begin{array}{rcll} -\Delta\, v(x) & = & \mu\, v(x), & x \in \Omega_0 \cup \Omega_{-1}, \\ \partial_\nu v(x) & = & 0, & x \in \Upsilon_0 \cup \Upsilon_{-1}, \end{array}$$

утворюють нову спектральну задачу в об'єднанні областей $\Omega_0 \cup \Omega_{-1}$, яка через інтегральну тотожність зводиться до спектральної задачі для оператор-функції

$$L(\mu) := (\mu + 1)\ \mathrm{A}_1 + h\sqrt{\mu} \tan\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)\ \mathrm{A}_2 - \frac{h\sqrt{\mu}}{\sin\sqrt{\mu}}\ \mathrm{A}_3 - \mathbb{I}, \tag{27}$$

де $\mathbb{I}$ — одиничний оператор в $H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})$; $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3$ — самоспряжені компактні оператори в $H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})$, визначені рівностями

$$(\mathrm{A}_1 \varphi, \psi)_{H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})} = \int\limits_{\Omega_0 \cup \Omega_{-1}} \varphi(x)\ \psi(x)\, dx,$$

$$(\mathrm{A}_2 \varphi, \psi)_{H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})} = \int\limits_0^a \left(\varphi^+ \psi^+ + \varphi^- \psi^-\right)\ dx_1,$$

$$(\mathrm{A}_3 \varphi, \psi)_{H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1})} = \int\limits_0^a \left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\ \left(\psi^+ - \psi^-\right)\ dx_1 \qquad \forall\, \varphi, \psi \in H^1(\Omega_0 \cup \Omega_{-1}).$$

З цих тотожностей випливає $0 < \mathrm{A}_1 \le \mathbb{I},\ \mathrm{A}_2 \ge 0,\ \mathrm{A}_3 \ge 0,\ \ker \mathrm{A}_2 \subset \ker \mathrm{A}_3,\ 2\mathrm{A}_2 \ge \mathrm{A}_3$.

Застосовуючи до даної оператор-функції результати робіт [22, 23], отримуємо таку теорему.

Теорема 6. *Спектр оператор-функції (27) (усередненої задачі (26)) складається з скінченнократних невід'ємних власних значень* $\{\mu_n^{(m)} :\ n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *та точок істотного* *спектра* $\{P_m = \pi^2 m^2 : m \in \mathbb{N}\}$, *які розбивають власні значення на серії*

$$0 = \mu_0^{(0)} < \mu_1^{(0)} \le \ldots \le \mu_n^{(0)} \le \ldots \to P_1 = \pi^2, \tag{28}$$

$$P_m < \mu_0^{(m)} \le \mu_1^{(m)} \le \ldots \le \mu_n^{(m)} \le \ldots \to P_{m+1}, \quad n \to +\infty. \tag{29}$$

Відповідні власні функції $v_n^{(m)}$ *не мають приєднаних функцій.*

3.2. Асимптотичні наближення для розв'язків задачі (21). Нехай $\mu_n^{(m)}$ — власне значення усередненої спектральної задачі (26); $V_n^{(m)}$ — відповідна власна функція, яка збігається з власною функцією $v_n^{(m)}$ оператор-функції (27) в $\Omega_0 \cup \Omega_{-1}$ і

$$V_n^{(m)}(x) = v_n^{(m)}(x_1, 0) \cos\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\, x_2\right) + \frac{\partial_{x_2} v_n^{(m)}(x_1, 0)}{h\sqrt{\mu_n^{(m)}}}\ \sin\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\, x_2\right), \quad x \in D.$$

Далі індексами n та m нехтуємо. Будуючи по $V_n^{(m)}$ перші члени асимптотики як в областях $\Omega_0,\ \Omega_{-1}$, так і в тонких стержнях, і узгоджуючи суми перших членів побудованих розвинень у зоні приєднання кожного з відрізків $\{x : 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}$, $\{x : 0 < x_1 < 1,\ x_2 = -1\}$, отримуємо апроксимуючу функцію R_ε, яка належить простору $H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$R_\varepsilon = \begin{cases} V(x) + \varepsilon\chi_0(x_2)\sum_{i=1}^2 (Z_i(\eta) - \delta_{i,2}\eta_2)\,\partial_{x_i}V(x_1, 0), \qquad x \in \Omega_0; \\ V(x) + \varepsilon\, Y\Big(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\Big)\partial_{x_1}V(x) + \varepsilon\chi_0(x_2)\sum_{i=1}^2 \big(Z_i(\eta) - \delta_{i,1}Y(\eta_1) - \delta_{i,2}h^{-1}\eta_2\big)\,\partial_{x_i}V(x_1, 0) + \\ \qquad + \varepsilon\,\chi_0(x_2+1)\sum_{i=1}^2 \big(Z_i(\xi_1, -\xi_2) - \delta_{i,1}Y(\xi_1) + \delta_{i,2}h^{-1}\xi_2\big)\,\partial_{x_i}V(x_1, -1), \ \ x \in G_\varepsilon; \\ V(x) + \varepsilon\chi_0(x_2+1)\sum_{i=1}^2 (Z_i(\xi_1, -\xi_2) + \delta_{i,2}\xi_2)\,\partial_{x_i}V(x_1, -1), \qquad x \in \Omega_{-1}, \end{cases} \tag{30}$$

де χ_0 — гладка зрізаюча функція, яка дорівнює 1 при $|x_2| < \dfrac{1}{4}\min\{\gamma_0^+,\, \gamma_0^-,\, 1\}$, і 0 при $|x_2| > \dfrac{1}{2}\min\{\gamma_0^+,\, \gamma_0^-,\, 1\}$; $\gamma_0^+ = \min\limits_{x_1\in[0,a]} \gamma^+(x_1)$; $\gamma_0^- = \min\limits_{x_1\in[0,a]} \gamma^-(x_1)$; $Y(t) = -t + \dfrac{1}{2} + [t]$ ($[t]$ — ціла частина числа t); $\eta = (\eta_1, \eta_2) = \varepsilon^{-1}x$ і $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \varepsilon^{-1}(x_1, x_2+1)$ — „швидкі" змінні в околах відрізків $\{x : 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}$, $\{x : 0 < x_1 < 1,\ x_2 = -1\}$ відповідно; $Z_i \in H^1_{\mathrm{loc},\eta_2}(\Pi)$, $i = 1, 2,$ – 1-періодичні по η_1 розв'язки задач примежового шару

$$-\Delta_{\eta\eta} Z_i(\eta) = 0, \ \ \eta \in \Pi, \quad \partial_{\eta_2} Z_i(\eta_1, 0) = 0,$$

$$(\eta_1, 0) \in \partial\Pi^+ \setminus I_h, \quad \partial_{\eta_1} Z_i(\eta) = -\delta_{1i}, \ \ \eta \in \partial\Pi^- \setminus I_h,$$

в об'єднанні Π, яке складається з півсмуг $\Pi^+ = (0,1) \times (0, +\infty)$ та $\Pi^- = I_h \times (-\infty, 0]$;

$I_h = \big((1-h)/2\,,\,(1+h)/2\big)$. Крім того, функції $Z_i,\ i=1,2$, мають таку асимптотику:

$$Z_1(\eta) = \begin{cases} O(\exp(-2\pi\eta_2)); \\ -\eta_1 + \dfrac{1}{2} + O(\exp(\pi h^{-1}\eta_2)), \end{cases} \qquad Z_2(\eta) = \begin{cases} \eta_2 + c_h + O(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \to +\infty; \\ h^{-1}\eta_2 + O(\exp(\pi h^{-1}\eta_2)), & \eta_2 \to -\infty, \end{cases}$$

і функція Z_1, 1-періодично продовжена по η_1, — непарна по η_1; а функція Z_2, 1-періодично продовжена по η_1, — парна по η_1.

Підставляючи функцію $R_\varepsilon^{n,m}$ та число $\mu_n^{(m)}$ в задачу (21) замість $u(\varepsilon,\cdot)$ та $\lambda(\varepsilon)$ відповідно, знаходимо нев'язки і виводимо нерівність

$$\|R_\varepsilon^{n,m} - (\mu_n^{(m)}+1)\mathrm{A}_\varepsilon R_\varepsilon^{n,m}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \ \le\ c(\sigma_0)\,\varepsilon^{1-\sigma_0}, \tag{31}$$

де σ_0 — довільне наперед задане додатне число.

3.3. Перевірка умов D_1 – D_6. Теореми збіжності та асимптотичні оцінки. Базові простори та відповідні оператори вказано на початку цього пункту. Простір $\mathcal{Z}_0$, якому належать власні функції усередненої задачі, збігається з $H^1(\Theta_0)$. Оператор S_ε з умови D_1 — це оператор звуження функції $u \in \mathcal{Z}_0 := H^1(\Theta_0)$ на область Ω_ε.

Оператору P_ε з умови D_2 відповідає оператор продовження $\mathbf{P}_\varepsilon\ :\ H^1(\Omega_\varepsilon) \mapsto \mathcal{Z}_0$, який побудовано в роботі [14]. Незважаючи на те, що норма такого оператора є нескінченно великою при $\varepsilon \to 0$, норма його звуження на довільну скінченну комбінацію власних функцій задачі (21) обмежена у просторі Соболева сталою, яка не залежить від $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, тобто вірне таке твердження: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists c>0\ \exists \varepsilon_0>0\ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$: $\|\mathbf{P}_\varepsilon u_n(\varepsilon,\cdot)\|_{\mathcal{Z}_0} \le c(n)\|u_n(\varepsilon,\cdot)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Даний оператор буде також рівномірно обмеженим на послідовностях з умови D_2 (доведення цього факту аналогічне фрагменту доведення теореми 5.4 [15]).

Для перевірки умов $\mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4$ потрібно використати міркування з першої частини теореми 5.1 [14].

Виконання умови D_5 фактично перевірено в попередньому пункті: результатом дії оператора R_ε є побудова апроксимуючої функції по власній функції усередненої задачі (див. (30)). Крім того, $R_\varepsilon^{n,m}$ задовольняє нерівність (31), яка є аналогом відповідної нерівності в умові D_5.

Для перевірки умови D_6 апроксимуючу функцію W_ε у випадку, коли μ_0 збігається з одним із чисел $P_m = \pi^2 m^2,\ m \in \mathbb{N}$ (точки істотного спектра усередненої задачі (26)), візьмемо функцію

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon h(1+P_m)}}\,\sin \pi m x_2, & x \in G_\varepsilon^{j_0}; \\ \qquad\qquad 0, & x \in \Omega_\varepsilon \setminus G_\varepsilon^{j_0}, \end{cases} \tag{32}$$

де $G_\varepsilon^{j_0}$ — довільний стержень; легко перевірити, що $\|W_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$.

Підставляючи функцію W_ε та число P_m в задачу (21) замість $u(\varepsilon,\cdot)$ та $\lambda(\varepsilon)$ відповідно, знаходимо нев'язки і виводимо нерівність

$$\|(P_m+1)\mathrm{A}_\varepsilon W_\varepsilon - W_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \ \le\ c(m)\,\varepsilon^{\frac{1}{4}},$$

яка показує, що умова D_6 має місце.

Застосовуючи до задач (21) і (26) результати п. 2, отримуємо такі теореми.

Теорема 7. *Нехай* $\{\lambda_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{N}_0\}$ — *впорядкована послідовність (24) власних значень задачі (21);* $\{u_n(\varepsilon,\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ — *відповідна послідовність власних функцій, нормованих умовою (25), а* $\{\mu_n^{(0)} : n \in \mathbb{N}_0\}$ — *нульова серія (28) власних значень усередненої задачі (26).*

Тоді поріг низьких власних частот $\mathcal{T} = \pi^2$ *і для кожного* $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda_n(\varepsilon) \;\to\; \mu_n^{(0)} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Існує підпослідовність послідовності $\{\varepsilon\}$ *(перепозначимо її знову через* $\{\varepsilon\}$*) така, що*

$$\mathbf{P}_\varepsilon u_n(\varepsilon,\cdot) \to V_n^{(0)} \;\text{ слабко в }\; H^1(\Theta_0) \;\text{ при }\; \varepsilon \to 0,$$

де $\{V_n^{(0)}\}$ — *власні функції усередненої задачі (26), які задовольняють умову*

$$\int\limits_{\Omega_0\cup\Omega_{-1}} V_n^{(0)}(x)V_m^{(0)}(x)\,dx + h\int\limits_D V_n^{(0)}(x)V_m^{(0)}(x)\,dx = \delta_{n,m}. \tag{33}$$

Теорема 8. *Спектр задачі (21) збігається до спектра задачі (26) в хаусдорфовому розумінні.*

Теорема 9. *Нехай* $\mu_n^{(0)} = \mu_{n+1}^{(0)} = \ldots = \mu_{n+r-1}^{(0)}$ — r*-кратне власне значення задачі (26) з нульової серії (28);* $V_n^{(0)},\ldots,V_{n+r-1}^{(0)}$ — *відповідні власні функції, що задовольняють умови (33).*

Тоді для будь-якого $\sigma > 0$ *існують* $\varepsilon_0 > 0$, $C_i > 0$ *та* $\{\alpha_{ik}(\varepsilon)\} \subset \mathbb{R}$, $i = 0,\ldots,r-1$, *такі, що для будь-якого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$

$$\left\| R_\varepsilon^{(n+i)} - \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_{ik}(\varepsilon)u_{n+k}(\varepsilon,\cdot)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_i(n,\sigma)\,\varepsilon^{1-\sigma}, \qquad 0 < c_1 < \sum_{k=0}^{r-1}(\alpha_{ik})^2 < c_2,$$

де $\{R_\varepsilon^{(n+i)}\}$ — *апроксимуючі функції, які визначаються формулою (30) по* $V_{n+i}^{(0)}$.

Для довільних $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *та достатньо малих значень* ε *маємо*

$$|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n^{(0)}| \;\le\; c_0(n,\sigma)\,\varepsilon^{1-\sigma}.$$

Теорема 10. *Нехай* $\mu_n^{(k)} = \mu_{n+1}^{(k)} = \ldots = \mu_{n+r-1}^{(k)}$ — r*-кратне власне значення задачі (26) з* k*-ї серії (29),* $k \in \mathbb{N}$; $V_n^{(k)},\ldots,V_{n+r-1}^{(k)}$ — *відповідні власні функції, що задовольняють умови (33).*

Тоді для будь-якого $\sigma > 0$ *існують* $\varepsilon_{n,k} > 0$ *та* $c(n,k,\sigma) > 0$ *такі, що для всіх значень параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n,k})$ *в інтервалі* $I_{n,k}(\varepsilon) = (\mu_n^{(k)} - c\varepsilon^{1-\sigma}\,,\ \mu_n^{(k)} + c\varepsilon^{1-\sigma})$ *міститься* r *власних значень задачі (21).*

Для апроксимуючої функції $R_\varepsilon^{n+i,k}$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$, *яка побудована за формулою (30) по* $V_{n+i}^{(k)}$, *має місце така асимптотична оцінка:*

$$\left\| \frac{R_\varepsilon^{n+i,k}}{\|R_\varepsilon^{n+i,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} - \widetilde{U}_i(\varepsilon,\cdot) \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c(n,k,\sigma)\,\varepsilon^{1-\sigma}, \qquad \|\widetilde{U}_i(\varepsilon,\cdot)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1,$$

де $\widetilde{U}_i(\varepsilon,\cdot)$ — *лінійна комбінація власних функцій задачі (21), які відповідають власним значенням з інтервалу* $I_{n,k}(\varepsilon)$.

Теорема 11. *Нехай* μ_m *збігається з однією з точок істотного спектра* $\{P_m = \pi^2 m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ *усередненої задачі (26).*

Тоді існують $c(m) > 0$ *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що для всіх значень параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *в інтервалі*

$$\left(\frac{1}{\mu_m + 1} \ - \ c(m)\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,,\ \frac{1}{\mu_m + 1} \ + \ c(m)\,\varepsilon^{\frac{1}{4}} \right)$$

міститься скінченне число власних значень оператора A_ε.

Існує скінченна лінійна комбінація $\widetilde{U}_\varepsilon$ $(\|\widetilde{U}_\varepsilon\|_\varepsilon = 1)$ *власних функцій* $u^\varepsilon_{k(\varepsilon)+i}$, $i = \overline{0,\ p(\varepsilon)}$, *які відповідають відповідно всім власним значенням* $(\lambda_{k(\varepsilon)+i}(\varepsilon) + 1)^{-1}$ *оператора* A_ε *з відрізка*

$$\left[\frac{1}{\mu_m + 1} \ - \ c(m)\,\varepsilon^{\frac{1}{8}}\,,\ \frac{1}{\mu_m + 1} \ + \ c(m)\,\varepsilon^{\frac{1}{8}} \right],$$

така, що

$$\left\| W_\varepsilon - \widetilde{U}_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \ \leq \ 2\varepsilon^{\frac{1}{8}},$$

де W_ε *визначається формулою (32).*

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. — 130 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. — М.: Мир, 1982. — 428 с.
4. *Розенблюм Г. В., Соломьяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1989. — Т. 64. — С. 1 – 242.
5. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. — Berlin: Springer, 1989. — 440 p.
6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 499 с.

7. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 172 с.

8. *Hempel R., Seco L., Simon B.* The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains // J. Funct. Anal. — 1991. — **102**. — P. 448 – 483.

9. *Lobo M., Perez E.* High frequency vibrations in a stiff problem // Math. Models and Methods in Appl. Sci. — 1997. — **7**, №. 2. — P. 291 – 311.

10. *Allaire G., Conca C., Vanninathan M.* Spectral asymptotics of the Helmholtz model in fluid-solid structures // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 1999. — **46**. — P. 1463 – 1504.

11. *Mel'nyk T. A.* Low and high frequency convergence of the spectrum of some self-adjoint compact operator that depends on a small parameter // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, №. 2. — P. 241 – 251.

12. *Mel'nyk T. A.* Hausdorff convergence and asymptotic estimates of the spectrum of a perturbed operator // Z. Analysis und ihre Anwendungen. — 2001. — **20**, №. 4. — P. 941 – 957.

13. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 310 с.

14. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа густого гребешка // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — **19**. — С. 138 – 174 (English translation: J. Math. Sci. — 1997. — **85**, №. 6. — P. 2326 – 2346.

15. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1 // Math. Methods in Appl. Sci. — 2000. — **23**, №. 4. — P. 341 – 346.

16. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. — 2000. — **12**, №. 2. — P. 188 – 238.

17. *Мельник Т. А.* Асимптотика власних значень та власних функцій крайової задачі в густому періодичному з'єднанні типу 3:2:2 // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — **58**. — P. 153 – 160.

18. *Mel'nyk T. A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses // Math. Models and Methods in Appl. Sci. — 2001. — **11**, №. 6. — P. 1001 – 1029.

19. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, №. 1. — P. 91 – 105.

20. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, №. 5. — С. 3 – 192.

21. *Мельник Т. А.* Асимптотика спектра задачи Неймана в полукомпактных сингулярных соединениях // Там же. —1995. — **50**, №. 4. — С. 102.

22. *Мельник Т. А.* Спектральні властивості самоспряжених розривних оператор-функцій // Допов. НАН України. — 1994. — №. 10. — С. 33 – 36.

23. *Гринив Р. О., Мельник Т. А.* О сингулярном функционале Рэлея // Мат. заметки. — 1996. — **60**, №. 1. — С. 130 – 134.

Одержано 17.03.2003