Физика низких температур, 1997, т. 23, № 12, с. 1272–1280

О гамильтоновой формулировке уравнений гидродинамики сверхтекучего ^{3}He-*A*

А. А. Исаев, С. В. Пелетминский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: isayev@kipt.kharkov.ua; spelet@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 18 июня 1997 г.

В рамках последовательного гамильтонова формализма получены выражения для скобок Пуассона динамических переменных, описывающих спиновую и орбитальную динамику сверхтекучего ^{3}He-*A*. В основе построения лежит задание кинематической части лагранжиана системы и рассмотрение вариаций динамических переменных, оставляющих кинематическую часть лагранжиана инвариантной. Найдены уравнения движения динамических переменных и рассмотрен вопрос о галилеевской инвариантности полученных уравнений, исходя из инвариантности лагражиана системы относительно преобразований Галилея.

В межах послідовного гамільтонова формалізму одержано вирази для дужок Пуассона динамічних змінних, що описують спінову та орбітальну динаміку надплинного ^{3}He-*A*. В основу розгляду покладено побудову кінематичної частини лагранжіана системи та розгляд вариацій динамічних змінних, які залишають кінематичну частину лагранжіана інваріантною. Знайдено рівняння руху динамічних змінних та розглянуто питання про галілеївську інваріантність одержаних рівнянь, виходячи з інваріантності лагранжіана системи відносно перетворень Галілея.

PACS: 67.57.Jj

1. Введение

Данная работа посвящена выводу уравнений гидродинамики сверхтекучего ^{3}He-*A* в гамильтоновом подходе. По вопросу построения гидродинамики сверхтекучей *A*-фазы ^{3}He имеется обширная литература (см., например, [1,2] и ссылки в них). Можно выделить несколько подходов. Часть работ [3–6] основывается на микроскопическом рассмотрении, которое является, как правило, модельно зависимым. Такое рассмотрение важно для получения количественных оценок различных коэффициентов, входящих в уравнения гидродинамики. Наиболее общая форма уравнений гидродинамики, допускаемых условиями симметрии, устанавливается, однако, только феноменологическим путем [7–9] с использованием метода законов сохранения. Попытка построения нелинейных гидродинамических уравнений предпринималась также в [10] с привлечением лагранжева формализма. В настоящей работе мы будем исходить из гамильтонова подхода [11,12]. Отметим, что важную роль во всех рассмотрениях играет концепция внутреннего орбитального момента [13], обусловленного моментом импульса куперовских пар. Мы вводим внутренний орбитальный момент как генератор пространственных вращений переменных, описывающих жидкокристаллические степени свободы.

Основополагающую роль в гамильтоновом подходе играет определение скобок Пуассона (СП) динамических переменных. В случае конденсированных сред СП динамических переменных, в отличие от обычных механических систем, имеют нетривиальную структуру. Для нормальных физических систем сокращенное описание на гидродинамическом этапе эволюции строится на основе плотностей аддитивных интегралов движения, СП которых хорошо известны. При описании систем со спонтанно нарушенной симметрией вводятся дополнительные гидродинамические параметры, которые не связаны с законами сохранения, а обусловлены указанной нарушенной симметрией.

Поскольку для этих дополнительных переменных не существует операторных выражений в представлении вторичного квантования, СП для них не могут быть получены простым вычислением коммутаторов, как это обычно делается при квантовомеханическом выводе СП. Построение СП для динамических переменных, связанных с нарушенной симметрией (как с плотностями аддитивных интегралов движения, так и между собой), и представляет основную проблему. В случае сверхтекучего ^{3}He-A такими переменными являются векторы спиновой анизотропии $d_\alpha(x)$ и пространственной $l_i(x)$, а также сверхтекучий импульс $p_i(x)$.

Гамильтонова формулировка уравнений гидродинамики сверхтекучего ^{3}He-A при $T = 0$ приведена в [14], где предполагалось, что движение нормальной компоненты является заторможенным, и не выписывались СП, соответствующие плотности импульса. Мы включаем в полную систему СП также плотность энтропии, что позволяет сформулировать условие адиабатичности процессов, протекающих в A-фазе. С этой целью вводим в теорию сопряженные плотностям импульса и энтропии динамические переменные — вектор смещения $u_i(x)$ и формально рассматриваемую переменную $\psi(x)$ (см. следующий раздел), которые являются циклическими (гамильтониан H системы не зависит от этих переменных). Для получения полной системы СП будем следовать вариационному принципу, изложенному в [12], согласно которому основополагающее значение для выяснения структуры скобок Пуассона динамических переменных $\varphi_\alpha(x)$ имеют вид кинематической части лагранжиана $L_k(\varphi, \dot{\varphi})$, определяемой из соотношения

$$L = L_k(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi) \equiv \int d^3x F_\alpha(x; \varphi)\dot{\varphi}_\alpha(x) - H(\varphi)$$

(L — лагранжиан; $H(\varphi)$ — гамильтониан; $F_\alpha(x; \varphi(x', t))$ — некоторый функционал динамических переменных $\varphi_\alpha(x)$) и вариации динамических переменных $\delta\varphi_\alpha(x, t) = \delta\varphi_\alpha(x; \varphi(x', t))$, оставляющие кинематическую часть инвариантной. Последние могут быть представлены в форме

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \left\{\varphi_\alpha(x), G\right\}, \tag{1}$$

где G — генератор бесконечно малых канонических преобразований, который, согласно общей теории [12], равен

$$G = \int d^3x F_\alpha(x, \varphi)\, \delta\varphi_\alpha(x)\ . \tag{2}$$

Расширение данного класса вариаций может быть достигнуто прибавлением к лагранжиану полной производной по времени от произвольного функционала $\gamma(\varphi)$, что приводит к переопределению функционала $F_\alpha(x, \varphi)$:

$$F_\alpha(x, \varphi(x')) \to$$

$$\to F'_\alpha(x, \varphi(x')) = F_\alpha(x, \varphi(x')) + \frac{\delta\gamma(\varphi(x'))}{\delta\varphi_\alpha(x)}\ .$$

Преимуществом развиваемого подхода является то, что для получения СП он позволяет рассматривать наиболее общие канонические преобразования динамических переменных, которые определяются из требования инвариантности кинематической части лагранжиана, построенной на основе функционала $F'_\alpha(x, \varphi(x'))$. Эти преобразования не обязательно являются преобразованиями группы нарушенной симметрии. Кроме того, привлечение циклических динамических переменных позволяет записывать лагранжиан (и кинематическую часть лагранжиана) в более простой форме, чем в случае записи лагранжиана только через физические динамические переменные, в терминах которых описывается состояние изучаемой системы. Полученная на основе такой кинематической части полная алгебра СП допускает затем выделение подалгебр, соответствующих физическим переменным. Отметим также, что вариационный принцип, используемый нами, приводит к СП, которые автоматически удовлетворяют тождеству Якоби. Поскольку структура кинематической части лагранжиана играет в нашем рассмотрении основную роль, нашей последующей задачей будет получение функционала $L_k = \int d^3x \mathcal{L}_k(x)$ в случае сверхтекучего ^{3}He-A.

2. Кинематическая часть лагранжиана и СП для сверхтекучего ^{3}He-A

Рассмотрим сначала в качестве иллюстрирующего примера построение кинематической части лагранжиана классических сплошных сред. В этом случае, как показано в [15], функционал $\mathcal{L}_k(x)$, если не интересоваться процессами, связанными с переносом энтропии, имеет вид

$$\mathcal{L}_k(x) = \pi_i(x) b^{-1}_{ij}(x) \dot{u}_j(x),\ b_{ij}(x) = \delta_{ij} - \nabla_j u_i(x), \tag{3}$$

где $\pi_i(x)$ — плотность импульса; $u_i(x)$ — вектор смещения; x_i — эйлерова координата элемента сплошной среды. С помощью кинематической части (3) могут быть получены СП переменных $u_i(x), \pi_i(x)$. Кроме того, для формулировки уравнения адиабатичности необходимо знать СП плотности энтропии $\sigma(x)$ с остальными динамическими переменными. С этой целью перепишем кинематическую часть лагранжиана (3) в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = \underline{\pi}_i(x) b^{-1}_{ij}(x)\dot{u}_j(x) - \sigma(x)\dot{\psi}(x) , \qquad (4)$$

где

$$\underline{\pi}_i(x) = \pi_i(x) - \sigma(x)\, \nabla_i \psi(x) . \qquad (5)$$

Переменная $\psi(x)$, которая является сопряженной переменной $\sigma(x)$, введена в кинематическую часть формально и при написании уравнений движения должна считаться циклической. Происхождение второго слагаемого в формуле (4) достаточно прозрачно, в то время как структура величины $\underline{\pi}_i$ требует пояснения. Заметим, что плотность импульса $\pi_i(x)$ в (3) связана с трансляциями в пространстве переменных $u_i(x), \pi_i(x)$. При введении новых переменных $\sigma(x)$, $\psi(x)$ плотность импульса $\pi_i(x)$ связана уже с трансляциями в пространстве всех переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, $\sigma(x)$, $\psi(x)$ и может быть представлена в виде

$$\pi_i(x) = \underline{\pi}_i(x) + \pi^{\sigma}_i(x) ,$$

где $\underline{\pi}_i(x)$ — плотность импульса, связанная с трансляциями в пространстве только переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, а $\pi^{\sigma}_i(x)$ — с трансляциями в пространстве $\sigma(x)$, $\psi(x)$. Поскольку величины $\psi(x)$ и $\sigma(x)$ являются обобщенными координатами и импульсами, величина $\pi^{\sigma}_i(x)$ равна

$$\pi^{\sigma}_i(x) = \sigma(x)\, \nabla_i \psi(x) .$$

Поэтому плотность импульса $\underline{\pi}_i(x)$, связанная с трансляциями в пространстве переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$, имеет вид (5), откуда и следует структура функционала $\mathcal{L}_k(x)$ в (4).

С использованием $\mathcal{L}_k(x)$ могут быть получены следующие СП (примеры соответствующих канонических преобразований см. в [12]; здесь и далее будем выписывать только нетривиальные СП):

$$\{\pi_i(x), \sigma(x')\} = -\sigma(x)\, \nabla_i \delta(x - x') , \qquad (6)$$

$$\{\pi_i(x), \psi(x')\} = \delta(x - x')\, \nabla_i \psi(x) ,$$

$$\{\sigma(x), \psi(x')\} = \delta(x - x') ,$$

$$\{u_i(x), \pi_k(x')\} = b_{ik}(x)\, \delta(x - x') ,$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(x')\} = \pi_k(x)\, \nabla'_i \delta(x - x') - \pi_i(x')\, \nabla_k \delta(x - x').$$

Найденная плотность кинематической части лагранжиана (4) относится к сплошным средам. Легко произвести обобщение этого функционала на случай магнитоупругих сред. Запишем с этой целью плотность кинематической части для магнетика, который характеризуется полным спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых вращений (нарушенная $SO(3)$ симметрия) [16]:

$$\mathcal{L}_k(x) = -s_\alpha(x)\omega_\alpha(x), \quad \omega_\alpha \equiv \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{a}\dot{a})_{\gamma\beta} . \qquad (7)$$

Здесь $s_\alpha(x)$ — плотность спина; $a_{\alpha\beta}(x)$ — матрица поворота, являющаяся дополнительной динамической переменной, описывающей нарушение симметрии относительно спиновых вращений (три угла θ_α, параметризующие матрицу поворота $a_{\alpha\beta}$, сопряжены трем компонентам спина s_α). С помощью функционала $\mathcal{L}_k(x)$ в (7) могут быть получены СП [16]:

$$\{s_\alpha(x), s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(x)\, \delta(x - x') ,$$
$$\{a_{\alpha\beta}(x), s_\gamma(x')\} = a_{\alpha\rho}(x)\, \varepsilon_{\rho\beta\gamma}\, \delta(x - x') . \qquad (8)$$

Как показано в [12], плотность импульса, связанная с трансляциями в пространстве переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$, определяется формулой

$$\pi^s_i \equiv s_\alpha \omega_{\alpha i} , \quad \omega_{\alpha i} \equiv \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{a}\nabla_i a)_{\gamma\beta} .$$

Следовательно, плотность кинематической части лагранжиана для магнитоупругих сред может быть записана в виде

$$\mathcal{L}_k(x) = \underline{\pi}_i(x) b^{-1}_{ij}(x)\dot{u}_j(x) - \sigma(x)\dot{\psi}(x) - s_\alpha(x)\omega_\alpha(x). \qquad (9)$$

где

$$\underline{\pi}_i = \pi_i - \sigma\nabla_i\psi - s_\alpha\omega_{\alpha i} . \qquad (10)$$

Последнее слагаемое в формуле (9) представляет собой плотность кинематической части лагранжиана для магнитных систем. Соответственно плотность импульса π_i является генератором пространственных трансляций в пространстве переменных u_i , π_i , σ, ψ, s_α , $a_{\alpha\beta}$, плотность импульса $\pi_i^\sigma = \sigma\nabla_i\psi$ — в пространстве переменных σ, ψ и плотность импульса $\pi_i^s = s_\alpha\omega_{\alpha i}$ — в пространстве переменных s_α, $a_{\alpha\beta}$. Поэтому плотность импульса, связанная с трансляциями в пространстве переменных u_i, π_i, имеет вид (10), откуда и следует структура плотности кинематической части лагранжиана (9). Использование функционала $\mathcal{L}_k(x)$ в (9) приводит, наряду со СП (6),(8), еще к двум дополнительным скобкам:

$$\left\{\pi_i(x),\, s_\alpha(x')\right\} = -s_\alpha(x)\nabla_i\delta(x-x')\ ,$$
$$\left\{\pi_i(x),\, a_{\alpha\beta}(x')\right\} = \delta(x-x')\ \nabla_i a_{\alpha\beta}(x)\ . \qquad (11)$$

После этих предварительных замечаний мы готовы записать кинематическую часть лагранжиана для сверхтекучего ^{3}He-A. Из предыдущего рассмотрения следует, что важную роль для выяснения структуры кинематической части играет построение операторов трансляций и их плотностей для различных физических полей, фигурирующих в лагранжиане. Динамическими переменными сверхтекучего ^{3}He-A являются плотности числа частиц $n(x)$, импульса $\pi_i(x)$, спина $s_\alpha(x)$ и энтропии $\sigma(x)$, а также векторы спиновой $d_\alpha(x)$ и пространственной $l_i(x)$ анизотропии и сверхтекучий импульс $p_i(x)$. В число динамических переменных мы включаем также плотность внутреннего орбитального момента $\underline{l}_i(x)$, обусловленного моментом импульса куперовских пар. Запишем плотность кинематической части лагранжиана, из которой мы получим СП динамических переменных A-фазы:

$$\mathcal{L}_k(x) = \underline{\pi}_i(x)b_{ij}^{-1}(x)\dot{u}_j(x) - \sigma(x)\dot{\psi}(x) -$$
$$- s_\alpha(x)\omega_\alpha(x) - \xi_i(x)\dot{g}_i(x) - \xi_i^*(x)\dot{g}_i^*(x)\ , \qquad (12)$$

где

$$\underline{\pi}_i = \pi_i - \sigma\nabla_i\psi - s_\alpha\omega_{\alpha i} - \xi_k\nabla_i g_k - \xi_k^*\nabla_i g_k^*\ . \qquad (13)$$

Здесь $\xi_i(x)$, $g_i(x)$ — некоторые обобщенные комплексные координаты и импульсы, через которые будут выражены физические динамические переменные — $n(x)$, $l_i(x)$, $p_i(x)$, $\underline{l}_i(x)$. Поскольку та часть функционала $\mathcal{L}_k(x)$, которая содержит переменные ξ_i, g_i, имеет стандартный, известный из классической механики вид, справедливы формулы

$$\left\{\xi_i(x),\, g_k(x')\right\} = \left\{\xi_i^*(x),\, g_k^*(x')\right\} = \delta_{ik}\delta(x-x')\ . \qquad (14)$$

Плотность импульса $\underline{\pi}_i(x)$ в (12) по-прежнему связывается с трансляциями в пространстве переменных $u_i(x)$, $\pi_i(x)$ и строится аналогично предыдущим случаям.

В дальнейшем нам понадобятся СП $\{\pi_i(x),\, \xi_k(x')\}$, $\{\pi_i(x),\, g_k(x')\}$. Для их вывода рассмотрим наряду с вариациями

$$\delta\pi_i(x) = -\nabla_j\left(\delta x_j(x)\pi_i(x)\right) - \pi_j(x)\nabla_i\delta x_j(x)\ ,$$
$$\delta u_i(x) = b_{ij}(x)\delta x_j(x),\quad \delta\psi(x) = -\delta x_i(x)\nabla_i\psi(x), \qquad (15)$$
$$\delta\sigma(x) = -\nabla_i\left(\delta x_i(x)\sigma(x)\right),\ \delta s_\alpha(x) = -\nabla_i\left(s_\alpha(x)\delta x_i(x)\right),$$
$$\delta a_{\alpha\beta}(x) = -\delta x_i(x)\nabla_i a_{\alpha\beta}(x)$$

также вариации

$$\delta\xi_i(x) = -\nabla_k\left(\xi_i(x)\delta x_k(x)\right),\ \delta g_i(x) = -\delta x_k(x)\nabla_k g_i(x), \qquad (16)$$

которые оставляют кинематическую часть лагранжиана инвариантной. С другой стороны, согласно (1), (2), вариации (16) можно представить в виде

$$\delta\xi_i(x) = \left\{\xi_i(x),\, G\right\}\ ,\quad \delta g_i(x) = \left\{g_i(x),\, G\right\}\ ,$$

где G — генератор преобразований (15), (16), равный

$$G = \int d^3x\left(\underline{\pi}_i(x)b_{ij}^{-1}(x)\delta u_j(x) - \sigma(x)\delta\psi(x) - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, s_\alpha(x)a_{\mu\gamma}(x)\delta a_{\mu\beta}(x) - \xi_i(x)\delta g_i(x) - \xi_i^*(x)\delta g_i^*(x)\right) =$$
$$= \int d^3x\pi_i(x)\delta x_i(x)\ .$$

Отсюда получим СП

$$\left\{\pi_i(x),\, \xi_k(x')\right\} = -\xi_k(x)\nabla_i\delta(x-x')\ ,$$
$$\left\{\pi_i(x),\, g_k(x')\right\} = \nabla_i\, g_k(x)\delta(x-x') \qquad (17)$$

(аналогично и для комплексно-сопряженных величин ξ_k^*, g_k^*).

Рассмотрим сначала спиновую динамику A-фазы, которая описывается плотностью спина $s_\alpha(x)$ и единичным вектором спиновой анизотропии $d_\alpha(x)$. Определим вектор d_α формулой

$$d_\alpha = \underline{d}_\beta\, a_{\beta\alpha}\ , \tag{18}$$

где $\underline{d}_\beta$ — произвольный постоянный единичный вектор; $a_{\alpha\beta}$ — матрица поворота, введенная нами при рассмотрении магнетика с нарушенной $SO(3)$ симметрией. Тогда, производя свертку вектора $\underline{d}_\alpha$ с матрицей поворота $a_{\alpha\beta}$ в формулах (8), (11), получаем алгебру СП переменных $s_\alpha(x)$, $d_\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\{s_\alpha(x),\ s_\beta(x')\} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(x)\delta(x-x')\ ,\\ \{s_\alpha(x),\ d_\beta(x')\} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}d_\gamma(x)\delta(x-x')\ ,\end{aligned} \tag{19}$$

а также СП с плотностью импульса $\pi_i(x)$:

$$\begin{aligned}\{\pi_i(x),\ s_\alpha(x')\} &= -s_\alpha(x)\nabla_i\delta(x-x')\ ,\\ \{\pi_i(x),\ d_\alpha(x')\} &= \delta(x-x')\nabla_i d_\alpha(x)\ .\end{aligned} \tag{20}$$

Скобки Пуассона (19), (20) являются основой при выводе уравнений спиновой динамики сверхтекучей A-фазы. Как известно, уравнения движения в гамильтоновом подходе имеют вид

$$\dot{\varphi}_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x),\ H\}$$

($\varphi_\alpha(x)$ — динамические переменные). Отсюда находим

$$\begin{aligned}\dot{s}_\alpha + \nabla_k(v_k^n s_\alpha) &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}\, s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta d_\beta}\, d_\gamma\right),\\ \dot{d}_\alpha + (v_k^n\nabla_k)d_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\beta}\, d_\gamma\ ,\quad v_k^n \equiv \frac{\delta H}{\delta\pi_k}\ .\end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (21) являются обобщением известных уравнений Легетта [17] с учетом движения нормальной компоненты.

Перейдем теперь к изучению орбитальной динамики. Она характеризуется переменными $\sigma(x)$, $n(x)$, $\pi_i(x)$, $l_i(x)$, $p_i(x)$, $\underline{l}_i(x)$. Введем физические динамические переменные $n(x)$, $l_i(x)$, $p_i(x)$, $\underline{l}_i(x)$, связав их с обобщенными координатами и импульсами $g_i(x)$, $\xi_i(x)$. Рассмотрим бесконечно малые фазовые преобразования с фазой $2\delta\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}&\delta\xi_i(x) = 2i\delta\varphi(x)\xi_i(x),\quad \delta g_i(x) = -2i\delta\varphi(x)g_i(x),\\ &\delta\xi_i^*(x) = -2i\delta\varphi(x)\xi_i^*(x),\quad \delta g_i^*(x) = 2i\delta\varphi(x)g_i^*(x).\end{aligned} \tag{22}$$

Плотность кинематической части (12) остается инвариантной, если наряду с преобразованиями (22) рассмотреть также преобразования плотности импульса

$$\delta\pi_k(x) = -2i\Big(\xi_i(x)g_i(x) - \xi_i^*(x)g_i^*(x)\Big)\nabla_k\delta\varphi(x)\ . \tag{23}$$

Согласно (2), генератор преобразований (22), (23) равен

$$\begin{aligned}G &= \int d^3x n(x)\delta\varphi(x)\ ,\\ n(x) &\equiv 2i\Big(\xi_i(x)g_i(x) - \xi_i^*(x)g_i^*(x)\Big).\end{aligned} \tag{24}$$

Величина $n(x)$, определяющая генератор локальных фазовых преобразований, имеет смысл плотности числа частиц. Тогда из (23) следует, что

$$\delta\pi_k(x) = -n(x)\nabla_k\delta\varphi(x)\ .$$

Представляя, с другой стороны, вариацию $\delta\pi_k(x)$ в виде

$$\delta\pi_k(x) = \{\pi_k(x),\ G\}\ ,\quad G = \int d^3x n(x)\delta\varphi(x)\ ,$$

найдем, в силу произвольности функции $\delta\varphi(x)$, СП

$$\{\pi_k(x),\ n(x')\} = -n(x)\nabla_k\delta(x-x')\ . \tag{25}$$

Рассмотрим теперь бесконечно малые вращения векторов ξ_i, g_i

$$\delta\xi_i(x) = \varepsilon_{ijk}\delta\varphi_j(x)\xi_k(x),\quad \delta g_i(x) = \varepsilon_{ijk}\delta\varphi_j(x)g_k(x) \tag{26}$$

($\delta\varphi_j$ — углы поворота) и аналогично для комплексно-сопряженных величин ξ_i^*, g_i^*. Наряду с преобразованиями (26) рассмотрим также преобразования плотности импульса

$$\delta\pi_l(x) = \varepsilon_{ijk}\Big(\xi_i(x)g_k(x) + \xi_i^*(x)g_k^*(x)\Big)\nabla_l\delta\varphi_j(x)\ , \tag{27}$$

которые оставляют кинематическую часть (12) инвариантной. Генератор преобразований (26), (27), согласно (2), имеет вид

$$\begin{aligned}G &= \int d^3x\underline{l}_i(x)\delta\varphi_i(x)\ ,\\ \underline{l}_i(x) &\equiv \varepsilon_{ijk}\Big(\xi_j(x)g_k(x) + \xi_j^*(x)g_k^*(x)\Big).\end{aligned} \tag{28}$$

Величина $\underline{l}_i(x)$ определяет генератор локальных вращений (26) и будет интерпретироваться нами как внутренний орбитальный момент куперовских пар A-фазы (см. об этом несколько ниже). Учитывая (28), для вариаций $\delta\pi_i(x)$ имеем

$$\delta\pi_i(x) = -\underline{l}_j(x)\nabla_i\delta\varphi_j(x)\ .$$

С другой стороны,

$$\delta\pi_i(x) = \left\{\pi_i(x),\ G\right\}\ ,\quad G = \int d^3x\underline{l}_i(x)\delta\varphi_i(x)\ .$$

Отсюда получим СП

$$\left\{\pi_i(x),\ \underline{l}_j(x')\right\} = \underline{l}_j(x)\nabla'_i\,\delta(x - x')\ . \tag{29}$$

Определим теперь вектор пространственной анизотропии l_i и сверхтекучий импульс p_i формулами

$$l_i = i\varepsilon_{ijk}g_jg_k^*\ ,\quad p_i = \frac{i}{4g_lg_l^*}\left(g_k\nabla_ig_k^* - g_k^*\nabla_ig_k\right). \tag{30}$$

При локальных фазовых преобразованиях (22) вектор l_k не меняется, а сверхтекучий импульс преобразуется по закону

$$p_i \to p'_i = p_i + \nabla_i\varphi\ .$$

Предположим, что мы рассматриваем величины $g_ig_i^*$, g_i^2, g_i^{*2} как динамические переменные. Учитывая, что

$$H = \int d^3x\varepsilon(x)\ , \tag{31}$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\left(x;\ \sigma(x'),\ n(x'),\ \pi_i(x'),\ l_i(x'),\ p_i(x'),\ \underline{l}_i(x')\right)$$

(мы выписываем здесь зависимость плотности энергии только от переменных, описывающих орбитальную динамику), а также представления (24), (28), (30) и СП (14), (16), для этих переменных получаем уравнения движения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i^n\nabla_i\right)g_kg_k^* = 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i^n\nabla_i + 4i\mu\right)g_k^2 = 0\ , \tag{32}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i^n\nabla_i - 4i\mu\right)g_k^{*2} = 0;\quad \mu \equiv \frac{\delta H}{\delta n}\ ,$$

имеющие тривиальные решения

$$g_k^2 = g_k^{*2} = 0 \tag{33}$$

и $g_kg_k^* = C$ (C — константа, не зависящая от координат и времени). Всюду далее мы принимаем $C = 1$, т.е.

$$g_kg_k^* = 1\ . \tag{34}$$

Таким образом, вектор g_k является нормированным комплексным вектором, квадрат которого равен нулю, и допускает следующее представление:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Delta_1 + i\Delta_2)\ ;\ \ \Delta_1^2 = \Delta_2^2 = 1,\ \ \Delta_1\Delta_2 = 0\ . \tag{35}$$

С учетом соотношений (33), (34) вектор пространственной анизотропии l_i является единичным, $l_i^2 = 1$, а сверхтекучий импульс p_i окончательно определяется формулой

$$p_i = \frac{i}{4}\left(g_k\nabla_ig_k^* - g_k^*\nabla_ig_k\right). \tag{36}$$

Векторы Δ_1, Δ_2, $\mathbf{l} = [\Delta_1\Delta_2]$ образуют локальные оси квантования в микроскопической теории. Из определений (30), (36) и представления (35) следует, что векторы p_i и l_i связаны тождеством Мермина—Хо:

$$\nabla_i\,p_k - \nabla_k\,p_i = \frac{1}{2}\,\mathbf{l}[\nabla_i\mathbf{l},\ \nabla_k\mathbf{l}]\ . \tag{37}$$

Легко видеть, что сверхтекучий импульс p_i не меняется при одновременном выполнении фазового преобразования (22) и поворота вокруг направления $\mathbf{l}$ на угол $2\delta\varphi$, при котором $\delta\varphi_j = 2l_j\delta\varphi$ (комбинированная фазово-вращательная инвариантность).

Формулы (24), (28), (30), (36) решают поставленную задачу о нахождении связи между динамическими переменными $n(x)$, $\underline{l}_i(x)$, $l_i(x)$, $p_i(x)$ и обобщенными координатами и импульсами $g_i(x)$, $\xi_i(x)$. Используя приведенные представления и СП (14), (16), легко найти следующую алгебру СП переменных, описывающих орбитальную динамику сверхтекучего ^{3}He-A:

$$\left\{\pi_i(x),\ \pi_k(x')\right\} = \pi_k(x)\nabla'_i\,\delta(x-x') - \pi_i(x')\nabla_k\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\pi_i(x),\ n(x')\right\} = -n(x)\nabla_i\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\pi_i(x),\ \sigma(x')\right\} = -\sigma(x)\nabla_i\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\pi_i(x),\ l_j(x')\right\} = \delta(x-x')\nabla_i l_j(x)\ ,$$

$$\left\{\pi_i(x),\ \underline{l}_j(x')\right\} = -\underline{l}_j(x)\nabla_i\delta(x-x')\ , \tag{38}$$

$$\left\{\pi_i(x),\ p_j(x')\right\} = (\nabla_i p_j - \nabla_j p_i)\delta(x-x') - p_i(x)\nabla_j\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{n(x),\ p_i(x')\right\} = \nabla'_i\,\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\underline{l}_i(x),\ p_j(x')\right\} = \frac{1}{2}\ l_i(x')\nabla'_j\,\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\underline{l}_i(x),\ \underline{l}_j(x')\right\} = \varepsilon_{ijk}\,\underline{l}_k\delta(x-x')\ ,$$

$$\left\{\underline{l}_i(x),\ l_j(x')\right\} = \varepsilon_{ijk}l_k\delta(x-x')\ .$$

После того как алгебра (38) получена, рассмотрим вопрос об интерпретации величины $\underline{L}_i = \ = \int d^3x\underline{l}_i(x)$ как внутреннего орбитального момента. С этой целью введем также орбитальный момент $L_i^0 = \int d^3x\varepsilon_{ikl}x_k\pi_l$, построенный с помощью плотности импульса $\pi_l(x)$. Согласно (6), величины L_i^0, $P_i \equiv \int d^3x\pi_i(x)$ удовлетворяют хорошо известным СП

$$\left\{P_i\ ,\ L_j^0\right\} = \varepsilon_{ijl}P_l\ ,\ \ \left\{L_i^0\ ,\ L_j^0\right\} = \varepsilon_{ijk}L_k^0\ .$$

Из (38) следует, что для величин $\underline{L}_i$, P_i справедливы соотношения

$$\left\{P_i\ ,\ \underline{L}_j\right\} = 0,\ \ \left\{\underline{L}_i\ ,\ \underline{L}_j\right\} = \varepsilon_{ijk}\underline{L}_k\ .$$

Замечая, что $\{L_i^0\ ,\ \underline{L}_j\} = 0$, для полного момента количества движения $L_i = L_i^0 + \underline{L}_i$ имеем

$$\left\{P_i\ ,\ L_j\right\} = \varepsilon_{ijk}P_k\ ,\ \ \left\{L_i\ ,\ L_j\right\} = \varepsilon_{ijk}L_k\ .$$

Кроме того, из соотношений (38) следует, что при преобразованиях с генератором L_i^0 величины $n(x)$, $l_i(x)$ преобразуются как скаляры:

$$\left\{n(x),\ L_j^0\right\} = -\varepsilon_{jkl}\ x_k\nabla_l\ n(x)\ ,$$

$$\left\{l_i(x),\ L_j^0\right\} = -\varepsilon_{jkl}\ x_k\nabla_l\ l_i(x)\ ,$$

в то время как величины $\pi_i(x)$, $p_i(x)$ преобразуются как векторы:

$$\left\{\pi_i(x),\ L_j^0\right\} = \varepsilon_{ijl}\ \pi_l(x) - \varepsilon_{jkl}x_k\nabla_l\ \pi_i(x)\ ,$$

$$\left\{p_i(x),\ L_j^0\right\} = \varepsilon_{ijl}\ p_l(x) - \varepsilon_{jkl}x_k\nabla_l\ p_i(x)\ .$$

При преобразованиях же с генератором $\underline{L}_j$ величины $n(x)$, $\pi_i(x)$, $p_i(x)$ не преобразуются:

$$\left\{n(x),\ \underline{L}_j\right\} = \left\{\pi_i(x),\ \underline{L}_j\right\} = \left\{p_i(x),\ \underline{L}_j\right\} = 0\ ,$$

а вектор пространственной анизотропии $l_i(x)$, который аналогичен вектору директора в жидких кристаллах, изменяется по закону

$$\left\{l_i(x),\ \underline{L}_j\right\} = \varepsilon_{ijk}l_k(x)\ .$$

Таким образом, внутренний орбитальный момент $\underline{L}_i = \int d^3x\underline{l}_i(x)$ вводится нами как генератор пространственных вращений переменных, имеющих жидкокристаллический характер, и обладает свойствами, аналогичными спиновому моменту S_α . Из СП с величинами L_i^0 , $\underline{L}_i$ следует, что при преобразованиях с полным орбитальным моментом L_i плотность числа частиц $n(x)$ преобразуется как скаляр: $\{n(x),\ L_j\} = -\varepsilon_{jkl}x_k\nabla_l n(x)$, а величины $\pi_i(x)$, $p_i(x)$, $l_i(x)$ — как векторы:

$$\left\{w_i(x),\ L_j\right\} = \varepsilon_{ijl}w_l(x) - \varepsilon_{jkl}x_k\nabla_l w_i(x)\ ,$$

$$w_i(x) = \left\{\pi_i(x),\ p_i(x),\ l_i(x)\right\}\ .$$

Условие вращательной инвариантности плотности энергии системы формулируется с помощью полного орбитального момента L_i и имеет вид

$$\left\{L_i\ ,\ \varepsilon(x)\right\} = \varepsilon_{ikl}x_k\nabla_l\varepsilon(x)\ . \tag{39}$$

3. Уравнения орбитальной динамики

Прежде чем записать уравнения орбитальной динамики, отметим следующее обстоятельство. Поскольку куперовские пары обладают орбитальным моментом и имеется плотность внутреннего орбитального момента $\underline{l}_i$, то величина $\underline{l}_i$ вносит вклад в суммарную плотность импульса j_i :

$$j_i = \pi_i + \frac{1}{2}\ \mathrm{rot}_i\,\underline{\mathbf{l}} \tag{40}$$

(полный импульс при таком переопределении остается неизменным, $\int d^3xj_i(x) = \int d^3x\pi_i(x)$). Соответственно плотность энергии (31) зависит от переменных π_i , $\underline{l}_i$ только через плотность импульса j_i :

$$\varepsilon\left(x;\ \sigma(x'),\ n(x'),\ \pi_i(x'),\ l_i(x'),\ p_i(x'),\ \underline{l}_i(x')\right) =$$

$$= \varepsilon\left(x;\ \sigma(x'),\ n(x'),\ j_i(x'),\ l_i(x'),\ p_i(x')\right). \tag{41}$$

Из (41) следует, что

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v}^n\ ;\ \ \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{\delta H}{\delta\underline{\mathbf{l}}}\ ,\ \ \mathbf{v}^n \equiv \frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{\pi}} = \frac{\delta H}{\delta\mathbf{j}}\ , \tag{42}$$

т.е. локальное вращательное движение нормальной компоненты является твердотельным. Орбитальный момент L_i, построенный на величине j_i, $L_i \equiv \int d^3x \varepsilon_{ikl}\, x_k\, j_l$, является суммой орбитального момента $L_i^0 \equiv \int d^3x \varepsilon_{ikl}\, x_k \pi_l$ и внутреннего момента $\underline{L}_i = \int d^3x \underline{l}_i(x)$ и совпадает с полным орбитальным моментом, $L_i = L_i^0 + \underline{L}_i$. Таким образом, в систему гидродинамических уравнений мы включим уравнение движения именно для плотности импульса j_i.

Система СП (38) служит основой для вывода уравнений гидродинамики сверхтекучего ^{3}He-A. В локальном пределе, когда плотность энергии $\varepsilon(x)$ имеет вид

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\sigma(x), n(x), j_i(x), s_\alpha(x), l_i(x), \nabla_k l_i(x), p_i(x), d_\alpha(x)\right),$$

и с учетом тождества Мермина—Хо (37) для гидродинамических уравнений A-фазы получим

$$\dot{n} + \nabla_i \left(v_i^n n + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \right) = 0\ ,\quad \dot{\sigma} + \nabla_i (v_i^n \sigma) = 0\ ,$$

$$\dot{p}_i + \nabla_i \left(v_k^n p_k + \mu + \frac{1}{4}\, l_k \operatorname{rot}_k \mathbf{v}^n \right) + \frac{1}{2}\, \mathbf{l}[\nabla_i \mathbf{l},\, \dot{\mathbf{l}}] = 0\ ,$$

$$\dot{l}_i + (v_k^n \nabla_k) l_i + \frac{1}{2}\, [\mathbf{l} \operatorname{rot} \mathbf{v}^n]_i = 0\ ,\quad \dot{j}_i = -\nabla_k t_{ik}\ , \tag{43}$$

$$\dot{\underline{l}}_i + \nabla_k (v_k^n\, \underline{l}_i) + \frac{1}{2}\, [\underline{\mathbf{l}} \operatorname{rot} \mathbf{v}^n]_i + [\mathbf{lh}]_i + {}$$

$$+ \frac{1}{2}\, \nabla_k \left(l_i\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right) = 0\ .$$

Здесь t_{ik} — тензор натяжений:

$$t_{ik} = t_{ik}^s + t_{ik}^a\ , \tag{44}$$

$$t_{ik}^s = p \delta_{ik} + \frac{1}{2} \left(j_i v_k^n + p_i\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \nabla_i l_r\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k l_r} + (i \leftrightarrow k) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \underline{l}_s \left(\varepsilon_{irs} \nabla_r v_k^n + \varepsilon_{krs} \nabla_r v_i^n \right) - \frac{1}{4} \left(\underline{l}_i \operatorname{rot}_k \mathbf{v}^n + \underline{l}_k \operatorname{rot}_i \mathbf{v}^n \right),$$

$$t_{ik}^a = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ikm} \nabla_j \left(\frac{1}{2}\, l_m\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_j} + \tau_{mj} \right),\ \tau_{mj} = \varepsilon_{ikm} l_k\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_j l_i}\ ;$$

p — давление,

$$p = -\varepsilon + T\sigma + \mu n + j_k v_k^n + s_\alpha\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha} + \frac{1}{2}\, \underline{l}_k \operatorname{rot}_k \mathbf{v}^n\ ;$$

$$T \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma}\ ,\quad h_i \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial l_i} - \nabla_k\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k l_i}\ .$$

Симметричную часть тензора натяжений в (44) мы обозначили t_{ik}^s, антисимметричную — t_{ik}^a. При выделении симметричной части тензора t_{ik} мы использовали условие вращательной инвариантности (39), которое после вычисления СП записывается в виде

$$\varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial l_k}\, l_l + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_k l_r}\, \nabla_l l_r + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_r l_k}\, \nabla_r l_l + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}\, p_l + v_k^n j_l \right) = 0.$$

Хотя тензор натяжений имеет антисимметричную часть, тем не менее, поскольку она имеет вид пространственной производной, для плотности полного орбитального момента $[\mathbf{rj}]$ справедлив дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_{ikl}\, x_k\, j_l \right) = -\nabla_s \left(\varepsilon_{ikl}\, x_k t_{ls} + \frac{1}{2}\, l_i\, \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_s} + \tau_{is} \right).$$

Легко видеть, что уравнения (43) совместны с тождеством Мермина—Хо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_i p_k - \nabla_k p_i - \frac{1}{2}\, \mathbf{l}[\nabla_i \mathbf{l},\, \nabla_k \mathbf{l}] \right) = 0.$$

Динамические уравнения (43), полученные в гамильтоновом подходе, являются обобщением соответствующих уравнений работы [1] на случай галилеевски неинвариантных систем* и включают также уравнение для внутреннего орбитального момента. Последнее уравнение в (43), как правило, не выписывается при формулировке уравнений орбитальной динамики, так как ввиду сильного перекрытия куперовских пар внутренний орбитальный момент является малым (при $T = 0$ в приближении слабой связи $|\underline{l}_i| \sim \rho(\Delta_0/\varepsilon_F)^2$, см. [13]). Из уравнений (43) следует, что учет движения нормальной компоненты не сводится только лишь к появлению конвекционных членов, но, кроме того, появляются члены, обусловленные вихревым движением нормальной компоненты, пропорциональные $\operatorname{rot} \mathbf{v}^n$. Следствием этого может быть, например, возникновение эффекта увлечения, состоящего в том, что вращательное движение нормальной компоненты с $\nabla(l_k \operatorname{rot}_k \mathbf{v}^n) \neq 0$ генерирует поступательное

* Мы не принимаем во внимание слагаемые, содержащие произвольные феноменологические постоянные α, β, γ, которые были выведены в [1] из общих симметрийных соображений и не могут быть получены в рамках чисто гамильтонова формализма.

движение сверхтекучей компоненты [18] (см. уравнение для сверхтекучего импульса p_i).

Если система обладает свойством галилеевской инвариантности, то плотность энергии $\varepsilon(\mathbf{x})$ при преобразованиях Галилея с параметром $\mathbf{v}$ подчиняется закону

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) + j_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)v_i + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)v^2 , \quad \rho(\mathbf{x}) \equiv mn(\mathbf{x}) \tag{45}$$

(m — масса атома ^{3}He). Использование функционала энергии, удовлетворяющего свойству (45), приводит к системе гидродинамических уравнений, также являющейся галилеевски инвариантной. Чтобы проверить это, убедимся вначале в галилеевской инвариантности лагранжиана системы, соответствующего кинематической части (12). Тогда из вариационного принципа будет следовать также и галилеевская инвариантность уравнений (43). В соответствии с (12), плотность лагранжиана системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \underline{\pi}_i(\mathbf{x})b^{-1}_{ij}(\mathbf{x})\dot{u}_j(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})\dot{\psi}(\mathbf{x}) - s_\alpha(\mathbf{x})\omega_\alpha(\mathbf{x}) - \\ - \xi_i(\mathbf{x})\dot{g}_i(\mathbf{x}) - \xi^*_i(\mathbf{x})\dot{g}^*_i(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}) . \tag{46}$$

Трансформационные свойства переменных, входящих в (46), относительно преобразований Галилея определяются формулами

$$\pi'_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) + \rho(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)v_i , \tag{47}$$
$$u'_i = u_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) + v_i t , \quad \sigma'(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) ,$$
$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) , \quad s'_\alpha(\mathbf{x}) = s_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) ,$$
$$a'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) ,$$
$$\xi'_i(\mathbf{x}) = \xi_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)\exp\left\{2i\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{x}\right)\right\} ,$$
$$g'_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)\exp\left\{-2i\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{x}\right)\right\} .$$

Из (47) следуют законы преобразования величин $\rho(\mathbf{x})$, $p_i(\mathbf{x})$, $l_i(\mathbf{x})$, $\underline{l}_i(\mathbf{x})$:

$$\rho'(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}-\mathbf{v}t), \quad p'_i(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) + mv_i , \\ l'_i(\mathbf{x}) = l_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) , \quad \underline{l}'_i(\mathbf{x}) = \underline{l}_i(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) . \tag{48}$$

Используя (47), (48), нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) - \frac{1}{2}v_i \,\mathrm{rot}_i\, \underline{l}(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) . \tag{49}$$

В силу (49), лагранжиан инвариантен относительно преобразований Галилея:

$$\int d^3x\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int d^3x\mathcal{L}'(\mathbf{x}) ,$$

и, следовательно, уравнения (43), соответствующие плотности энергии (45), также галилеевски инвариантны. Отметим, что и тождество Мермина—Хо сохраняет свой вид относительно преобразований (48).

В заключение сделаем замечание относительно динамики циклических переменных u_i, ψ, входящих в плотность кинематической части лагранжиана (12). Гамильтоновы уравнения движения для этих переменных имеют, согласно (6), вид

$$\dot{u}_i = b_{ij}v^n_j , \quad \dot{\psi} + (v^n_i\nabla_i)\psi = -T$$

и могут быть проинтегрированы после нахождения решений уравнений (43). Переменной $u_i(x, t)$ можно дать простую физическую интерпретацию, находящуюся в соответствии со смыслом этой переменной в плотности кинематической части лагранжиана (4). Определим с этой целью функцию $x_i = x_i(\xi, t)$ неявным образом с помощью равенства

$$x_i(\xi, t) = \xi_i + u_i\Big(x(\xi, t), t\Big), \quad \xi_i = \mathrm{const} . \tag{50}$$

Дифференцирование обеих частей формулы (50) по времени приводит к соотношению $\dot{u}_i = b_{ij}\dot{x}_j$. Поэтому $\dot{x}_j(\xi, t) = v^n_j$.

Таким образом, заключаем, что функция $x_i(\xi, t)$, которая определяется соотношением (50), и величина u_i представляют собой соответственно эйлерову координату и вектор смещения элемента нормальной компоненты (величина ξ_i имеет смысл лагранжевой координаты того же элемента).

Авторы благодарят М. Ю. Ковалевского за обсуждение результатов работы. Работа была выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины, грант № 2.4/378.

1. Г. Е. Воловик, *УФН* **143**, 73 (1984); G. E. Volovik, *Exotic properties of superfluid* ^{3}He, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong (1992).
2. D. Vollhardt, P. Wölfle, *The superfluid phases of helium 3*, F. Taylor (ed.), Francis, London — New York — Philadelphia (1990).
3. R. Combescot, *Phys. Lett.* **A78**, 85 (1980).
4. N. D. Mermin and P. Muzikar, *Phys. Rev.* **B21**, 980 (1980).
5. K. Nagai, *J. Low Temp. Phys.* **38**, 677 (1980).
6. M. Ishikawa, K. Miyake, and T. Usui, *Progr. Theor. Phys.* **63**, 1083 (1980).

7. C. R. Hu and W. M. Saslow, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 605 (1977).
8. T.-L. Ho, in: *Quantum Fluids and Solids*, S. B. Trickey, E. D. Adams, and J. M. Dufty (eds.), Plenum Press, New York – London (1977), p. 97.
9. M. Ashida, *Progr. Theor. Phys.* **65**, 409 (1981).
10. I. M. Khalatnikov and V. V. Lebedev, *Phys. Lett.* **A61**, 319 (1977); В. В. Лебедев, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **73**, 1537 (1977).
11. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovick, *Ann. Phys.* **125**, 67 (1980).
12. А. А. Исаев, М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ЭЧАЯ* **27**, 431 (1996).
13. Г. Е. Воловик, В. П. Минеев, *ЖЭТФ* **81**, 989 (1981).
14. G. E. Volovik and A. V. Balatskii, *J. Low Temp. Phys.* **58**, 1 (1985).
15. А. А. Исаев, М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **102**, 283 (1995).
16. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Л. Шишкин, *УФЖ* **36**, 245 (1991).
17. A. J. Leggett, *Ann. Phys.* **85**, 11 (1974).
18. M. Liu and M.C. Cross, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 296 (1979).

On a Hamiltonian formulation of hydrodynamic equations for superfluid ^{3}He-A

A. A. Isayev and S. V. Peletminsky

Within the framework of consistent Hamiltonian formalism, the Poisson brackets for the dynamic variables describing the spin and orbital dynamics of the superfluid ^{3}He-A are found. The consideration is based on the derivation of a kinematic part of the Lagrange function of the system and the consideration of the variables' variations that leave the kinematic part of the Lagrange function invariant. Equations of motion for the dynamic variables are obtained and the question of a Halilean invariance of the obtained equations is considered based on the invariance of the Lagrange function with respect to Halilean transformations.