Физика низких температур, 1997, т. 23, № 11, с. 1243–1246

Краткие сообщения

Гамильтонов формализм в теории квадрупольного магнетика

А. А. Исаев

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: isayev@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 18 апреля 1997 г., после переработки 5 июня 1997 г.

Получены скобки Пуассона для динамических переменных квадрупольного магнетика — плотности спина и матрицы квадрупольного момента. Основным моментом рассмотрения является вывод кинематической части лагранжиана системы. Найдены уравнения движения и определено число голдстоуновских и активационных мод в случае, когда функционал энергии инвариантен относительно спиновых вращений.

Одержано дужки Пуасона для динамічних змінних квадрупольного магнетика — густини спіну та матриці квадрупольного моменту. Основним моментом розглядання є вивід кінематичної частинки лагранжіана системи. Знайдено рівняння руху і визначено число голдстоунівських та активаційних мод у випадку, коли функціонал енергії є інваріантним відносно спінових обертань.

PACS: **75.10.–b**

1. Скобки Пуассона квадрупольного магнетика

Как известно, описание магнетиков, в которых наряду с обычными спин-спиновыми взаимодействиями имеются тензорные взаимодействия [1] (обменные взаимодействия высших порядков, одноионная анизотропия), требует привлечения не только дипольных (спиновых), но и мультипольных (квадрупольных, октупольных и т.д.) степеней свободы [2]. Причина этого состоит в том, что замена тензорных взаимодействий некоторыми эффективными полями, выражающимися только через намагниченность, и использование расцеплений вида $\langle (s^i)^m \rangle \to \langle s^i \rangle^m$ возможны лишь в случае малости тензорных взаимодействий. Уже в простейшем случае спина $S = 1$ требуется использование, наряду со спиновой переменной, матрицы квадрупольного момента. Такая динамика, включающая тензорные степени свободы, может сильно отличаться от ориентационной динамики для намагниченности, описываемой уравнениями Ландау–Лифшица.

Цель настоящего сообщения — развитие гамильтонового подхода к теории квадрупольного магнетика. Как известно [3], гамильтонов подход является эффективным методом получения нелинейных динамических уравнений, автоматически учитывающих свойства симметрии гамильтониана. Будучи феноменологическим формализмом, он обладает большей простотой и физической ясностью по сравнению с микроскопическим рассмотрением, которое является, как правило, модельно зависимым [2]. В основе гамильтонова подхода лежит задание скобок Пуассона (СП) динамических переменных системы. Динамическими переменными квадрупольного магнетика являются (в континуальном пределе) плотность спина $s_\alpha(x)$ и матрица квадрупольного момента $f_{\alpha\beta}(x)$. Существует несколько способов получения СП [4]. Мы будем следовать подходу, развитому в [5], согласно которому определяющее значение для выяснения структуры СП имеют вид кинематической части лагранжиана системы

$$L_k = \int d^3x F_\alpha(x;\, \varphi)\, \dot{\varphi}_\alpha(x) \equiv \int d^3x \mathcal{L}_k(x)$$

(φ_α — динамические переменные; $F_\alpha(x;\, \varphi(x'))$ — некоторый функционал переменных φ_α) и вариации динамических переменных, оставляющие кинематическую часть инвариантной. Поэтому остановимся на выводе функционала $\mathcal{L}_k(x)$ в случае квадрупольного магнетика.

В работе [6] выписывалась кинематическая часть лагранжиана для магнетика с полным нарушением симметрии относительно спиновых вращений:

$$\underline{\mathcal{L}}_k(x) = -s_\alpha(x)\omega_\alpha(x)\ , \quad \omega_\alpha = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\tilde{a}_{\gamma\mu}\,\dot{a}_{\mu\beta}\ , \tag{1}$$

где a — действительная матрица вращений в спиновом пространстве ($a\tilde{a} = 1$). С помощью кинематической части (1) могут быть получены СП переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$. Дифференцируя условие ортогональности матрицы a по времени, получаем

$$\dot{a}\tilde{a} + a\dot{\tilde{a}} = 0\ . \tag{2}$$

Модифицируем плотность кинематической части $\underline{\mathcal{L}}_k$ лагранжиана с учетом ограничения (2)

$$\underline{\mathcal{L}}_k \to \mathcal{L}_k = \underline{\mathcal{L}}_k + \frac{1}{2}\,f_{\alpha\beta}(\dot{a}\tilde{a} + a\dot{\tilde{a}}\,)_{\alpha\beta}\ . \tag{3}$$

Здесь величины $f_{\alpha\beta}$ играют роль множителей Лагранжа (далее мы выясним, что матрица $f_{\alpha\beta}$ имеет смысл матрицы квадрупольного момента). Считая, что матрица $f_{\alpha\beta}$ является симметричной ($f = \tilde{f}$), преобразуем выражение (3) к виду

$$\mathcal{L}_k = c_{\alpha\beta}\,\dot{a}_{\beta\alpha}\ , \tag{4}$$

где

$$c_{\alpha\beta} = \left(f_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\rho\nu}\,s_\nu\right)a^{-1}_{\rho\beta}\ , \quad \tilde{f} = f\ . \tag{5}$$

В дальнейшем будем считать матрицу a матрицей произвольного линейного преобразования. По сути, мы произвели расширение набора динамических переменных. Новый набор переменных, соответствующий плотности кинематической части (4), включает в себя плотность спина $s_\alpha(x)$, матрицу $a_{\alpha\beta}(x)$ произвольного линейного преобразования, а также множители Лагранжа $f_{\alpha\beta}(x)$. Скобки Пуассона для первоначального набора переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$ (где $a_{\alpha\beta}$ — матрица поворота) будут образовывать подалгебру СП расширенного набора переменных. Кроме того, с помощью нового набора переменных нам удастся получить подалгебру СП, соответствующую квадрупольному магнетику.

Плотность кинематической части (4) имеет стандартный вид, известный из классической механики. Поэтому мы можем сразу записать СП переменных a, c:

$$\begin{aligned}\{a_{\alpha\beta}(x),\, a_{\mu\nu}(x')\} &= \{c_{\alpha\beta}(x),\, c_{\mu\nu}(x')\} = 0,\\ \{a_{\alpha\beta}(x),\, c_{\mu\nu}(x')\} &= \delta_{\alpha\nu}\,\delta_{\beta\mu}\,\delta(x - x')\ .\end{aligned} \tag{6}$$

В дальнейшем удобно будет ввести тензор $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = c_{\alpha\nu}\,a_{\nu\beta}\ . \tag{7}$$

Тогда, как следует из (5),

$$g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,s_\gamma\ .$$

В свою очередь, плотность спина выражается через антисимметричную часть $g_{\alpha\beta}$:

$$s_\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,g^a_{\gamma\beta}(x)\ , \quad g^a_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu})\ , \tag{8}$$

а матрица $f_{\alpha\beta}$ — через симметричную часть $g_{\alpha\beta}$:

$$f_{\alpha\beta} = g^s_{\alpha\beta}\ , \quad g^s_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\,(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha})\ . \tag{9}$$

Учитывая определение (7) матрицы $g_{\alpha\beta}$ и формулы (6), легко получить следующую алгебру для переменных $a_{\alpha\beta}(x)$, $g_{\alpha\beta}(x)$:

$$\begin{aligned}\{a_{\alpha\beta}(x),\, g_{\mu\nu}(x')\} &= \delta_{\beta\mu}a_{\alpha\nu}(x)\,\delta(x - x')\ ,\\ \{g_{\alpha\beta}(x),\, g_{\mu\nu}(x')\} &= \left(g_{\alpha\nu}(x)\delta_{\beta\mu} - g_{\mu\beta}(x)\delta_{\alpha\nu}\right)\delta(x - x')\ .\end{aligned} \tag{10}$$

Переменные $s_\alpha(x)$, $f_{\alpha\beta}(x)$ связаны с переменными $g_{\alpha\beta}(x)$ соотношениями (8),(9). Отсюда и из (10) найдем СП для динамических переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$, $f_{\alpha\beta}(x)$:

$$\begin{gathered}\{f_{\alpha\beta}(x),\, f_{\mu\nu}(x')\} =\\ = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\gamma\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\gamma\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\delta_{\beta\nu}\right)s_\gamma(x)\delta(x - x'),\\ \{s_\alpha(x),\, f_{\beta\gamma}(x')\} = \left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}f_{\gamma\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}f_{\beta\rho}(x)\right)\delta(x - x'),\\ \{s_\alpha(x),\, s_\beta(x')\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,s_\gamma(x)\,\delta(x - x'),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\{a_{\alpha\beta}(x),\, s_\mu(x')\} = \varepsilon_{\beta\mu\rho}a_{\alpha\rho}(x)\,\delta(x - x'),\\ \{a_{\alpha\beta}(x),\, a_{\mu\nu}(x')\} = 0\ ,\\ \{a_{\alpha\beta}(x),\, f_{\mu\nu}(x')\} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\beta\mu}a_{\alpha\nu}(x) + \delta_{\beta\nu}a_{\alpha\mu}(x)\right)\delta(x - x').\end{gathered} \tag{12}$$

Первые три формулы (11) определяют подалгебру динамических переменных s, f. Приведем физическую интерпретацию этой подалгебры, заменив, согласно общим правилам квантовой механики, динамические переменные s_α , $f_{\alpha\beta}$ на операторы $\hat{s}_\alpha$, $\hat{f}_{\alpha\beta}$ и СП $\{\ldots,\ \ldots\}$ на коммутаторы $1/i\ [\ldots,\ \ldots]$. Тогда соотношения (11) примут вид

$$\left[\hat f_{\alpha\beta}(x), \hat f_{\mu\nu}(x')\right] = \frac{i}{4}\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\gamma\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\gamma\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\delta_{\beta\nu}\right)\hat s_\gamma(x)\delta(x-x'),$$

$$\left[\hat s_\alpha(x), \hat f_{\beta\gamma}(x')\right] = i\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\hat f_{\gamma\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}\hat f_{\beta\rho}(x)\right)\delta(x-x'), \qquad \left[\hat s_\alpha(x), \hat s_\beta(x')\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat s_\gamma(x)\,\delta(x-x') .$$

Легко произвести реализацию этой алгебры на языке спиновых матриц, соответствующих спину $S = 1$ ($(s_\alpha)_{\mu\nu} = i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$), а именно:

$$\hat f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\hat s_\alpha \hat s_\beta + \hat s_\beta \hat s_\alpha - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,\hat s^2\right). \qquad (13)$$

Поскольку $\hat f_{\alpha\beta}$ представляет собой оператор квадрупольного момента (см. [7]), будем считать величину $f_{\alpha\beta}$ в формулах (11) матрицей квадрупольного момента спина $S = 1$, причем $\mathrm{Sp}\, f = f_{\alpha\alpha} = 0$ (соотношение $f_{\alpha\alpha} = 0$ совместно с подалгеброй (11)). Используя СП (11), получаем уравнения динамики для величин s_α, $f_{\alpha\beta}$:

$$\dot s_\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\beta(x)}\, s_\gamma(x) + 2\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\, f_{\mu\rho}(x)\,\frac{\delta H}{\delta f_{\mu\beta}(x)} ,$$
$$\dot f_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\delta H}{\delta f_{\gamma\nu}(x)}\left(\delta_{\gamma\beta}\,\varepsilon_{\nu\mu\alpha} + \delta_{\alpha\nu}\,\varepsilon_{\gamma\beta\mu}\right)s_\mu(x) + \qquad (14)$$
$$+\left(\varepsilon_{\beta\gamma\rho} f_{\alpha\rho}(x) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} f_{\beta\rho}(x)\right)\frac{\delta H}{\delta s_\gamma(x)} .$$

Уравнения (14) описывают «идеальную гидродинамику» квадрупольного магнетика и справедливы в области достаточно низких температур ($T << T_c$), когда можно не учитывать релаксационные процессы. Как следует из (14), для квадрупольного магнетика в общем случае не выполняется основное условие ориентационной динамики $s^2 = \mathrm{const}$. Вместо этого имеются две новые независимые сохраняющиеся величины

$$I_1 = \mathrm{Sp}\, f^2 - \frac{1}{2}\, s^2 \equiv \mathrm{Sp}\, g^2 ,$$
$$I_2 = \mathrm{Sp}\, f^3 + \frac{3}{4}\, s_\alpha\, f_{\alpha\beta}\, s_\beta \equiv \mathrm{Sp}\, g^3 , \qquad (15)$$

СП которых с переменными s_α, $f_{\alpha\beta}$ равны нулю. Поскольку сохранение величин I_1, I_2 не связано с конкретной структурой гамильтониана, а обусловлено лишь структурой СП (11), соотношения (15) представляют собой кинематические связи. Поэтому в действительности число независимых динамических переменных равно шести [8–10], а не восьми. Из общей алгебры (11),(12) можно выделить подалгебру динамических переменных $a_{\alpha\beta}$, s_α (величины $f_{\alpha\beta}$ в эту подалгебру не входят), которая совместна с дополнительным условием $a\tilde a = 1$. Эта подалгебра определяет низкочастотную динамику многоподрешеточного магнетика [11].

Отметим, что квантовомеханическая динамика квадрупольного магнетика со спином $S = 1$ изучалась во многих работах (см., например, обзор [2] и ссылки в нем). В случае чистых состояний эта динамика описывается в терминах четырех независимых переменных. В общем случае требуется привлечение полного набора средних от восьми операторов $\hat s_\alpha$, $\hat f_{\alpha\beta}$, составляющих алгебру Ли SU(3), при учете двух кинематических операторных тождеств.

2. Спектр коллективных колебаний

Нахождение спектра коллективных колебаний требует определения соответствующих равновесных значений плотности спина s^0 и квадрупольного момента f^0 путем минимизации функционала энергии $H(s, f)$ с последующей линеаризацией уравнений динамики (14) вблизи найденных значений s^0, f^0. Такая процедура является, как правило, довольно громоздкой. Приведем некоторые симметрийные соображения, которые позволяют сделать общие выводы о характере возможных колебаний в системе.

Рассмотрим однородные спиновые вращения, описываемые матрицей c,

$$s \to s' = cs\,, \quad f \to f' = cf\,\tilde c\,, \qquad (16)$$

и предположим, что функционал энергии $H(s, f)$ инвариантен относительно преобразований (16):

$$H(s, f) = H(s', f') . \qquad (17)$$

Тогда, если функционал $H(s, f)$ достигает минимума при $s = s^0$, $f = f^0$, то минимум является вырожденным и имеющее место вырождение описывается преобразованием

$$s^0 \to s = cs^0\,, \quad f^0 \to f = cf^0\,\tilde c\,. \qquad (18)$$

Параметр порядка квадрупольного магнетика представляется плотностью спина s_α и матрицей квадрупольного момента $f_{\alpha\beta}$, или, что то же самое, бесследовой матрицей $g_{\alpha\beta}$ и, таким образом, является восьмимерным. Пространство параметра порядка как многообразие, согласно [12], будет фактор-пространством SO(3)/H, где SO(3) — группа трехмерных вращений, H — подгруппа поворотов, сохраняющих $g^0_{\alpha\beta} \equiv f^0_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, s^0_\gamma$: $c g^0 \tilde{c} = g^0$. Кроме тривиального тождественного преобразования, группа SO(3) имеет нетривиальную подгруппу — непрерывную группу двумерных вращений SO(2). Поэтому пространство параметра порядка может быть либо группой SO(3), либо сферой $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$. Первый случай отвечает двухосному квадрупольному магнетику, второй означает наличие некоторого выделенного направления и соответствует одноосному квадрупольному магнетику.

Рассмотрим вначале первый случай. Пусть функционал энергии имеет минимум в классе решений, принадлежащих SO(3). Тогда смещения точки минимума могут быть двух типов. Во-первых, это трехмерные смещения в касательном к исходной точке минимума пространстве. Поскольку эти смещения не уводят минимум со стационарной SO(3)-орбиты, соответствующие этим смещениям три ветви колебаний являются голдстоуновскими. Во-вторых, существуют пять видов смещений, уводящие минимум с SO(3)-орбиты, из которых в действительности, в силу существования двух кинематических связей, независимыми являются только три. Эти смещения соответствуют трем активационным ветвям. Таким образом, для двухосного квадрупольного магнетика с инвариантным относительно спиновых вращений функционалом энергии имеем три голдстоуновские и три активационные моды колебаний.

Рассмотрим теперь одноосный квадрупольный магнетик. В этом случае минимум энергии принадлежит стационарной S^2-орбите. Здесь имеются два вида смещений в касательном к стационарной орбите пространстве, что соответствует двум голдстоуновским ветвям колебаний. Кроме того, имеются шесть смещений в трансверсальном к стационарной орбите пространстве, которые уводят минимум с S^2-орбиты и из которых только четыре являются независимыми, что соответствует четырем активационным модам. Таким образом, для одноосного квадрупольного магнетика существуют две голдстоуновские и четыре активационные ветви колебаний.

Отметим, что симметрийный анализ, аналогичный приведенному, уже применялся для описания и классификации собственных мод в B-фазе ^{3}He [13] и в нематических жидких кристаллах [14]. В частности, в [13], основываясь на теории представлений группы SO(3), было дано объяснение трехкратного расщепления «real squashing» моды ($J = 2_+$) в экспериментах по распространению нулевого звука в ^{3}He-B.

Автор благодарит С. В. Пелетминского и М. Ю. Ковалевского за плодотворные обсуждения.

1. Э. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
2. В. М. Локтев, В.С. Островский, *ФНТ* **20**, 983 (1994).
3. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
4. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovick, *Ann. Phys.* **125**, 67 (1980).
5. А. А. Исаев, М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **102**, 283 (1995); A. A. Isayev, M. Yu. Kovalevsky, and S. V. Peletminsky, *Preprint ICTP IC/94/329* (1994).
6. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Л. Шишкин, *УФЖ* **36**, 245 (1991).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
8. F. T. Hioe and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 838 (1981).
9. S. I. Orfanidis, *Phys. Lett.* **A75**, 304 (1980).
10. R. Sasaki and Th. N. Ruijgrok, *Physica* **A113**, 388 (1982).
11. А. А. Исаев, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **102**, 470 (1995).
12. M. I. Monastyrsky, *Topology of Gauge Fields and Condensed Media*, Plenum Press, London (1992).
13. V. L. Golo and J. B. Ketterson, *Phys. Rev.* **B45**, 2516 (1992).
14. В. Л. Голо, Е. И. Кац, *ЖЭТФ* **103**, 857 (1993).

Hamiltonian formalism in the theory of quadruple magnet

A. A. Isayev

The Poisson brackets for the dynamic variables of the quadruple magnet — the density of the spin and the matrix of the quadruple moment, — have been found. The basic point for consideration is the derivation of the kinematic part of the Lagrange function. Equations of motion have been obtained and the number of the Goldstone and activation modes has been determined for the energy functional invariant with respect to space rotations.