

# Динамика вихревых петель после реконнекции в сверхтекучем гелии при различных температурах

В.А. Андриященко, Л.П. Кондаурова

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия*

*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия  
E-mail: louis@ngs.ru*

Статья поступила в редакцию 7 мая 2018 г., опубликована онлайн 28 августа 2018 г.

Работа посвящена численному моделированию динамики вихревых петель в сверхтекучем гелии после их реконнекции при различных температурах. Моделирование проведено в рамках метода вихревой нити с использованием полного уравнения Био–Савара. Установлено, что динамика вихревых петель существенно зависит от начального расположения петель и температуры, что выражается в количестве и размере образованных петель, амплитуде и характере затухания волн Кельвина, а также скорости движения образованных петель и их отдельных элементов. Зависимость расстояния между ближайшими элементами образованной вихревой петли от времени описывается степенным законом с показателем степени  $1/2$ , как и до момента реконнекции.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, вихревые нити, реконнекция, волны Кельвина.

## 1. Введение

Реконнекции являются очень важными событиями в турбулентности. Они существенно изменяют поле скорости и топологию вихревой структуры, играя важную роль в энергетическом каскаде и способствуя мелкомасштабному перемешиванию, тем самым усиливая диффузию и т.д. Долгое время они являются предметом исследования в различных системах, например, в плазме [1], в классической [2] и сверхтекучей жидкостях [3].

В своей новаторской работе по применению квантовой механики для изучения свойств сверхтекучего гелия Feynman [4] впервые поднял вопрос о возможности пере замыкания вихревых квантованных нитей. Schwarz [5,6] осознал необходимость их при расчете квантовой турбулентности. Несколько лет спустя Корлик и Levine [7] провели первое численное моделирование реконнекций квантовых вихрей путем решения уравнения Гросса–Питаевского и подтвердили гипотезу Feynman и Schwarz. De Waele и Aarts [8], используя модель вихревой нити Schwarz [5,6], численно исследовали динамику вихревых нитей до момента реконнекции при нулевой температуре. Их расчеты показали, что, когда вихри подходят друг к другу, они образуют пирамидальную структуру, а зависимость минимального расстояния между точками вих-

ревых петель от времени не зависит от начальных условий и имеет универсальный вид:

$$\delta(t) = \sqrt{\kappa / 2\pi}(t_* - t), \quad (1)$$

где  $\kappa = h/m_{\text{He}}$  — квант циркуляции,  $h$  — постоянная Планка,  $m_{\text{He}}$  — масса атома гелия,  $t_*$  — время пере замыкания (временной промежуток от начального момента моделирования до момента пере замыкания). В данной работе не исследовалась дальнейшая динамика вихревых петель после реконнекции.

Впервые экспериментально реконнекции в He II наблюдали Paoletti и др. [9]. Эксперименты были проведены в диапазоне температур от 1,7 К до 2,05 К. Экспериментальные данные (как до реконнекции, так и после) при всех температурах описываются следующей зависимостью:

$$\delta(t) = A\sqrt{\kappa |t_* - t|} (1 - c |t_* - t|), \quad (2)$$

где  $A \approx 1,25$  и  $c \approx 0,5 \text{ c}^{-1}$ . Однако среднее квадратичное отклонение экспериментальных данных достаточно велико по сравнению с их средним значением, чтобы давать окончательное заключение о характере определяемой зависимости.

Заметим, в отличие от реконнекции в классических жидкостях [2], где показатели степени в уравнении

типа (1) до и после реконнекции отличаются друг от друга, в сверхтекучем гелии они одинаковы.

Универсальность корневого закона для реконнекций была поставлена под сомнение Tebbs и др. [10]. Путем численного решения уравнения Гросса–Питаевского они получили пирамидальную форму вихревых линий, наблюдаемую в [8] для начальных конфигураций, используемых этими авторами, но не получили такие формы для других конфигураций. Они также подтвердили корневой закон, но полученные ими данные лучше описываются уравнением (2) с различными значениями коэффициентов. Динамика вихревых линий после пере замыкания не изучалась.

Kursa и др. [11] провели численное моделирование реконнекций квантовых вихревых петель, решая уравнения Гросса–Питаевского и Био–Савара. Авторы показали, что одна реконнекция двух почти антипараллельных вихрей может привести к созданию каскада вихревых колец при условии, что угол между плоскостями, в которых расположены вихри, достаточно мал.

Zuccher и др. [12] исследовали пере замыкания вихревых нитей в квантовых жидкостях путем выполнения прямого численного моделирования, используя модели Гросса–Питаевского и Био–Савара при нулевой температуре. В первом случае до и после реконнекции была изучена динамика вихрей при различных углах  $\beta$  между плоскостями, в которых изначально они были расположены. Полученные результаты до и после пере замыкания описываются уравнением

$$\delta(t) = A |t_* - t|^\alpha. \quad (3)$$

В среднем до реконнекции  $\alpha^- \approx 0,39$  и  $A^- \approx 1,39$ , после реконнекции  $\alpha^+ \approx 0,68$  и  $A^+ \approx 1,54$  (здесь и далее верхний индекс «минус» означает «до», а «плюс» — «после» осуществления реконнекции). При значении угла  $\beta = \pi$ :  $\alpha^- \approx 0,3$  и  $A^- \approx 1,36$ ;  $\alpha^+ \approx 0,66$  и  $A^+ \approx 1,88$ . При значении  $\beta = \pi/2$ :  $\alpha^- \approx 0,36$  и  $A^- \approx 1,41$ ,  $\alpha^+ \approx 0,67$  и  $A^+ \approx 1,01$ . Обратим внимание, что показатели степени до и после реконнекции отличаются друг от друга, как и в классических жидкостях [2]. Также в этой работе было показано, что в момент реконнекции появляются малые кольца, как и в [11], и волны Кельвина.

Во втором случае (Био–Савара) проведены расчеты только для значений углов  $\beta = \pi$  и  $\beta = \pi/2$ . Корневая зависимость  $\delta(t)$  сохранялась, однако после реконнекции вихревых нитей полученные результаты описывались следующей зависимостью:

$$\delta(t) = \sqrt{k\pi |t_* - t|}, \quad (4)$$

т.е. расхождение ближайших точек петель происходит с большей скоростью, чем их сближение до реконнекции.

В работе Hanninen [13] исследования динамики вихревых колец проведены методом вихревой линии для различных температур. Полученные результаты до и после момента реконнекции описываются уравнением (3) с  $\alpha = 1/2$  и  $A^- = \sqrt{k/16}$ ,  $A^+ = \sqrt{8k}$ . Заметим, что коэффициенты несколько отличаются от полученных в [12] (см. уравнение (4)).

В работах [14–16] численные исследования проведены путем интегрирования трехмерного уравнения Гросса–Питаевского.

Allen и др. [14] вне зависимости от температуры получили расчетные значения для  $\delta$ , которые описываются уравнением (3):  $\alpha^- = 0,41 \pm 0,02$ ,  $\alpha^+ = 0,66 \pm 0,02$  и  $A^\mp = k$ . То есть, как и в работе [12], наблюдаются различные показатели степени до и после пере замыкания вихревых линий.

Rogai и др. [15] для начального значения угла  $\beta = \pi$  между плоскостями, в которых расположены вихревые кольца, получили, что минимальное расстояние между вихревыми линиями  $\delta^\mp \sim |t_* - t|^{1/2}$ , для  $\beta = \pi/2$ :  $\delta^- \sim |t_* - t|^{1/3}$ ,  $\delta^+ \sim |t_* - t|^{2/3}$ .

В работе Vilhois и Proment [16] вне зависимости от начальной конфигураций  $\delta^\mp \sim |t_* - t|^{1/2}$ , значения же  $A^\mp$  зависят от начальной конфигурации.

Настоящая работа — продолжение работы [17], а именно проведение исследования динамики вихрей после момента их пере замыкания. В [17] проведено численное моделирование динамики вихревых нитей до реконнекции при использовании уравнения Био–Савара при различных значениях температуры.

## 2. Математическая модель

Моделирование динамики квантованных вихрей проводилось методом вихревой нити. Суть метода заключается в том, что незначительное изменение диаметра ядер квантованных вихрей игнорируется, т.е. задается конкретная структура ядра вихря. При моделировании вихревая нить аппроксимируется набором прямых вихревых отрезков  $\Delta\xi$ , размеры которых много меньше межвихревого расстояния. Согласно данному методу, скорость точки вихревой нити при отсутствии нормальной компоненты определяется скоростью жидкости как целое и скоростью, индуцированной всеми вихрями, которая находится из уравнения Био–Савара:

$$\mathbf{V}_B = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3},$$

где  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}_1$  — координаты точек на вихревой нити, интегрирование ведется по всей конфигурации вихревых нитей. Координатная система и параметризация вихревых нитей схематично представлена на рис. 1. В отсутствие движения нормальной и сверхтекучей компонент гелия, но при учете взаимодействия вихрей с нормаль-

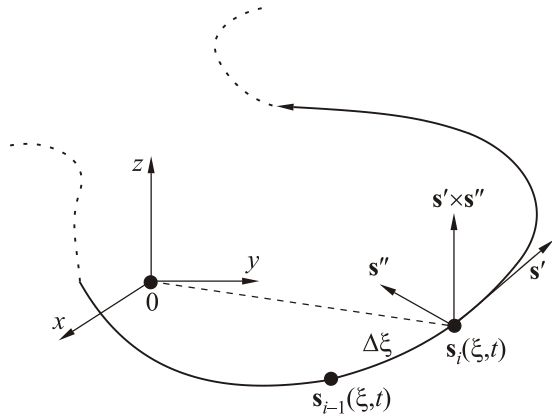


Рис. 1. Координатная система. Вихревая нить задана в естественной параметризации с натуральным параметром  $\xi$ .

ной компонентой гелия, уравнение движения вихревой точки имеет вид

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B - \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B + \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B],$$

где  $\alpha, \alpha'$  — зависящие от температуры коэффициенты трения,  $\mathbf{s}'$  — касательный вектор. При моделировании рассматривались случаи различных температур системы. Рассмотренные температуры и соответствующие коэффициенты трения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты трения, соответствующие рассмотренным температурам

$T, K$	0	1,3	1,6	1,9
$\alpha$	0	0,036	0,098	0,21
$\alpha'$	0	0,014	0,016	0,0009

В качестве начальной конфигурации системы выбирались два кольца одинакового диаметра, лежащие в плоскостях, расположенных под углами  $\beta$ , равными:  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$  и  $\pi/2$  относительно друг друга. Начальные радиусы вихревых колец  $R$  варьировались от  $10^{-7}$  м до  $10^{-5}$  м. Начальное расстояние между центрами вихревых колец изменялось от  $2,1 R$  до  $2,5 R$ . Для определения условия перезамыкания использовались три критерия: геометрический, энерго-геометрический и динамический (подробнее см. [3]). При пространственном шаге  $\Delta \xi = R/100$  все три критерия выполнялись при одном и том же минимальном расстоянии между петлями. С учетом этого далее был использован энерго-геометрический критерий как менее вычислительно затратный [3]. Результаты, касающиеся динамики вихревых петель до момента реконнекции при вышеперечисленных начальных условиях, приведены в работе [17]. В представляемой работе исследуется динамика вихревых петель после реконнекции, а в качестве начального состояния выбраны конфигурации петель непосредственно перед реконнекциями, полученные в указанной работе.

Для интегрирования уравнений движения по времени использована схема Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Более подробно некоторые детали использованной математической модели и особенности ее численной реализации описаны в работе [3].

### 3. Результаты расчетов

В качестве начальных конфигураций для моделирования динамики вихревых петель после реконнекции брались конфигурации вихревых петель непосредственно перед реконнекциями, полученные ранее в работе [17]. В каждом из рассмотренных случаев (различных температур и конфигураций) нелинейное взаимодействие вихревых петель между собой приводило к существенной деформации ближайших друг к другу участков двух вихревых петель. В частности, близлежащие участки вихрей образовывали пирамидальные структуры с углами при вершине, существенно зависящими от угла между начальными плоскостями петель и слабо зависящими от температуры (подробнее см. [17]). При реконнекции происходило пересечение элементов именно этих пирамидальных структур или непосредственно прилежащих к ним участков.

В результате реконнекции из двух вихревых петель образовывалась одна большая петля (рис. 2). Кроме того, при определенных начальных условиях создавалась одна или несколько дополнительных петель. Максимальное число петель формировалось при углах, близких к нулю и  $\pi/2$  (рис. 2(б)). Мелкие петли впоследствии быстро удалялись от места своего образования, при ненулевых температурах вследствие действия силы трения сжимались. При углах, близких к тридцати градусам, реконнекции исходных петель происходили в двух точках, в результате чего возникала одна дополнительная петля среднего размера (рис. 2(а)). Стоит отметить, что возникшие возмущения, распространяющиеся по вихревым петлям, не приводили к дополнительным реконнекциям и образованию новых петель.

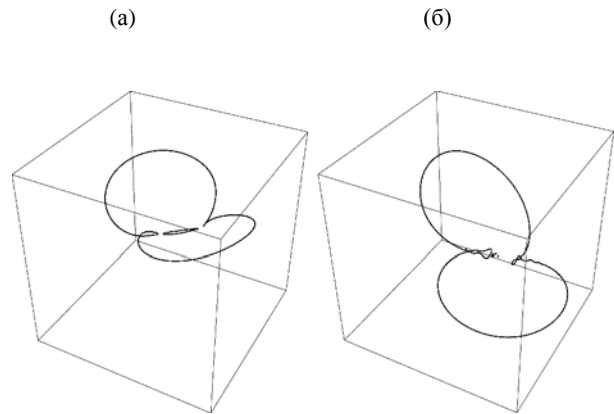


Рис. 2. Вихревые петли после реконнекции при  $T = 0$  К. Угол между начальными плоскостями петель равен  $\pi/6$  (а),  $\pi/2$  (б).

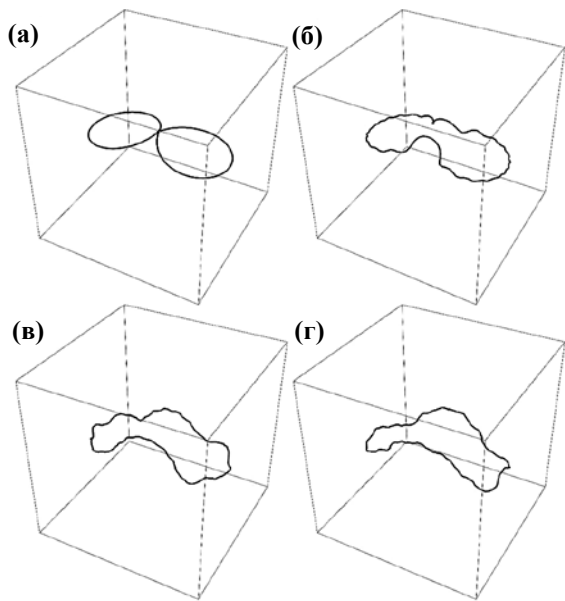


Рис. 3. Эволюция вихревой конфигурации после момента реконнекции при  $T = 0$  К. Угол между начальными плоскостями петель равен нулю. Времена после осуществления реконнекции:  $1,5 \cdot 10^{-7}$  с (а),  $1 \cdot 10^{-4}$  с (б),  $3 \cdot 10^{-4}$  с (в),  $5 \cdot 10^{-4}$  с (г).

Существенная деформация образованной петли приводила к тому, что ближайшие к точке реконнекции элементы петли начинали быстро удаляться друг от друга. Кроме того, возникали так называемые волны Кельвина, распространяющиеся по образованным петлям (рис. 3–6). Подобные возмущения наблюдались после реконнекции для всех рассмотренных начальных условий и температур. Амплитуда волн Кельвина не-

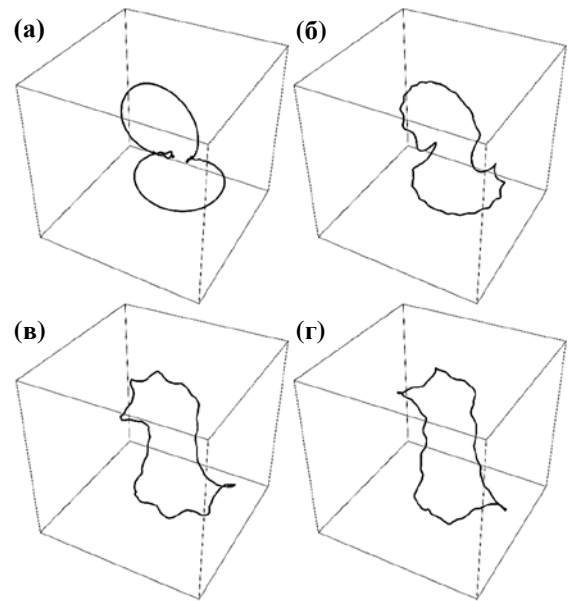


Рис. 5. Эволюция вихревой конфигурации после реконнекции при  $T = 0$  К. Угол между начальными плоскостями петель равен  $\pi/2$ . Времена после реконнекции:  $1,5 \cdot 10^{-7}$  с (а),  $1 \cdot 10^{-4}$  с (б),  $3 \cdot 10^{-4}$  с (в),  $5 \cdot 10^{-4}$  с (г).

посредственно связана с размерами и геометрией пирамидальных структур, возникших при приближении к точке реконнекции. После своего формирования волны распространяются таким образом, что два главных максимума находятся на максимальном удалении друг от друга (рис. 3–6). При дальнейшем распространении по вихревому кольцу волновые структуры образуют квазипериодическую структуру (рис. 3(г), 4(г), 5(г)), что свя-

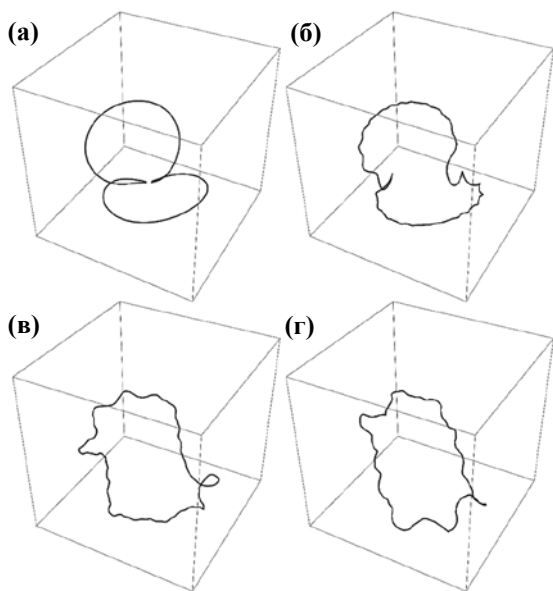


Рис. 4. Эволюция вихревой конфигурации после реконнекции при  $T = 0$  К. Угол между начальными плоскостями петель равен  $\pi/4$ . Времена после реконнекции:  $1,5 \cdot 10^{-7}$  с (а),  $1 \cdot 10^{-4}$  с (б),  $3 \cdot 10^{-4}$  с (в),  $5 \cdot 10^{-4}$  с (г).

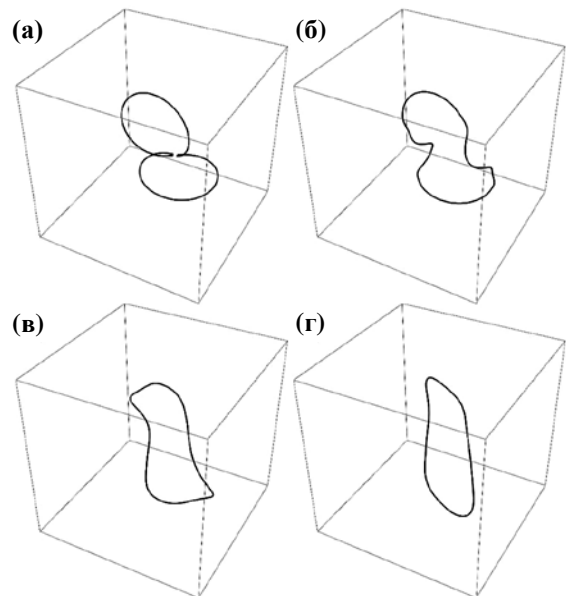


Рис. 6. Эволюция вихревой конфигурации после реконнекции при  $T = 1,9$  К. Угол между начальными плоскостями петель равен  $\pi/2$ . Времена после реконнекции:  $1,5 \cdot 10^{-7}$  с (а),  $1 \cdot 10^{-4}$  с (б),  $3 \cdot 10^{-4}$  с (в),  $5 \cdot 10^{-4}$  с (г).

зано как с вовлечением в дополнительное движение новых точек петли, так и общей ее деформацией. Полученные при моделировании результаты также свидетельствуют о явной тенденции к «уплощению» образованной вихревой структуры. При ненулевой температуре образовавшиеся возмущения быстро затухают, на рис. 6 представлена эволюция вихревой петли после реконнекции при температуре 1,9 К. К моменту времени  $t = 5 \cdot 10^{-4}$  с возмущения практически отсутствуют, а вихревая структура почти соответствует плоскому вихревому кольцу. Такая структура существенно отличается от полученной при идентичных начальных данных, но при нулевой температуре (рис. 5(г)), при которой подобное затухание не наблюдается. Увеличение температуры приводит к более быстрому затуханию возмущений. При этом вихревая нить становится более гладкой, а вихревая конфигурация более плоской, причем гладкость вихревой нити и уплощенность вихревой петли, очевидно, увеличиваются с увеличением температуры.

Перейдем к описанию динамики близлежащих элементов вихревой петли. До момента реконнекции близлежащие элементы вихревых петель приближались друг к другу согласно корневому закону  $\delta(t) \sim \sqrt{t_* - t}$ . Причем скорость сближения на больших расстояниях зависела от температуры и не зависела от нее при непосредственном сближении на расстояния порядка расстояний, фигурирующих в критерии реконнекции Schwarz [17]. В данной работе изучалась динамика ближайших точек, принадлежащих большой петле, после момента реконнекции. Полученные результаты представлены на рис. 7. Стоит отметить, что начальное расстояние между близлежащими элементами вихревой петли принималось равным нулю. Данная ситуация справедлива почти во всех случаях, кроме случаев с образованием дополнительных крупных петель (см., например, рис. 2(а)). В результате расчетов установлено, что в начальный момент времени близлежащие точки удалялись друг от друга, как и до реконнекции, согласно уравнению (2) с  $\alpha = 1/2$  и коэффициентом  $A$ ,

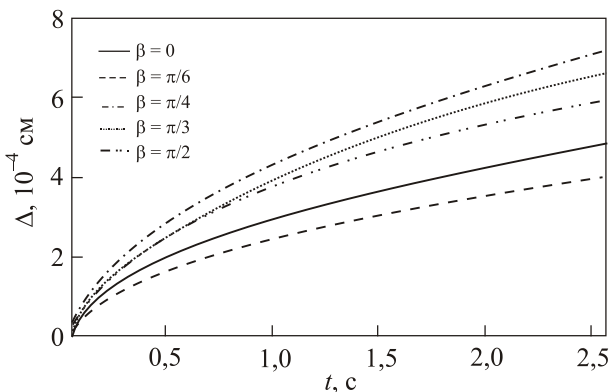


Рис. 7. Зависимости расстояния между ближайшими точками образованной вихревой петли от времени при  $T = 0$  К.

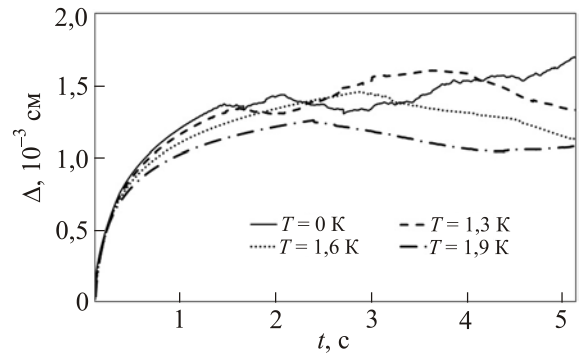


Рис. 8. Зависимости расстояния между ближайшими точками образованной вихревой петли от времени при угле между начальными плоскостями петель, равном  $\pi/4$ .

существенно зависящим от начальных условий, но не от температуры. Причем зависимость этого коэффициента от угла  $\beta$  между начальными плоскостями петель не носит регулярного характера, что, по-видимому, связано с одновременным влиянием как уплощения образованной петли, так и распространения волн Кельвина. Однако во всех рассмотренных случаях коэффициент  $A$  от 6 до нескольких десятков раз больше коэффициента, полученного непосредственно перед реконнекцией,  $A^- = \sqrt{k/2\pi}$ , что согласуется с результатами работ [12,13].

В ходе дальнейшего развития вихревой конфигурации во времени на масштабах порядка нескольких десятых от характерного радиуса образованной вихревой петли начинает проявляться зависимость от температуры (рис. 8). В дальнейшем расстояние между близлежащими точками вихревых петель периодически изменяется до затухания волн Кельвина (рис. 3–5).

#### 4. Заключение

Методом вихревой нити впервые проведено систематическое исследование динамики квантованных вихрей после реконнекции при различных температурах и начальных условиях моделирования. В результате определен характер эволюции образованных петель с течением времени. Установлено, что динамика петель определяется двумя основными факторами: начальными условиями и температурой. Начальные условия — относительное положение плоскостей петель и близлежащих элементов вихревых нитей непосредственно до момента реконнекции — определяют количество и размеры образованных петель, а также амплитуду возникающих волн Кельвина. В свою очередь, температура определяет скорость релаксации возникших возмущений — затухание волн Кельвина, уплощение вихревой конфигурации, скорость изменения размера петель. Когда размер петель становится порядка межатомного расстояния, вихревая энер-

гия переходит в тепловые возмущения. Таким образом, температура определяет также скорость диссипации энергии.

Основные результаты моделирования согласуются с данными, полученными другими группами исследователей. Так, например, изменение расстояния со временем между ближайшими точками образовавшейся петли описывается степенным законом с показателем степени  $1/2$ . Во всех рассмотренных случаях скорость сближения до реконнекции существенно меньше скорости расхождения после реконнекции (примерно от 6 до нескольких десятков раз), что согласуется с результатами расчетов [12,13] и эксперимента [9]. После момента реконнекции образуются волны Кельвина, которые также наблюдаются в расчете [12] и эксперименте [18]. Кроме того, при реконнекции наблюдалось появление дополнительных петель, как и в работе [11].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 14-29-00093.

1. E.R. Priest, in: *Proceedings of the VIIth International Conference on Plasma Astrophysics and Space Physics*, Lindau, May 4–8, 1998, J. Büchner, I. Axford, E. Marsch, and V. Vasyliūnas (eds.), Springer Netherlands, Dordrecht (1999), pp. 77–100.
2. F. Hussain and K. Duraisamy, *Phys. Fluids* **23**, 021701 (2011).
3. L. Kondaurova, V. L'vov, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **89**, 014502 (2014).
4. R.P. Feynman, *Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium*, in *Progress in Low Temperature Physics*, C.J. Gorter (ed.), North-Holland, Amsterdam (1955), Vol. 1.
5. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **31**, 5782 (1985).
6. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
7. J. Koplik and H. Levine, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1375 (1993).
8. A. De Waele and R. Aarts, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 482 (1994).
9. M.S. Paoletti, M.E. Fisher, and D.P. Lathrop, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **239**, 1367 (2010).
10. R. Tebbs, A.J. Youd, and C.F. Barenghi, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 314 (2011).
11. M. Kursa, K. Bajer, and T. Lipniacki, *Phys. Rev. B* **83**, 014515 (2011).
12. S. Zuccher, M. Caliari, A.W. Baggaley, and C.F. Barenghi, *Phys. Fluids* **24**, 125108 (2012).
13. R. Hanninen, *Phys. Rev. B* **88**, 054511 (2013).
14. A.J. Allen, S. Zuccher, M. Caliari, N.P. Proukakis, N.G. Parker, and C.F. Barenghi, *Phys. Rev. A* **90**, 013601 (2014).
15. C. Rorai, J. Skipper, R.M. Kerr, and K.R. Sreenivasan, *J. Fluid Mech.* **808**, 641 (2016).

16. A. Vilhois and D. Proment, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 044701 (2017).
17. V.A. Andryushchenko, L.P. Kondaurova, and S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 523 (2017).
18. E. Fonda, D.P. Meichle, N.T. Ouellette, S. Hormoz, and D.P. Lathrop, *PNAS* **111**, 4707 (2014).

## Динаміка вихрових петель після реконекції у надплинному гелії при різних температурах

В.А. Андрющенко, Л.П. Кондаурова

Роботу присвячено чисельному моделюванню динаміки вихрових петель в надплинному гелії після їх реконекції при різних температурах. Моделювання проведено в рамках методу вихрової нитки з використанням повного рівняння Біо–Савара. Встановлено, що динаміка вихрових петель істотно залежить від початкового розташування петель та температури, що виражається в кількості та розмірі утворених петель, амплітуді та характері загасання хвиль Кельвіна, а також швидкості руху утворених петель та їх окремих елементів. Залежність відстані між найближчими елементами утвореної вихрової петлі від часу описується степеневим законом з показником степені  $1/2$ , як і до моменту реконекції.

Ключові слова: надплинний гелій, вихрові нитки, реконекція, хвилі Кельвіна.

## Dynamics of vortex loops after reconnection in superfluid helium at different temperatures

V.A. Andryushchenko and L.P. Kondaurova

This paper is devoted to the numerical modeling of the dynamics of vortex loops in superfluid helium after their reconnection at different temperatures. The simulation was performed within the vortex filament method using the full Biot–Savart equation. It is established that the dynamics of the vortex loops essentially depend on the initial location of the loops and the temperature, which is expressed in the number and size of the formed loops, the amplitude and character of the attenuation of the Kelvin waves, as well as the speed of the loops and their individual elements. However, the dependence of the distance between the nearest elements formed by a vortex loop from time is described by a power law with exponent equal to  $1/2$ , as before the moment of reconnection.

Keywords: superfluid helium, vortex filaments, reconnection, Kelvin waves.