

О баллистическом транспорте в каналах с отрицательным преломлением частиц

Л.А. Пастур, В.В. Славин, А.В. Яновский

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: slavin@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 28 февраля 2018 г., опубликована онлайн 28 мая 2018 г.

Рассматривается баллистический транспорт в канале, состоящем из двух слоев, в предположении, что на их границе осуществляется отрицательное преломление движущихся по каналу частиц, аналогичное известному в оптике эффекту Веселаго. К такой постановке может приводить электронный транспорт в графене и вейлевских металлах, где отрицательное преломление обусловлено эффектом Клейна на p - n -переходе, а также спиновый, например фотонный, транспорт в метаматериалах. Показано, что в квазиклассическом приближении граница с отрицательным преломлением обладает свойством, аналогичным рассеянию назад, и поэтому может существенно влиять на транспорт через длинные и узкие каналы даже в случае совершенной границы. Если же граница не является совершенной (шероховатости, адсорбированные примеси и т.п.), и процессы преломления (туннелирования) и отражения происходят случайно, то набор интересных свойств канала существенно расширяется и открывает возможности эффективного управления прохождением частиц через такие каналы, включая как режим плавного управления, так и режим жесткой отсечки.

Розглянуто балістичний транспорт в каналі, що складається з двох шарів, припускаючи, що на їх границі здійснюється відмінне заломлення частинок, що рухаються по каналу, аналогічне відомому в оптиці ефекту Веселаго. До такої постановки може призводити електронний транспорт в графені та вейлевських металах, де відмінне заломлення обумовлено ефектом Клейна на p - n -переході, а також спиновий, наприклад фотонний, транспорт в метаматеріалах. Показано, що в квазікласичному наближенні границя з відмінним заломленням має властивість, аналогічну розсіюванню назад і тому може істотно впливати на транспорт через довгі і вузькі канали навіть у випадку досконалої границі. Якщо ж границя не є досконалою (шорсткості, адсорбовані домішки і т.п.), і процеси заломлення (тунелювання) і відображення відбуваються випадково, то набір цікавих властивостей каналу істотно розширюється та відкриває можливості ефективного управління проходженням частинок через такі канали, включаючи як режим плавного управління, так і режим жорсткого відсічення.

PACS: 72.80.Vr Электронный транспорт в графене;
78.67.Pt Многослойники, сверхрешетки, фотонные структуры, метаматериалы;
42.25.Gy Краевые и граничные эффекты; отражение и преломление.

Ключевые слова: отрицательное преломление, транспорт, проводимость, туннелирование Клейна, графен.

1. Введение

В твердотельных микроскопических проводящих системах электронный транспорт может воспроизводить эффекты, обычные в фотонной оптике, такие, как фокусировка [2], волноводные эффекты [1–4], дифракция [6] и т.п. [7,8]. Очевидно, что возможность столь точного управления носителями заряда и спина, аналогичная таковой в оптических устройствах, может иметь серьез-

ный потенциал в полупроводниковой электронике в связи с неизбежной миниатюризацией электронных устройств. Недавно стало ясно, что электроны проводимости могут демонстрировать экзотические эффекты отрицательного преломления. Например, p - n -переход в графене может фокусировать носители заряда так же, как суперлинза Веселаго фокусирует фотоны [9,10]. В графене это явление связано с туннелированием Клейна [9–12], которое реализуется в нем благодаря особому

«дираковскому» спектру квазичастиц. Кроме графена, отрицательная рефракция носителей заряда была недавно предсказана в вейлевских металлах [11].

На рис. 1 показан пример отрицательного преломления. Как видно, при этом падающий и преломленный участки траектории лежат по одну сторону от нормали к преломляющей границе. В графене такая граница может быть создана с помощью заряженных электродов (см., например, [10]) в случае, когда кулоновское поле «выдавливает» электроны проводимости из-под электрода. Соответственно, вне электрода будет *n*-графен (электронная проводимость), а под электродом — *p*-графен (дырочная проводимость).

В данной работе мы покажем, что отрицательное преломление может чисто геометрически влиять на транспорт в длинных и узких каналах, в частности на сопротивление входа Шарвина–Ландауера [3,13–16]. Вначале мы опишем постановку задачи и рассмотрим идеализированный случай полной отрицательной рефракции, чтобы проиллюстрировать возможное сильное «рассеяние назад». Затем мы рассмотрим неидеальную границу, например *p*–*n*-границу в графене, которая может содержать примеси, шероховатости и т.п., так что процессы отрицательного преломления и зеркального отражения на границе происходят случайно. Мы покажем, что в этом случае геометрические и статистические особенности преломления и зеркального отражения на границе играют роль беспорядка, подобного случайным потенциалам [17], даже в квазиклассическом приближении. Мы покажем также, что здесь можно ожидать эффекты управления прохождением вплоть до полного его запирания и проанализируем такой транспорт с помощью аналитических и численных методов. Как будет видно, аппарат, который мы используем для анализа задачи о прохождении таких составных кана-

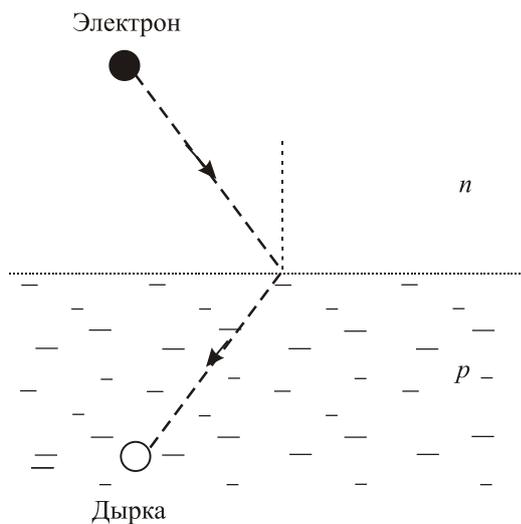


Рис. 1. Отрицательное преломление на примере *p*–*n*-графена. Стрелки указывают направление групповой скорости.

лов, является обобщением такого, используемого в известной задаче о разорении игрока, см., например, [18,19]. Отметим, что туннелирование Клейна считается помехой в создании полевых транзисторов на основе графена, поскольку не дает возможности подавить транспорт кулоновским полем затвора [20]. Однако, как будет видно, рассмотренный нами эффект позволяет влиять на транспорт изменением положения границы и плотностью носителей, а значит, может иметь отношение к созданию полевых транзисторов на основе графена. Отметим также, что, хотя ниже мы прежде всего имеем в виду носители заряда в графене, те же соображения могут быть применены к другим носителям (например, носителям спина). Соответственно, рассмотренный эффект может быть использован в фотонике, спинтронике и в других областях, где может наблюдаться отрицательное преломление.

2. Отрицательное преломление, рассеяние назад

Для определенности рассмотрим двумерный канал, связывающий два равновесных резервуара с разностью потенциалов V . Предположим, что канал состоит из двух слоев, разделенных границей с отрицательным преломлением (см. рис. 2), и обозначим ширины полос с электронной и дырочной проводимостью через w_n и w_p . Подобные каналы могут быть созданы с помощью кулоновских затворов (см., например, рис. 1 из [9]). Внешние границы канала будем считать зеркально отражающими и сам канал полностью идеальным. Координата x считывается вдоль оси канала, причем $x = 0$ соответствует входу в канал, а $x = L$ — выходу. Примем, что канал является узким, $L \gg w_{p,n}$. Покажем, что если граница между слоями является отрицательно преломляющей, то ее положение (разность между w_n и w_p) заметно влияет на кондактанс входа Шарвина–Ландауера [13–16].

Как видно на рис. 3, граница с отрицательным преломлением является источником сильного рассеяния назад, поскольку изображенные траектории выбрасываются из канала назад. Чтобы лучше увидеть влияние

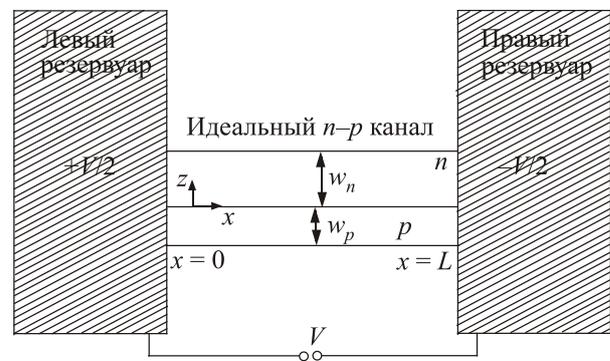


Рис. 2. Канал, состоящий из двух слоев с отрицательным преломлением на границе между полосами.

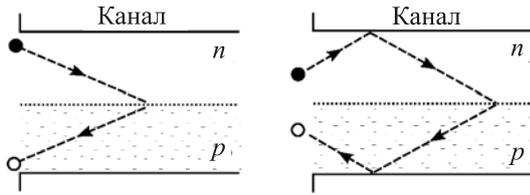


Рис. 3. Рассеивание назад на границе с отрицательным преломлением.

отрицательного преломления (туннелирования Клейна) на прохождение канала, сравним два предельных случая: (i) отсутствие отрицательного преломления на границе и (ii) полное отрицательное преломление на границе. Подчеркнем, что случай (ii) является идеализированной моделью для демонстрации роли отрицательной рефракции. Более реалистичная модель обсуждается в следующем разделе.

Случай (i). Здесь каналы являются независимыми*. Пусть закон дисперсии квазичастиц есть $\varepsilon(p) = v_F p$, чтобы было удобнее сравнивать с графеном. Зависимость кондактанса входа от w_n и w_p в отсутствие примесей и других известных источников рассеяния назад есть [3]:

$$G = \frac{e^2}{2\pi} (\Pi_n w_n \langle |v_x| \rangle_n + \Pi_p w_p \langle |v_x| \rangle_p), \quad (1)$$

где e — заряд электрона, v_x — x -компонента групповой скорости, угловые скобки обозначают усреднение по направлению на поверхности Ферми, $\Pi_{n,p}$ — плотности состояний носителей на уровне Ферми. В приближении упомянутой выше линейной дисперсии $\Pi_{n,p} = g_{s,v} | \varepsilon_F | / 2\pi \hbar^2 v_F^2$, где \hbar — постоянная Планка, $g_{s,v}$ — спиновое и долинное вырождение. Если случай полностью симметричный, т.е. плотности состояний в электронной и дырочной частях канала одинаковы $\Pi_n = \Pi_p = \Pi$, то кондактанс просто пропорционален общей ширине канала $W = w_n + w_p$, как если бы границы и не было:

$$G = \frac{e^2 \Pi v_F W}{\pi}. \quad (2)$$

Нетрудно увидеть, например, воспользовавшись формулами из [3], что при учете поперечного квантования $G = e^2 \pi^{-1} \Pi ([2w_n/\lambda_F] + [2w_p/\lambda_F])$, где λ_F — фермиевская волна де Бройля, а [...] скобки означают целую часть числа. То есть в среднем G не меняется, а периодические изменения не превышают квант кондактанса при любом смещении p - n -границы.

Рассмотрим теперь случай (ii) полного отрицательного преломления на границе и покажем, что в

этом случае кондактанс ведет себя совершенно иначе. Если $w_n = w_p$, то в приближении $w_{n,p} \ll L$ только частицы с $|v_y| = 0$ (или то же самое $|v_x| = v_F$) могут пройти через канал (см. рис. 3). Действительно, при $w_n = w_p$ часть траектории от входа в канал до границы переходит в свое «зеркальное отражение» относительно этой границы и в точности выходит назад. И это свойство имеют как траектории, имеющие только преломление на границе без рассеяния на внешних стенках канала, так и траектории с дополнительным рассеянием на зеркальных внешних стенках канала. Если же $w_n \neq w_p$, то появляются «скачущие» траектории (см. рис. 4). Из простых геометрических соображений ясно, что такие траектории появляются только в большем из двух каналов (не теряя общности, примем далее, что $w_n > w_p$).

Пусть φ есть угол входа в канал. Тогда перемещение носителей вдоль канала представляет собой последовательность зависящих от φ «шагов» в положительном и отрицательном направлении оси x . Длины шагов в положительном и отрицательном направлениях есть соответственно $l_+ = 2w_n \cot |\varphi|$, $l_- = 2w_p \cot |\varphi|$, а скорость движения вдоль канала $v_x(\varphi) = (w_n - w_p) W^{-1} v_F \cos \varphi$. Каждой траектории, входящей в канал в точке $(0, y)$ под углом φ , мы можем сопоставить точку $(-X, 0)$ пересечения границы с продолжением траектории в обратном направлении, показанной на рис. 4. Как видно, критерий выхода траектории обратно из канала (сильного рассеяния назад за счет отрицательной рефракции) определяется неравенством $X < l_+ - l_- = 2(w_n - w_p) \cot |\varphi|$, т.е. траектория дает вклад в идеальный шарвиновский кондактанс, если

$$w_n < 2w_p, \quad \varphi \in (0, \pi/2) \text{ и } y \in (0, 2(w_n - w_p));$$

$$w_n > 2w_p, \quad \varphi \in (0, \pi/2) \text{ и } y \in (0, w_n), \text{ а также}$$

$$\varphi \in (-\pi/2, 0) \text{ и } y \in (2w_p, w_n).$$

Поэтому, если $\gamma(\varphi, y)$ есть индикаторная функция прохождения идеального канала, которая равна 1 в случае выполнения этих неравенств и 0 в противном случае, то в шарвиновском пределе (без учета квантования) получим

$$G = \frac{e^2 \Pi v_F}{\pi} \frac{w_n - w_p}{W} \int_0^{w_n} dy \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \gamma(\varphi, y) =$$

$$= e^2 \Pi v_F \frac{(w_n - w_p)^2}{W}, \quad (3)$$

с точностью до поправок по $w_{n,p}/L$. Таким образом, в идеальном случае полного туннелирования Клейна на

* Это может иметь место, например, при достаточно низких температурах и напряжениях таких, чтобы дырки и электроны двигались в своих зонах независимо, не преодолевая запирающий барьер Шоттки у p - n -границы.

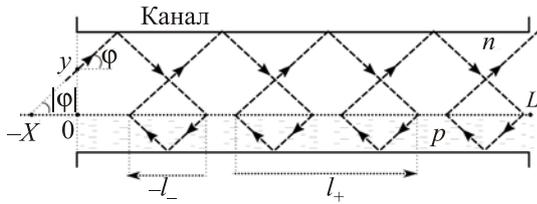


Рис. 4. Пример «скачущих» траекторий, порождаемых отрицательной рефракцией при $w_n \neq w_p$. φ — угол входа, $(0, y)$ — точка входа, $(-X, 0)$ — точка пересечения продолжения траектории от входа до пересечения с p - n -границей (для отрицательных углов входа — с «отражением» от боковых границ), l_{\pm} — смещения вдоль p - n -границы между двумя последовательными пересечениями этой границы.

границе слоев шарвиновский контактанс пропорционален квадрату разности ширины каналов. Отметим, что в силу симметрии формула применима и к случаю $w_p > w_n$. Кроме того, при учете поперечного квантования зависимость, безусловно, должна быть ступенчатой и не уменьшается до нуля с учетом конечного кванта контактанса.

3. Учет отражения от p - n -границы

В реальном графене имеется ненулевая вероятность отражения от p - n -границы, которая зависит от угла падения и формы барьера на p - n -границе. Угловая зависимость вероятности отражения изучалась в ряде работ, (см., например, работу [12] и приведенные в ней ссылки). Соответственно, прохождение канала есть вероятностный процесс и «скачущие» траектории существенно усложняются (рис. 5). Проекция траекторий на границу является случайным процессом, представляющим собой последовательность шагов длины l_+ вправо и длины $-l_-$ влево, осуществляемых с определенной вероятностью. Заметим, что поскольку фермиевские скорости электронов и дырок могут не совпадать, то углы падения со стороны n (сверху) и со стороны p (снизу) на p - n -границу могут отличаться. Соответственно, равнобедренные треугольники участков траекторий в n - и p -слоях, опирающихся на p - n -границу, могут иметь разные углы основания: φ — для n -слоя и $\arcsin(\sin \varphi v_F^p / v_F^n)$ — для p -слоя. Мы будем обозначать соответствующие вероятности отражения P_{\pm} . Как видно на рис. 5, где \pm обозначает шаг в положительном или отрицательном направлении (а значит, и сторону, с которой частица налетает на границу), со стороны n имеем шаг в «+» направлении, со стороны p имеем шаг в «-» направлении. При этом вероятность повторного шага определенного «сорта» равна P_{\pm} , а вероятность смены шага одного сорта на шаг другого сорта равна $Q_{\pm} = (1 - P_{\pm})$.

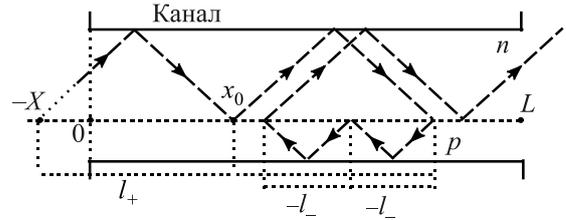


Рис. 5. Пример траектории в случае ненулевой вероятности туннелирования. Движение частицы по каналу описывается одномерным случайным процессом с шагами l_{\pm} .

Мы будем характеризовать прохождение канала вероятностью выхода указанного одномерного случайного процесса из канала при условии, что он стартует из фиксированной точки x внутри канала (точки первого после входа в канал пересечения траекторией границы между слоями). Удобно описывать этот процесс способом, похожим на тот, что применяется в так называемой задаче о разорении игрока (см., например, [18,19]). Обозначим через $u(x, \sigma)$ вероятности выхода частицы вправо из канала длины L , стартуя из точки x , находящейся сверху от границы ($\sigma = +$) или снизу от нее ($\sigma = -$).

Для простоты рассмотрим полностью соизмеримый случай для l_-, l_+, x и L так, что все значения координаты x , куда может попасть частица, образуют решетку с наименьшим шагом — для определенности пусть это будет l_- . Из точки x блуждающий носитель может уйти как вправо, в точку $x + l_+$, так и влево, в точку $x - l_-$. Вероятность выхода из точки x связана с вероятностями выхода из соседних положений $x + \sigma l_{\sigma}$, $\sigma = \pm$ системой двух уравнений, которую компактно можно записать в виде (см. Приложение)

$$u(x, \sigma) = P_{\sigma} u(x + \sigma l_{\sigma}, \sigma) + Q_{\sigma} u(x - \sigma l_{-\sigma}, -\sigma),$$

$$P_{\sigma} + Q_{\sigma} = 1, \quad \sigma = \pm. \quad (4)$$

Решение этой системы, отвечающей вероятности выхода, должно удовлетворять граничным условиям (см. [18,19] для аналогичных условий в задаче о разорении игрока)

$$u(x, +) = 1, \quad L - l_+ \leq x \leq L, \quad (5)$$

и

$$u(0, +) = 0, \quad (6)$$

поскольку мы интересуемся вероятностью $u(x, +)$ выхода частицы вправо при условии, что она вошла в канал через верхний слой (см. рис. 5).

В общем случае краевая задача, задаваемая (4)–(6), является весьма сложной. Тем не менее существует ряд весьма интересных частных случаев, когда аналитическое решение может быть найдено и проанализировано. Это, а также численное моделирование дают доста-

точно содержательную информацию о прохождении частиц через описанный канал.

Случай 1. $P_+ = P_- = 1/2$, $l_+ = l_- = 1$.

В этом простейшем случае правые части обоих уравнений системы (4) совпадают и мы получаем задачу с одним уравнением

$$u(x) = \frac{1}{2}u(x+1) + \frac{1}{2}u(x-1), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 1 \quad (7)$$

для $u(x) = u(x, +)$. Эта задача совпадает с хорошо известной задачей о выходе вправо частицы, совершающей симметричные случайные блуждания по одномерной цепочке длины L , игровая интерпретация которой и называется задачей о разорении игрока [18,19]. Полезно рассмотреть более общую задачу несимметричных случайных блужданий, описываемую следующей краевой задачей для конечно-разностного уравнения второго порядка:

$$u(x) = Pu(x+1) + Qu(x-1), \\ P + Q = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 1. \quad (8)$$

Частные решения этого уравнения ищем в виде

$$u(x) = t^x, \quad (9)$$

где t есть один из корней уравнения

$$Pt^2 - t + Q = 0. \quad (10)$$

Имеем

$$t_1 = 1, \quad t_2 = Q/P. \quad (11)$$

Заметим, что $t = 1$ всегда является корнем соответствующего дисперсионного уравнения. Это видно уже из того, что $u(x, +) = u(x, -) = \text{const}$ всегда есть решение (4).

Соответственно, решение задачи (8) ищем в виде

$$u(x) = A + Bt_2^x \quad (12)$$

и получаем (см. [18,19])

$$u(x) = \frac{1-t_2^x}{1-t_2^L}. \quad (13)$$

При $x \ll L$ (конечная стартовая точка, длинный канал) это решение либо экспоненциально быстро стремится к нулю ($t_2 = Q/P > 1$), либо к

$$u(x) = 1 - t_2^x = 1 - (Q/P)^x, \quad t_2 = Q/P < 1. \quad (14)$$

Мы пришли к естественному результату, согласно которому выход вправо из интервала $(0, L)$ для частицы с фиксированной стартовой точкой x невозможен, если вероятность ее скачка вправо строго меньше, чем вероятность скачка влево, и выход вправо имеет место при обратном неравенстве между этими вероятностями,

причем вероятность выхода тем больше, чем ближе стартовая точка к правому концу канала.

При $P = Q = 1/2$ имеем вырожденный случай (нулевого сноса) $u(x) = x/L$, и при $L \rightarrow \infty$ и фиксированном x выход вправо не возможен.

Заметим также, что система уравнений (4) сводится к модели (8) при $P_+ = Q_-$.

Случай 2. $P_+ \neq P_-$, $l_+ = l_- = 1$.

Система уравнений (4) и граничные условия (5), (6) в этом случае приобретают вид

$$u(x, \sigma) = P_\sigma u(x + \sigma, \sigma) + Q_\sigma u(x - \sigma, -\sigma), \\ P_\sigma + Q_\sigma = 1, \quad u(0, +) = 0, \quad u(L, +) = 1.$$

Частные решения системы ищем в виде (ср. (9))

$$u_\sigma t^x, \quad (15)$$

приводящем к системе двух линейных уравнений для амплитуд u_σ :

$$t(1 - P_+ t)u_+ - Q_+ u_- = 0, \\ -Q_+ t^2 u_+ + (t - P_+)u_- = 0. \quad (16)$$

Условие разрешимости этой системы дает дисперсионное уравнение (ср. (10))

$$P_+ t^2 - t(P_+ + P_-) + P_- = 0 \quad (17)$$

с корнями (ср. (11))

$$t_1 = 1, \quad t_2 = P_-/P_+, \quad (18)$$

которые получаются из корней (11) предыдущего случая заменой P на P_+ и Q на P_- . В результате получаем выражения для $u(x, +)$, совпадающее с правой частью формул (12) и (13), где теперь t_2 берется из (18).

Введем вероятность n прохождения частицы через систему как вероятность $u(x, +)$ при $1 \ll x \ll L$, т.е. как результат последовательных пределов: сначала $L \rightarrow \infty$, а затем $x \rightarrow \infty$:

$$n = \lim_{L \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty} u(x, +). \quad (19)$$

Тогда имеем, согласно (13),

$$n = \begin{cases} 1, & P_+ > P_-; \\ 0, & P_+ \leq P_-. \end{cases} \quad (20)$$

Мы получили, что в длинном канале выход вправо для частиц с фиксированной стартовой точкой невозможен ($n = 0$), если вероятность P_+ отражения сверху от графеновой пленки меньше, чем вероятность отражения снизу P_- . В противоположном случае $P_+ > P_-$ частицы проходят через канал ($n = 1$).

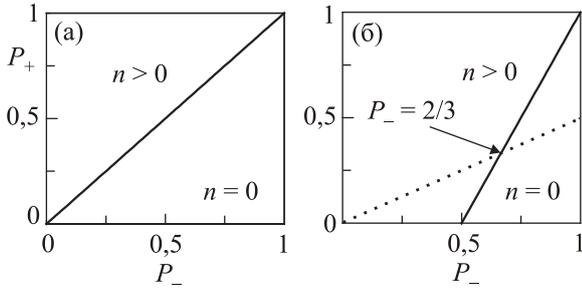


Рис. 6. Фазовые диаграммы для n в переменных (P_+, P_-) . $L = 10^5$. (а) Случай 2: $l_+ = l_-$; (б) Случай 4: $l_+ = 2l_-$.

Фазовая диаграмма для n в переменных (P_+, P_-) представлена на рис. 6(а).

Случай 3. $P_+ = P_- = P$, $l_+ = 2$, $l_- = 1$.

В этом случае частные решения опять имеют вид (15), а дисперсионное уравнение оказывается кубическим:

$$Pt^3 - t^2(2P - 1) - t + P = 0. \quad (21)$$

Но, учитывая, что $t_1 = 1$ является его корнем, это уравнение можно свести к квадратному уравнению

$$Pt^2 - (P - 1)t - P = 0, \quad (22)$$

так что в этом случае корни уравнения (21) таковы

$$t_1 = 1, t_{2,3} = \frac{(P - 1) \pm \sqrt{(P - 1)^2 + 4P^2}}{2P}. \quad (23)$$

Общее решение системы (4) в данном случае есть (ср. (12))

$$u(x, \sigma) = A + Bu_{\sigma,2}t_2^x + Cu_{\sigma,3}t_3^x, \quad (24)$$

где A , B и C определяются граничными условиями (6) и (5), причем второе имеет вид

$$u(L - 1, +) = 1, \quad u(L, +) = 1. \quad (25)$$

Получаемое выражение для $u(x, +)$ оказывается несколько громоздким. Но, учитывая неравенства $0 < t_2 < 1 < |t_3|$ для корней (23), нетрудно показать, что для длинных каналов с фиксированной стартовой точкой ($L \gg 1$) третье слагаемое экспоненциально мало, а первые два экспоненциально близки к правой части (14), где t_2 дается (23).

Этот факт и неравенства $0 < t_2 \leq 1$ означают, что в данном случае прохождение канала ($n = 1$) имеет место при всех значениях коэффициента зеркального отражения P . Естественно ожидать, что этот результат, полученный аналитически для $l_+ = 2l_-$, верен в общем случае $l_+ > l_-$. Действительно, согласно (П4), среднее значение шага частицы в этом случае есть $(1 - P)(l_+ - l_-) > 0$, а значит, случайное движение частицы через канал имеет средний снос вправо. Так что,

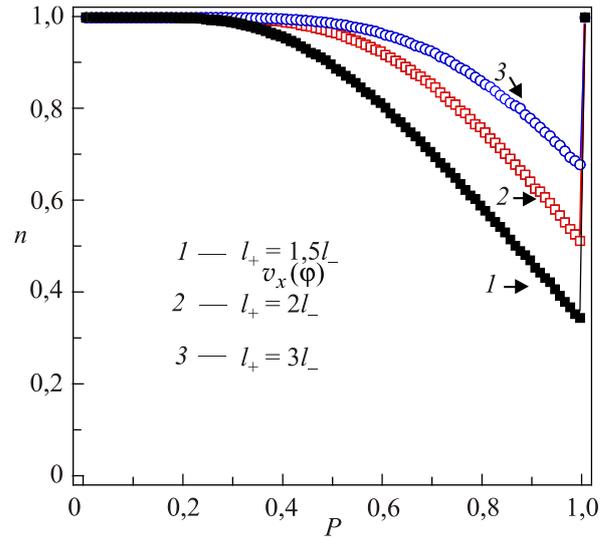


Рис. 7. Вероятность прохождения канала n (19) как функция коэффициента зеркального отражения P для случая, когда $P_- = P_+ = P$, $l_- = 1$ и для различных l_+ . $L = 10^5$.

по крайней мере в среднем, частица выходит из канала направо.

Проведенное нами численное моделирование подтверждает данный результат. На рис. 7 представлены зависимости вероятности прохождения n (19) как функции P при различных значениях l_+ и l_- . Как видно, для всех кривых $n > 0$. Тот факт, что $n < 1$, есть следствие конечности размеров системы.

Таким образом, если вероятности зеркального отражения сверху и снизу графеновой пленки совпадают, то частицы всегда проходят через такую систему, если $l_+ > l_-$.

Случай 4. $P_+ \neq P_-$, $l_+ = 2$, $l_- = 1$.

Этот случай с технической точки зрения есть обобщение предыдущего, где предполагалось, что $P_+ = P_-$. Однако получаемые здесь результаты оказываются существенно иными.

С учетом того, что $t_1 = 1$, кубическое дисперсионное уравнение опять сводится к квадратному $P_+t^2 + (1 - P_-)t - P_- = 0$ (ср. (22)), так что корни дисперсионного уравнения есть (ср. (23))

$$t_1 = 1, t_{2,3} = \frac{(P_- - 1) \pm \sqrt{(P_- - 1)^2 + 4P_+P_-}}{2P_+}. \quad (26)$$

Далее, неравенство $t_2 < |t_3|$ позволяет, как и в предыдущем случае, пренебречь вкладом в $u(x, +)$ от отрицательного корня t_3 при $L \gg 1$ и получить опять аналог формулы (14), в которой t_2 берется из (26).

Используя это выражение для $u(x, +)$, получаем из условия $t_2 = 1$, что линия

$$P_+ = 2P_- - 1 \quad (27)$$

разделяет решения, соответствующие прохождению через канал ($P_+ > 2P_- - 1$) и запираанию канала ($P_+ \leq 2P_- - 1$).

Графики $u(x, +)$ для этих двух решений представлены на рис. 8. Оба графика получены при $P_- = 0,6$. В первом случае $P_+ = (2P_- - 1) + 0,01$, а во втором $P_+ = (2P_- - 1) - 0,01$. Как видно, в обоих случаях $u(x, +)$ удовлетворяет граничным условиям (6) и (25), но ведет себя совершенно по-разному внутри канала. Очевидно, что точка перехода (27) между режимами пропускания и запираания совпадает с условием для нулевого среднего смещения (П6):

$$(1 - P_+) / (1 - P_-) = l_+ / l_- = 2. \quad (28)$$

Фазовая диаграмма для n в переменных (P_+, P_-) для этого случая представлена на рис. 6(б). Сплошная линия соответствует зависимости (27). Численное моделирование полностью согласуется с данным результатом. Моделирование проводилось при фиксированном отношении $P_+ / P_- = 1/2$ (пунктирная линия на рис. 6(б)). Результаты моделирования представлены на рис. 9, кривая 2. Как видно, при $P_- = 2/3$ происходит переход от режима пропускания к запираанию канала. На этом же рисунке для сравнения представлены результаты моделирования при $l_+ = 1,5$ (кривая 1) и $l_+ = 2,5$ (кривая 3). Из (П6) следует, что переход для $l_+ = 1,5$ происходит при $P_- = 0,5$, а для $l_+ = 2,5$ при $P_- = 0,75$. Как видно на рис. 9, это полностью согласуется с результатами численного моделирования.

Случай 5. $P_+ \neq P_-$, $l_+ = 1$, $l_- = 2$.

Этот случай сводится к предыдущему заменой $P_+ \leftrightarrow P_-$.

Отметим, что при расчете кондактанса канала с учетом вероятностей прохождения необходимо использовать реальные угловые зависимости $P_{\pm} = P_{\pm}(\varphi)$. К идеализированным модельным случаям (i) и (ii) раздела 2 задача сводится лишь тогда, когда для любых на-

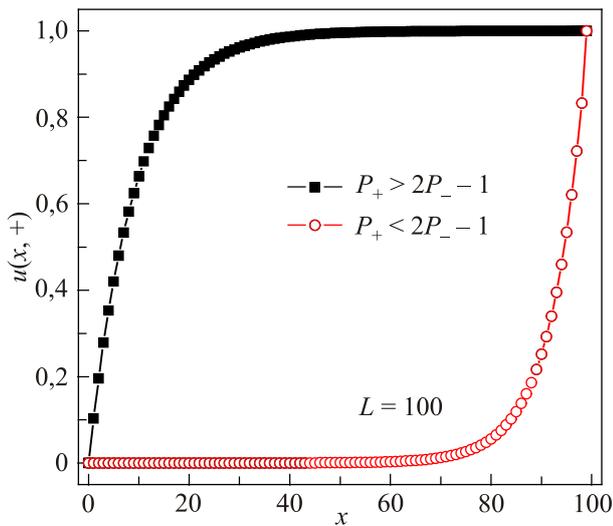


Рис. 8. Зависимость $u(x, +)$ от x для случая, когда $P_+ \neq P_-$, $l_+ = 2$, $l_- = 1$, $L = 100$.

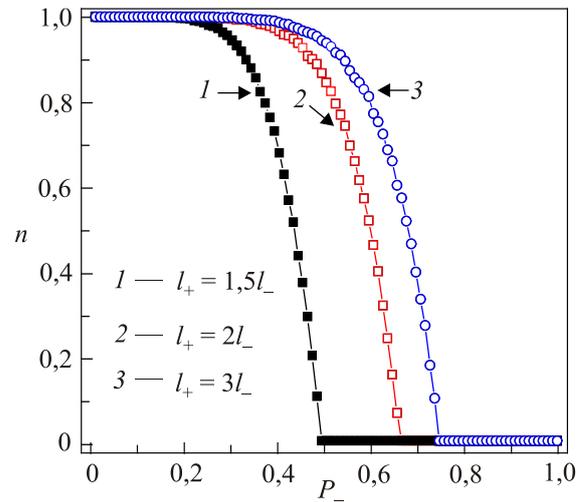


Рис. 9. Зависимость вероятности прохождения канала n от вероятности зеркального отражения P_- для случая, когда $P_+ = P_-/2$, $L = 10^5$.

правлений $P_{\pm} = 1$ и $P_{\pm} = 0$ соответственно. В реальной экспериментальной постановке это очевидно не так, и задача усложняется, становясь существенно зависящей от способов создания барьера, а также способов подключения и измерения токов и напряжений.

4. Численное моделирование

Как указывалось выше, при произвольных значениях длин шагов l_- и l_+ система уравнений (4) оказывается весьма сложной. В этом случае эффективным инструментом изучения транспортных свойств является метод прямого численного моделирования (см. (П1)). Для реализации этого метода генерировалась последовательность псевдослучайных статистически независимых чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, равномерно распределенных в интервале $(0, 1]$. Предполагалось, что на нулевом шаге моделирования частица имеет координату x_0 (см. рис. 5). Как показали наши численные эксперименты, при достаточно больших размерах изучаемой системы ($L = 10^5$) полученные результаты слабо зависят от выбора x_0 . Кроме того, предполагалось, что частица входит в верхний слой канала, т.е. $\sigma = +$. Если выполняется условие $\xi_1 < P_+$, то частица зеркально отражается от межслойной границы и, следовательно, смещается вправо на величину l_+ (т.е. $x_1 = x_0 + l_+$). В противном случае происходит туннелирование частицы, ее координата уменьшается на l_- (т.е. $x_1 = x_0 - l_-$) и σ меняет знак ($\sigma = -$).

На k -м шаге моделирования, если частица находится сверху от поверхности графеновой пленки ($\sigma = +$), то при выполнении условия $\xi_k < P_+$ ее координата увеличивается на l_+ : $x_k = x_{k-1} + l_+$. В противном случае $x_k = x_{k-1} - l_-$ и σ меняет знак ($\sigma = -$).

Если же частица находится снизу от границы ($\sigma = -$), то при выполнении условия $\xi_k < P_-$ ее коор-

дина та уменьшается на l_- : $x_k = x_{k-1} - l_-$. В противном случае $x_k = x_{k-1} + l_+$ и σ меняет знак ($\sigma = +$).

Моделирование прерывается, если оказывается выполненным одно из условий:

1. $x_k > L$ и $\sigma = +$, т.е. частица прошла весь канал (вышла направо);
2. $x_k < 0$. т.е. частица отразилась от канала (вышла налево). После этого моделирование повторялось.

Вероятность прохождения частицы через систему вычислялась как $n = n_+ / n_{\text{tot}}$, где n_+ есть число частиц, прошедших через канал (т.е. число циклов моделирования, при которых выполнялось условие 1), а n_{tot} — полное число циклов моделирования, которое у нас было равно $n_{\text{tot}} = 10^5$.

В целом, как аналитические результаты, так и численное моделирование подтверждают возможность управления проводимостью канала. Причем, в зависимости от параметров системы, это управление может быть как плавным (режим «аналогового усилителя»), так и более резким (режим «транзисторного ключа»).

5. Выводы

Мы рассмотрели длинный и узкий канал, составленный из двух слоев, граница между которыми имеет отрицательный коэффициент преломления. Примером такой границы может служить p - n -переход в графене, где отрицательное преломление осуществляется через туннелирование Клейна. Используя квазиклассическое приближение, мы показали, прежде всего, что даже в случае идеальной границы с полным отрицательным преломлением имеет место аналог сильного «рассеяния назад», которое может существенно изменять баллистический транспорт через такой канал. Затем показано, что комбинация отрицательного преломления (туннелирования), и отражения, происходящих с определенной вероятностью (неидеальная граница) может служить чисто геометрическим механизмом стохастизации квазиклассических траекторий в баллистических контактах. Как оказалось, в таких условиях баллистический транспорт через достаточно длинный и узкий канал существенно зависит от положения преломляющей границы и формы поверхности Ферми в слоях канала. В двумерных пленках на основе графена эти параметры можно изменять кулоновским потенциалом затвора над пленкой. Аналитические расчеты (на основе подхода, обобщающего тот, что используется в классической задаче о разорении игрока) и прямое численное моделирование наглядно демонстрируют возможности управления баллистическим прохождением. Были обнаружены области параметров с разнообразными режимами управления, включающими как плавное управление, так и режим жесткой отсечки. Эти свойства рассмотренных каналов могут быть полезны при построении транзисторов в графене, а также в других проводниках или полупроводниках, если в них

присутствует явление туннелирования Клейна через кулоновские барьеры.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта 4/16-М Национальной академии наук Украины.

Приложение

Как уже отмечалось в разд. 3, процесс прохождения частицы через двухслойный канал со случайными отражениями от границы раздела и прохождением через нее с отрицательным преломлением может быть описан следующей вероятностной моделью. Рассмотрим две последовательности $\{\lambda_j^{(\sigma)}\}_{j=1}^{\infty}$, $\sigma = \pm$, независимых и одинаково распределенных при каждом $\sigma = \pm$ случайных величин. Кроме того, зададим $x_0 \geq 0$ и $\sigma_0 = \pm$. Тогда проекция траектории из k шагов на ось абсцисс (границу раздела) будет равна

$$S_k^{\sigma_0}(x_0) = x_0 + \lambda_1^{(\sigma_0)} + \lambda_2^{(\sigma_1)} + \dots + \lambda_k^{(\sigma_{k-1})}, \quad (\text{П1})$$

где σ_j , $j = 1, \dots, k$ — знак реализации случайной величины $\lambda_j^{(\sigma_{j-1})}$.

Такая задача есть обобщение известной задачи о первом выходе случайного блуждания (дискретного или непрерывного) из заданного интервала, известная также как задача о разорении игрока [18,19]. В этой задаче каждый последующий шаг не зависит от предыдущего, так что, скажем, в дискретном случае достаточно рассматривать лишь одну последовательность $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностями P и $1-P$ соответственно. Решение задачи дается соотношениями (8).

Рассуждая как в этой задаче, мы найдем, что вероятность $u(x_0, \sigma_0)$ выйти из канала, стартуя из точки $x_0 > 0$, равна вероятности того, что частица выйдет из точки $x_0 + \sigma_0 l_{\sigma_0}$, помноженной на вероятность P_{σ_0} этого события плюс вероятность того что частица выйдет из точки $x_0 - \sigma_0 l_{-\sigma_0}$ помноженной на вероятность Q_{σ_0} этого события. Это рассуждение является общим и называется формулой полной вероятности [19]. В нашем случае оно дает систему уравнений (4).

Нам понадобится среднее значение длины траектории (П1), для чего достаточно найти среднее значение слагаемых $\mu_j = \lambda_j^{(\sigma_{j-1})}$ в (П1). Обозначая

$$p_{\sigma}(\lambda) = P_{\sigma} \delta(\lambda - \sigma l_{\sigma}) + Q_{\sigma} \delta(\lambda + \sigma l_{-\sigma}) \quad (\text{П2})$$

плотности вероятности случайных величин $\lambda_j^{(\sigma)}$, найдем, что плотность вероятности $p_{j+1}(\mu)$ случайной величины μ_{j+1} есть

$$p_{j+1}(\mu) = \pi_j^{(+)} p_+(\mu) + \pi_j^{(-)} p_-(\mu),$$

$$\pi_j^{(\sigma)} = \sigma \int_0^{\sigma \infty} p_{\sigma}(\lambda) d\lambda. \quad (\text{П3})$$

Отсюда и из (П2) получаем, что вектор $\pi_j = (\pi_j^{(+)}, \pi_j^{(-)})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\pi_{j+1} = A\pi_j, \quad A = \begin{pmatrix} P_+ & Q_- \\ Q_+ & P_- \end{pmatrix}.$$

При больших j вектор π_j стабилизируется и равен собственному вектору π матрицы A , отвечающему собственному значению 1 и имеющему нормировку $\pi_+ + \pi_- = 1$. Отсюда следует, что $\pi = (Q_+ + Q_-)^{-1}(Q_-, Q_+)$, а тогда из (П3) получаем, что при больших j

$$\langle \mu_j \rangle = (Q_+ + Q_-)^{-1}(Q_-l_+ - Q_+l_-). \quad (\text{П4})$$

В частности, при $P_+ = P_-$ получаем естественный результат

$$\langle \mu_j \rangle|_{P_+=P_-} = (l_+ - l_-) / 2. \quad (\text{П5})$$

Из (П4) также следует, что среднее значение равно нулю, если

$$\frac{l_+}{l_-} = \frac{Q_+}{Q_-}. \quad (\text{П6})$$

1. Yu.G. Naidyuk and I.K. Yanson, *Point-Contact Spectroscopy*, Springer Series in Solid-State Sciences, (2004), Vol. 145.
2. H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.G. Williamson, M.E.I. Broekaart, P.H.M. van Loosdrecht, B.J. van Wees, J.E. Mooij, C.T. Foxon, and J.J. Harns, *Phys. Rev. B* **39**, 8556 (1989).
3. B.J. van Wees, H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C.T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
4. Song He and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **40**, 3379 (1989).
5. T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
6. P.P. Lutsishin, T.N. Nakhodkin, O.A. Panchenko, and Yu.G. Ptushinskij, *JETP* **82**, 1306 (1982).
7. A.V. Yanovsky, H.Predel, H.Buhmann, R.N.Gurzhi, A.N. Kalinenko, A.I. Kopeliovich, and L.W.Molenkamp, *Europhys. Lett.* **56**, 709 (2001).
8. B.P. Zakharchenya, P.S. Kop'ev, D.N. Mirlin, D.G. Polakov, I.I. Reshina, V.F. Sapega, and A.A. Sirenko, *Solid State Commun.* **69**, 203 (1989).
9. V.V. Cheianov, V. Fal'ko, and B.L. Altshuler, *Science* **315**, 1252 (2007).
10. G.-H. Lee, G.-H. Park, and H.-J. Lee, *Nature Phys.* **11**, 925 (2015).
11. R.D.Y. Hills, A. Kusmartseva, and F.V. Kusmartsev, *Phys. Rev. B* **95**, 214103 (2017).

12. V.V. Cheianov and V.I. Fal'ko, *Phys. Rev. B* **74**, 041403(R) (2006).
13. R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 223 (1957).
14. Yu. Sharvin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **48**, 984 (1965) [*Sov.Phys. JETP* **21**, 655 (1965)].
15. R. Landauer, *Philos. Mag.* **21**, 863 (1970).
16. S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge: University Cambridge Press (1997).
17. I.M. Lifshits, S.A. Gredeskul, and L.A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems*, Wiley, NY (1988), Vol. 5.
18. W. Feller, *An Introduction to Probability. Theory and Its Applications*, Wiley, New York (1968), Vol 1.
19. A.N. Shiryev. *Probability*, Springer, New York (1996).
20. M.I. Katnelson, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, *Nat. Phys.* **2**, 620 (2006).
21. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).

About ballistic transport in channels with negative refraction of particles

L.A. Pastur, V.V. Slavin, and A.V. Yanovskii

We have considered ballistic transport in a channel consisting of two layers, assuming that on the layers boundary negative refraction of particles, moving along the channel, takes place, which is similar to Veselago effect known in optics. To such a formulation of the model can lead electron transport in graphene and Weyl metals, where negative refraction is due to the Klein effect on the p - n junction, as well as the spin, for example, the photon transport in metamaterials. We have shown that in the semiclassical approximation the boundary with negative refraction has the property, which is similar to backscattering and therefore can significantly affect the transport through long and narrow channels, even in the case of a perfect border. If the border is not perfect (roughness, adsorbed impurities, etc.), and processes of refraction (tunneling) and reflection occur randomly, then a set of interesting properties of the channel substantially expands and opens effective control particles through such channels, including smooth mode as well as hard cut-off mode.

PACS: 72.80.Vp Electronic transport in graphene;
78.67.Pt Multilayers; superlattices;
42.25.Gy Edge and boundary effects; reflection and refraction.

Keywords: negative refraction, transport, conductance, Klein tunneling, graphene.