УДК 517 .91/943

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. І. Шкіль

Нац. пед. ун-т
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

We propose an algorithm for reducing a singularly perturbed system of differential equations in the case where the characteristic equation of the system has a multiple root to a system with simple roots.

Запропоновано алгоритм зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного кореня характеристичного рівняння до системи з простими коренями.

Широкий клас лінійних диференціальних рівнянь, які містять малий або великий параметр (в тому числі і рівняння з малим параметром при похідних), можна звести до так званих систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \ A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k A_k(\tau), \tag{1}$$

де x — n-вимірний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ — матриця розміру $n \times n$, $\tau = \varepsilon t \in [0; L]$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

1. Класичні результати. Дослідження систем вигляду (1) розпочато у працях Ліувілля, Шлезінгера, Біркгофа, Тамаркіна, Пугачова, Фещенка (аналіз отриманих ними результатів наведено в монографії [1]). Ці автори дослідили той випадок, коли корені характеристичного рівняння

$$\det \|A_0(\tau) - \lambda E\| = 0 \tag{2}$$

(E — одинична матриця) є простими на відрізку $[0; L]$. Отримані ними результати увійшли в наукову та навчальну літературу як класичні.

2. Метод асимптотичного розщеплення. У 1950 – 1955 роках С.Ф. Фещенко отримав досить важливі результати стосовно асимптотичного розщеплення системи (1) на підсистеми нижчого порядку. Наведемо ці результати у вигляді теорем.

Теорема 1. *Нехай корені рівняння (2) утворюють дві ізольовані групи $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_r(\tau)$ і $\lambda_{r+1}(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ так, що жоден корінь першої групи при будь-якому $\tau \in [0; L]$ не дорівнює кореням другої групи. Тоді якщо матриця $A(\tau, \varepsilon)$ на відрізку $[0; L]$ має похідні по τ всіх порядків, то система диференціальних рівнянь (1) має формальний розв'язок вигляду*

$$x = U_1(\tau, \varepsilon)\xi_1 + U_2(\tau, \varepsilon)\xi_2,$$

де $U_1(\tau,\varepsilon),\ \ U_2(\tau,\varepsilon)$ *— прямокутні матриці розмірів відповідно* $n \times r$ *і* $n \times n - r$, ξ_1 *— r-вимірний вектор,* ξ_2 *—* $(n-r)$*-вимірний вектор, які визначаються системами диференціальних рівнянь*

$$\frac{d\xi_1}{dt} = W_1(\tau,\varepsilon)\xi_1,\ \ \frac{d\xi_2}{dt} = W_2(\tau,\varepsilon)\xi_2.$$

Теорема 2. *Якщо* $A(\tau,\varepsilon)$ *задовольняє умови теореми 1 і власні числа матриць*

$$\Delta_i(\tau) = \frac{1}{2}\left(W_i(\tau) + W_i^*(\tau)\right),\ \ i = 1,2,$$

де $W_1(\tau),\ \ W_2(\tau)$ *— діагональні клітини матриці* $T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau)$ *(*$T(\tau)$ *— матриця перетворення подібності,* $T^{-1}(\tau)$ *— обернена до* $T(\tau)$*),* $W_1^*(\tau),\ \ W_2^*(\tau)$ *— матриці, спряжені до* $W_1(\tau),\ \ W_2(\tau)$*, недодатні, то для будь-якого* $L > 0$ *і* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *можна знайти таку сталу* $c > 0$*, не залежну від* ε*, що як тільки* $x|_{t=0} = x_m|_{t=0}$ *(*x_m *—* m*-те наближення), то*

$$\|x - x_m\| \leqslant \varepsilon^m c.$$

Зауважимо, що з допомогою теорем 1, 2 (теорем С.Ф. Фещенка) можна асимптотично понизити порядок системи (1). Зокрема, якщо всі корені рівняння (2) є простими на відрізку $[0; L]$, то ці теореми визначають асимптотичний розв'язок системи (1), і, отже, ми отримуємо класичні результати.

3. Випадок кратних коренів. Як згадувалося вище, теореми про асимптотичне розщеплення дають можливість лише наближено понизити порядок вихідної системи. У загальному випадку, наприклад, для кратних коренів характеристичного рівняння з допомогою цих теорем отримати асимптотичний розв'язок системи (1) неможливо. І в той же час цей випадок досить часто зустрічається як при дослідженні теоретичних питань, так і при розв'язанні задач практики. Цей випадок має місце при розгляді рівняння Штурма — Ліувілля, при дослідженні систем диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, в задачах оптимального керування. Зауважимо, що випадок кратних коренів, особливо той варіант, коли кратним кореням відповідають кратні елементарні дільники, досить складний. Це обумовлено тим, що вихідна система диференціальних рівнянь, взагалі кажучи, не має розв'язків, які б мали розвинення за цілими степенями параметра ε. Такі розв'язки, на відміну від випадку простих коренів, зображаються формальними рядами за дробовими степенями цього параметра, причому показники степеня залежать не тільки від кратності кореня, але і від кратності відповідних елементарних дільників та певних співвідношень між коефіцієнтами розглядуваної системи диференціальних рівнянь. Випадок кратних коренів характеристичного рівняння всебічно дослідив автор даної статті у 1960 – 1970 роках. Нижче наведено деякі з отриманих ним результатів (теореми 3, 4).

Припустимо, що характеристичне рівняння (2) має хоча б один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ постійної кратності k, $2 \leqslant k < n$, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності.

Теорема 3. *Якщо* $A(\tau,\varepsilon)$ *має на відрізку* $[0; L]$ *похідні по* τ *всіх порядків і матриця*

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)\left(\frac{dT(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)T(\tau)\right), \tag{3}$$

де $T(\tau)$ — матриця, яка приводить $A_0(\tau)$ до жорданової форми, $T^{-1}(\tau)$ — обернена матриця до $T(\tau)$ така, що для будь-якого $\tau \in [0; L]$ її елемент

$$c_{k1}(\tau) \neq 0, \tag{4}$$

то система диференціальних рівнянь (1) має формальний розв'язок вигляду

$$x = u(\tau, \mu) \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau, \mu) dt\right), \tag{5}$$

де n-вимірний вектор $u(\tau, \mu)$ та скалярна функція $\lambda(\tau, \mu)$ мають розвинення

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau),$$
$$\lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau), \tag{6}$$

в яких

$$\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k}}. \tag{7}$$

Можна довести, що умова (4) є і необхідною для того, щоб система (1) мала формальний розв'язок вигляду (6), (7).

Пізніше теорему 3 довів М. М. Моісєєв іншим методом [2].

Випадок, коли у співвідношенні (4) $c_{k1}(\tau) \equiv 0$, дослідив автор даної статті. Але якщо при цьому $c_{k-1,1}(\tau) + c_{k2}(\tau) \neq 0$, то система (1) має формальний розв'язок вигляду (5), де $u(\tau, \mu)$, $\lambda(\tau, \mu)$ зображаються формальними рядами за степенями параметра

$$\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k-1}},$$

а один розв'язок — за цілими степенями параметра ε. В. К. Григоренко [3] узагальнив попередній результат на інші випадки співвідношень елементів, які знаходяться нижче головної діагоналі матриці (3).

Г. С. Жукова [4] для знаходження показника малого параметра, за яким здійснюється розвинення формальних рядів, використала метод діаграм Ньютона і частково отримала наведені вище результати. Метод діаграм Ньютона застосовував В. П. Яковець [5] при дослідженні систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

Наведемо найбільш загальний результат автора стосовно дослідження системи (1) для випадку кратних коренів характеристичного рівняння (2).

Нехай виконуються такі умови:

1) матриця $A(\tau, \varepsilon)$ на відрізку $[0; L]$ має похідні по τ всіх порядків;

2) характеристичне рівняння (2) має один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ постійної кратності n;

3) кореню $\lambda_0(\tau)$ відповідає $r \geqslant 1$ елементарних дільників вигляду

$$(\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_r};$$

4) виконується одне із співвідношень:
а) $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k$;
б) $k_1 > k_2 > \ldots > k_r$.
Тоді для випадку а) справедлива така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1 – 3 і випадок а), то для того щоб вектор*

$$x = u(\tau, \mu) \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau, \mu) dt\right),$$

де n-вимірний вектор $u(\tau, \mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau, \mu)$ зображаються формальними рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \;\; \lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau), \tag{8}$$

в яких $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k}}$, був формальним вектор-розв'язком системи (1), необхідно і достатньо, щоб функція $(\lambda_1(\tau))^k$ при будь-якому $\tau \in [0; L]$ була коренем рівняння

$$\det \begin{Vmatrix} \rho + c_{k1}(\tau), & c_{k\,k+1}(\tau), & \ldots, & c_{kl_{r-1}+1}(\tau) \\ c_{2k1}(\tau), & \rho + c_{2kk+1}(\tau), & \ldots, & c_{2kl_{r-1}+1}(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}(\tau), & c_{n\,k+1}(\tau), & \ldots, & \rho + c_{nl_{r-1}+1}(\tau) \end{Vmatrix} = 0, \tag{9}$$

де $c_{k1}(\tau), \;\ldots,\; c_{nl_{r-1}+1}(\tau), \; l_{r-1} = (r-1)k$ — елементи матриці (3).

Доведення достатньої умови теореми 4 дає і метод побудови коефіцієнтів формальних рядів (8).

Аналогічна теорема справедлива і для випадку б). Доведено також, що для обох випадків формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями за параметром ε в розумінні А. Пуанкаре [6] точних розв'язків системи (1). Зауважимо, що теорема 3 є частинним випадком теореми 4. Умова (9) для $r = 1$ набирає вигляду

$$\rho + c_{n1}(\tau) = 0.$$

4. „Збурене" характеристичне рівняння. Проблеми. Побудова формальних розвинень розв'язків системи (1) у випадку кратних коренів значно складніша, ніж у випадку простих коренів характеристичного рівняння. Тому природно виникає питання: чи не можна за допомогою певних перетворень над матрицею коефіцієнтів системи (2) випадок кратних коренів звести до простих? Так, Г. Туррітін [7], І. І. Старун [8] намагалися з допомогою низки зрізуючих перетворень позбутися випадку кратних коренів. Але повністю уникнути формальних розвинень за дробовими степенями параметра ε їм так і не вдалося.

В останні роки автором [9, 10] запропоновано новий підхід до побудови формальних розв'язків системи (1), який пов'язаний з введенням до розгляду так званого збуреного характеристичного рівняння. З'ясуємо цей метод для окремого випадку системи (1). А саме, будемо розглядати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x. \tag{10}$$

Припустимо, що матриця $A(\tau)$ достатнє число раз диференційовна на відрізку $[0; L]$, рівняння (2) при будь-якому $\tau \in [0; L]$ має один тотожно n-кратний корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ і йому відповідає один елементарний дільник тієї ж кратності. Тоді з допомогою підстановки

$$x = V(\tau)y,$$

де $V(\tau)$ — матриця перетворення подібності, систему (10) можна звести до системи вигляду

$$\frac{dy}{dt} = B(\tau, \varepsilon)y, \tag{11}$$

де

$$B(\tau, \varepsilon) = W(\tau) - \varepsilon V^{-1}(\tau) \cdot V'(\tau),$$

$W(\tau)$ — клітина Жордана, $V^{-1}(\tau)$ — матриця, обернена до $V(\tau)$, $V'(\tau)$ — похідна.

Побудуємо рівняння

$$\det \|B(\tau, \varepsilon) - \rho E\| = 0 \tag{12}$$

і назвемо його „збуреним” характеристичним рівнянням.

Припустимо, що корені $\rho_i(\tau, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ рівняння (12) прості для будь-якого $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. Тоді, підставляючи в систему (11)

$$y = U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)z, \; U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(\tau, \varepsilon) \tag{13}$$

($m \geqslant 1$ — натуральне число), отримуємо систему

$$U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)\frac{dz}{dt} = \left(B(\tau, \varepsilon)U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon)\right) z \tag{14}$$

($U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon)$ — похідна по τ).

Матрицю $U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)$ будемо визначати із матричної рівності

$$B(\tau, \varepsilon)U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon) =$$

$$= U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) \left(\Lambda_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(\tau, \varepsilon)\right), \tag{15}$$

в якій

$$\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau,\varepsilon)$$

— діагональна матриця, а $C_m(\tau,\varepsilon)$ — матриця розмірів $n \times n$.

Зрівняємо в рівності (15) коефіцієнти при зовнішніх степенях ε^k, $k = 0, 1, \ldots, m$, і ε^{m+1}. Отримаємо систему рівнянь

$$B(\tau,\varepsilon)U_0(\tau,\varepsilon) - U_0(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau,\varepsilon) = 0,$$

$$B(\tau,\varepsilon)U_r(\tau,\varepsilon) - U_r(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau,\varepsilon) = H_r(\tau,\varepsilon),\ r = \overline{1,m},$$

$$U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)C_m(\tau,\varepsilon) = R_m(\tau,\varepsilon),$$

де

$$H_r(\tau,\varepsilon) = U'_{r-1}(\tau,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{r} U_i(\tau,\varepsilon)\Lambda_{r-i}(\tau,\varepsilon),\ r = \overline{1,m},$$

$$R_m(\tau,\varepsilon) = U'_m(\tau,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k}^{m} \varepsilon^{k-1} U_{k+j-1}(\tau,\varepsilon)\Lambda_{m+2-k-j}(\tau,\varepsilon).$$

Невідомі матриці $U_s(\tau,\varepsilon)$, $\Lambda_s(\tau,\varepsilon)$, $s = \overline{0,m}$, визначаються методом, наведеним у [1]. Далі вимагатимемо виконання умови

1°) матриця $U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ неособлива при будь-якому $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Тоді систему (14) згідно з (15) можна записати у вигляді

$$\frac{dz}{dt} = \left(\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(\tau,\varepsilon)\right) z, \tag{16}$$

де

$$C_m(\tau,\varepsilon) = U_m^{-1}(\tau,\varepsilon,\varepsilon) R_m(\tau,\varepsilon).$$

Нехай виконується умова

2°) для будь-якого $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$

$$\operatorname{Re}\left(\rho_j(\tau,\varepsilon)\right) \leqslant 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$C_m(\tau,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-\alpha}),\ \varepsilon \to 0,\ 0 < \alpha < m.$$

Тоді систему (16) можна проінтегрувати методом послідовних наближень, внаслідок чого для вектора z отримаємо асимптотичну формулу

$$z = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right) a + O(\varepsilon^{m-\alpha}),\ \varepsilon \to 0,$$

де a — сталий вектор.

Накладемо ще одну умову

3°) матриця $U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)$ для будь-якого $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ обмежена за нормою. Тоді для вектора x отримаємо асимптотичну формулу

$$x = V(\tau, \varepsilon) U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \sum_{s=0}^m \varepsilon^s \Lambda_s(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) a +$$

$$+ O(\varepsilon^{m-\alpha}), \ \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Зауважимо, що формула (17) отримана при виконанні умов 1° – 3°, в яких явно не фігурують коефіцієнти системи (10). Виникає питання: яким вимогам повинна відповідати матриця $A(\tau)$ (матриця $A(\tau, \varepsilon)$), щоб виконувались умови 1° – 3°?

Відповіді на це питання і складають ті проблеми, які згадуються в п. 4.

Приклад. Розглянемо скалярне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon p(\tau) x = 0, \tag{18}$$

де $p(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in [0; L]$ і має неперервні похідні до другого порядку включно.

Тоді рівняння (18) можна записати у вигляді системи (11), де $y = (y_1; \ y_2)$ $(y_1 = x,$ $y_2 = dx/dt)$ — двовимірний вектор, $B(\tau, \ \varepsilon)$ — матриця розмірів 2×2 вигляду

$$B(\tau, \ \varepsilon) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon p(\tau) & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Рівняння (12) має корені

$$\rho_1(\tau, \ \varepsilon) = \sqrt{-\varepsilon p(\tau)}, \quad \rho_2(\tau, \ \varepsilon) = -\sqrt{-\varepsilon p(\tau)}.$$

Нехай у підстановці (13) $m = 1$. Тоді, повторивши попередні викладки та наклавши умову $p(\tau) > 0 \quad \forall \, \tau \in [0; \ L]$ (при цьому припущенні умови $1°$ – $3°$ виконуються), для вектора z отримаємо асимптотичну формулу

$$z = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \widetilde{\Lambda}_1(\sigma, \ \varepsilon) d\sigma\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \ \varepsilon \to 0,$$

де

$$\widetilde{\Lambda}_1(\sigma, \ \varepsilon) = \operatorname{diag}\left(\frac{p'(\tau)}{4p(\tau)}; \quad \frac{p'(\tau)}{4p(\tau)}\right).$$

5. Періодичні розв'язки систем диференціальних рфвнянь. Використовуючи розроблені методи асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, знайдемо періодичний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h = \frac{dy}{dt} = B(t) y + q(t, y, \varepsilon), \tag{19}$$

де y, q — n-вимірні вектори, $B(t)$ — матриця розмірів $n \times n$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $h \geq 1$ — натуральне число. Системи вигляду (19) у випадку, коли $n = 1$ і $B(t)$ — стала матриця, досліджувалися в [11]. У вказаній роботі наведено також бібліографію робіт, присвячених питанням, які розглядаються у даній статті.

Припустимо, що виконуються умови:

1°) $B(t), q(t, y, \varepsilon)$ періодичні по t з періодом T, $B(t)$ має неперервні похідні до порядку h включно для будь-якого $t \in [0; T]$ а $q(t, y, \varepsilon)$ — неперервна вектор-функція по t, y, ε, яка задовольняє умову Ліпшиця по y при $-\infty < t < +\infty$, $\|y\| \leq R$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

2°) система диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = B(t)y \tag{20}$$

є некритичною відносно періоду T;

3°) характеристичне рівняння

$$\det \|B(t) - \lambda E\| = 0 \tag{21}$$

(E — одинична матриця) при будь-якому $t \in [0; T]$ має прості корені, які ми позначимо через $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, причому $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, — періодичні функції з періодом T [12]. Відомо [13], що існує неособлива періодична з періодом T матриця $V(t)$, h разів неперервно диференційовна на відрізку $[0; T]$ і така, що правильною є рівність

$$V^{-1}(t)B(t)V(t) = W(t),$$

де

$$W(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)). \tag{22}$$

Виконавши у системі (19) лінійну підстановку

$$y = U(t, \varepsilon)z, \quad U(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s U_s(t),$$

отримаємо систему

$$\varepsilon^h U(t, \varepsilon) \frac{dz}{dt} = \Big(B(t)U(t, \varepsilon) - \varepsilon^h U'(t, \varepsilon)\Big) = \tilde{q}(t, z, \varepsilon), \tag{23}$$

де $U'(t, \varepsilon)$ — похідна по t, а

$$\tilde{q}(t, z, \varepsilon) = q\big(t, U(t, \varepsilon)z, \varepsilon\big).$$

Для знаходження матриці $U(t, \varepsilon)$ скористаємося методом із [14]. Згідно з цим методом матрицю $U(t, \varepsilon)$ шукатимемо, виходячи з матричної рівності

$$B(t)U(t, \varepsilon) - \varepsilon^h U'(t, \varepsilon) = U(t, \varepsilon)\big(\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon^h C(t, \varepsilon)\big), \tag{24}$$

де $\Lambda(t,\varepsilon)$ — діагональна матриця вигляду

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s \Lambda_s(t),$$

а $C(t,\varepsilon)$ — матриця розмірів $n \times n$ з неперервними елементами в області $0 \le t \le T$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Прирівнявши в матричній рівності (24) коефіцієнти при степенях $\varepsilon^k,\ k = 0, 1 \ldots, h$, одержимо систему матричних рівнянь

$$B(t)U_0(t) - U_0(t)\Lambda_0(t) = 0,$$

$$B(t)U_s(t) - U_s(t)\Lambda_0(t) = D_s(t), \qquad s = 1, \ldots, h-1, \tag{25}$$

$$U(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon) = G(t,\varepsilon),$$

де

$$D_s(t)U'_{s-h}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} U_i(t)\Lambda_{s+1-i}(t), \qquad s = \overline{1, h-1},$$

$$G(t,\varepsilon) = -U'(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{h-2} \varepsilon^k \sum_{j=k+1}^{h-1} U_j(t)\Lambda_{h+k-j}(t).$$

У роботі [14] доводиться, що матрична система рівнянь (25) сумісна, і дається її розв'язання, причому матриця $U(t,\varepsilon)\ \forall\, t \in (-\infty;\infty)$ і малих $\varepsilon > 0$ є неособливою.

Тоді згідно з (24) систему диференціальних рівнянь (23) можна записати у вигляді

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon^{-h}\Lambda(t,\varepsilon)z + \varepsilon^{-h}g(t,z,\varepsilon), \tag{26}$$

де

$$g(t,z,\varepsilon) = U^{-1}(t,\varepsilon)\tilde{q}(t,z,\varepsilon) - \varepsilon^h C(t,\varepsilon)z,$$

$U^{-1}(t,\varepsilon)$ — обернена матриця до $U(t,\varepsilon)$.

Відносно системи диференціальних рівнянь (26) можна довести таку теорему.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови 1°–3°, а також умови:*

4°) існує функція $\eta(\varepsilon,\rho)$, неперервна і неспадна по ε і ρ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 \le \rho \le R$, $\eta(0,0) = 0$, і така, що

$$\|g(t,z_1,\varepsilon) - g(t,z_2,\varepsilon)\| \le \eta(\varepsilon,\rho)\|z_1 - z_2\|, \tag{27}$$

причому $g(t,0,0) = 0$ і нерівність (27) виконується для всіх $-\infty < t < +\infty$, $\|z_1\| \le \rho$, $\|z_2\| \le \rho$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$;

5°) дійсні частини елементів $\lambda_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$, діагональної матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ при будь-якому $t\in[0;T]$ і $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ не дорівнюють нулю:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_i(t,\varepsilon))\neq 0, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Тоді існують числа $\varepsilon_1>0$ і $\sigma>0$ такі, що система диференціальних рівнянь (26) має періодичний розв'язок $z^*(t,\varepsilon)$ з періодом T, вектор-функція $z^*(t,\varepsilon)$ є неперервною по t і ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$, $z^*(t,0)=0$, і розв'язок $z^*(t,\varepsilon)$ єдиний в області $0\le\|z\|\le\sigma$.

Доведення даної теореми тут не наводимо. Вона може бути доведена тим же методом, що і теореми 5.1, 5.2 із [11].

Зауважимо, що при доведенні зазначених теорем суттєву роль відіграє нормальна фундаментальна матриця розв'язків однорідної лінійної системи (20). З допомогою цієї матриці нелінійна система диференціальних рівнянь (19) зводиться до інтегральної системи рівнянь і методом послідовних наближень доводиться, що вона має розв'язок, який і є шуканим. Однак, оскільки система (20) є системою із змінними коефіцієнтами, то, як правило, шукану фундаментальну матрицю не можна побудувати. Що ж до системи диференціальних рівнянь (26), то відповідною однорідною системою є система

$$\frac{dz}{dt}=\varepsilon^{-h}\Lambda(t,\varepsilon)z$$

і однією з нормальних фундаментальних матриць цієї системи є матриця

$$Z(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right).$$

На завершення зауважимо, що отримані в даній роботі результати можна узагальнити за допомогою методів із [1] і на той випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння (21) є кратні.

1. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. — Киев: КСУ, 1996. — Ч. 1. — 198 с.; 1997. — Ч. 2. — 226 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Асимптотическое представление решения линейных дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных делителей // Докл. АН СССР. — 1966. — **170**, № 4. — С. 37–43.
3. *Григоренко В. К.* Об асимптотическом разложении решений систем линейных дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1972. — 12 с.
4. *Жукова Г. С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988. — 200 с.
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
6. *Poincare H.* Sur les equations de la physique et mathematique // Rend. Pal. — 1894. — P. 10–11, 57–156.
7. *Turritin H. L.* Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary lineary, differential eguations containing a parameter. // Mathematica. — 1957. — **1**, № 2. — P. 29–59.
8. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.

9. *Шкиль Н. И.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. math. (Brno). — 1987. — **23**, № 1. — P. 53 – 62.
10. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических разложениях решений систем дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 2. — С. 285 – 289.
11. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966. — 300 с.
12. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН Украины, 1954. — 286 с.
13. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966. — 252 с.
14. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища шк., 1971. — 225 с.

Одержано 10.10.2002