УДК 517 .9

ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІРРЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

В. П. Яковець, О. А. Шепель

Ніжин. пед. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We investigate the asymptotics of the general solution of a linear system of differential equations with an irregular singular point,

$$x^{-h}B(x)\frac{dy}{dt} = A(x)y,$$

in the case where the boundary matrix of the derivatives is singular. The equation of branching is deduced, coefficients of which contain full information about the structure of the general solution of the considered system in the case where the regular bundle of the matrices $L(\lambda) = A_0 - \lambda B_0$ has multiple finite and infinite elementary divisers.

Досліджується асимптотика загального розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою вигляду

$$x^{-h}B(x)\frac{dy}{dt} = A(x)y$$

у випадку виродження граничної матриці при похідних. Виведено рівняння розгалуження, коефіцієнти якого містять повну інформацію про структуру загального розв'язку наведеної системи у випадку кратних скінченного і нескінченного елементарних дільників регулярної в'язки матриць $L(\lambda) = A_0 - \lambda B_0$.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою вигляду

$$x^{-h}B(x)\frac{dy}{dt} = A(x)y, \tag{1}$$

у якій $y(x)$ — шуканий n-вимірний вектор, $h \in N$, $A(x)$ і $B(x)$ — матриці розмірів $n \times n$, голоморфні в деякому секторі $S = \{x_0 < |x| < \infty, \alpha < \arg x < \beta\}$ (α, β — фіксовані дійсні числа, $x \in S$).

Нехай виконуються такі умови:

1) матриці $A(x)$ та $B(x)$ допускають у секторі S рівномірні асимптотичні розвинення за степенями незалежної змінної x, тобто

$$A(x) = \sum_{k\geq 0} x^{-k}A_k, \qquad B(x) = \sum_{k\geq 0} x^{-k}B_k,\ x \to \infty,\, x \in S; \tag{2}$$

2) $\det B_0 = 0$.

За цих умов дослідимо можливість побудови загального асимптотичного розв'язку системи рівнянь (1) у вигляді розвинень за степенями незалежної змінної.

Можливість побудови асимптотичних розв'язків системи рівнянь (1) залежить від поведінки коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0 - \lambda B_0) = 0$$

і структури елементарних дільників в'язки матриць

$$L(\lambda) = A_0 - \lambda B_0. \tag{3}$$

Системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою досліджувались у роботах [1–4] при різних припущеннях відносно коренів характеристичного рівняння і кратності елементарних дільників в'язки матриць (4). Зокрема, в роботах [1, 2, 5] розглядалась система у випадку, коли при похідних знаходиться одинична матриця; така система досліджена досить детально. Наявність при похідній виродженої матриці $B(x)$, яка вироджується при $x \to \infty$, зумовлює значні труднощі при розв'язанні поставленої задачі. Випадок, коли в'язка матриць $L(\lambda)$ регулярна і має тільки прості скінченні і нескінченні елементарні дільники, досліджено в роботах [2, 3]. Більш складний випадок, коли гранична в'язка матриць $L(\lambda)$ має кратний спектр, розглядався у роботі [4]. Зазначимо, що цей випадок викликає найбільші труднощі, оскільки розв'язки системи (1), як правило, можна побудувати тільки за дробовими степенями змінної x, і проблема полягає не тільки в знаходженні загального вигляду асимптотичних розв'язків, а й у визначенні дробових показників, за якими слід будувати відповідні розвинення.

На відміну від робіт [3, 4], де розглядався найпростіший випадок, коли асимптотичні розвинення можна побудувати за степенями $x^{-\frac{1}{k}}$, де k — кратність відповідного елементарного дільника, у даній роботі повністю вирішено проблему вибору асимптотичних послідовностей, за якими слід будувати відповідні розвинення, залежно від поведінки коефіцієнтів системи. При цьому по аналогії з [6, 7] використовується метод діаграм Ньютона.

Вважатимемо, що в'язка матриць $L(\lambda)$ регулярна [8] і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратності $p > 1$ та нескінченний — кратності q, причому $p + q = n$. Як відомо [7], у цьому випадку скінченному елементарному дільнику відповідає жорданів ланцюжок векторів матриці A_0 відносно B_0 завдовжки p, а нескінченному елементарному дільнику — жорданів ланцюжок матриці B_0 відносно A_0 завдовжки q. Вектори цих ланцюжків можна визначити за формулами [7]

$$\varphi_i(t) = (HB_0)^{i-1}\varphi, \ i = \overline{1,p},$$

$$\tilde{\varphi}_j(t) = (GA_0)^{j-1}\tilde{\varphi}, \ j = \overline{1,q},$$

де H — напівобернена матриця для матриці $A_0 - \lambda_0 B_0$, φ — власний вектор цієї в'язки матриць, G — напівобернена матриця для матриці B_0, $\tilde{\varphi}$ — власний вектор матриці B_0, що відповідає її нульовому власному значенню.

Позначимо через ψ і $\tilde{\psi}$ нулі матриць $(A_0 - \lambda_0 B_0)^*$ та B_0^* (тут і далі символом C^* позначається матриця, спряжена з матрицею C). Визначимо ψ і $\tilde{\psi}$ так, щоб виконувались співвідношення

$$\begin{aligned} \left(B_0 (HB_0)^{i-1}\varphi, \psi\right) &= \delta_{i,p}, \ i = \overline{1,p}, \\ \left(A_0 (GA_0)^{i-1}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) &= \delta_{j,q}, \ j = \overline{1,q}, \end{aligned} \tag{4}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, що завжди можливо [7] (символом (a, b) позначається скалярний добуток в унітарному n-вимірному векторному просторі).

Розв'язки системи рівнянь (1), що відповідають скінченному елементарному дільнику в'язки матриць $L(x)$, шукатимемо у вигляді

$$y\left(x\right) = u\left(x\right) \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} x^h \left(\lambda_0 + \lambda\left(x\right)\right) dx\right), \tag{5}$$

де $u(x)$ — n-вимірний вектор, $\lambda(x)$ — скалярна функція, які підлягають визначенню.

Підставивши (5) в (1), дістанемо

$$x^{-h} B u' + x^{-h} B u x^h (\lambda_0 + \lambda) = Au. \tag{6}$$

Позначимо

$$A\left(x\right) = A_0 + \tilde{A}\left(x\right), \; B\left(x\right) = B_0 + \tilde{B}\left(x\right),$$

де

$$\tilde{A}\left(x\right) = \sum_{k \ge 1} x^{-k} A_k, \; \tilde{B}\left(x\right) = \sum_{k \ge 1} x^{-k} B_k.$$

Тоді рівняння (6) можна записати у вигляді

$$\left(A_0 + \tilde{A}\left(x\right)\right) u = \left[(\lambda_0 + \lambda(x))(B_0 + \tilde{B}(x)) + x^{-h} B(x) \frac{d}{dx}\right] u,$$

або

$$\left(A_0 - \lambda_0 B_0\right) u = \left[\lambda(x) B(x) + \lambda_0 \tilde{B}(x) + x^{-h} B(x) \frac{d}{dx} - \tilde{A}(x)\right] u.$$

Позначимо

$$\Gamma\left(x\right) = \tilde{A}\left(x\right) - \lambda_0 \tilde{B}(x) - x^{-h} B(x) \frac{d}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \Gamma_k,$$

де

$$\Gamma_k = A_k - \lambda_0 B_k - B_{k-h} \frac{d}{dx}, \; k \ge 1. \tag{7}$$

Тоді дістанемо рівняння вигляду

$$\left(A_0 - \lambda_0 B_0\right) u = \left(\lambda\left(x\right) B\left(x\right) - \Gamma\left(x\right)\right) u. \tag{8}$$

Таким чином, задача визначення функції $\lambda(x)$ і вектора $u(x)$ звелась до задачі про збурення власного значення λ_0 та відповідного власного вектора φ в'язки операторів $L(x, \lambda)$ під дією збурюючих операторів $\Gamma(x)$ і $B(x)$.

Вектор $u(x)$ буде розв'язком рівняння (8) тоді й тільки тоді, коли

$$((\lambda B - \Gamma) u, \psi) = 0. \tag{9}$$

При виконанні цієї умови з (8) матимемо

$$u = (\lambda HB - H\Gamma)\, u + c\varphi,$$

де c — довільний скалярний множник. Поклавши $c = 1$, розглянемо рівняння

$$(E - \lambda HB + H\Gamma)\, u = \varphi. \tag{10}$$

Легко переконатися, що рівняння (10) можна формально задовольнити, поклавши

$$u = \varphi + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k \varphi. \tag{11}$$

Підставивши (11) у (9), отримаємо

$$L\,(x, \lambda) = \left((\lambda B - \Gamma) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k \varphi, \psi \right) = 0. \tag{12}$$

Рівняння (12) будемо називати рівнянням розгалуження для розв'язків першої групи (тобто розв'язків системи (1), що відповідають скінченному елементарному дільнику). Його можна записати у вигляді

$$\left(\tilde{L}\varphi, \psi \right) = 0,$$

де

$$\tilde{L} = (\lambda B - \Gamma) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k. \tag{13}$$

Тоді

$$H\tilde{L} = (\lambda HB - H\Gamma) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k.$$

Розглянемо вирази $(\lambda HB - H\Gamma)^k$, $k \geq 1$. Врахувавши, що

$$\Gamma x^{-kh} \lambda = x^{-kh} \lambda \Gamma - x^{-(k+1)h} \left(D - khx^{-1} \right) \lambda B, \;\; k \geq 0,$$

де D — оператор диференціювання по змінній x, матимемо

$$(\lambda HB - H\Gamma)^2 = \lambda^2 (HB)^2 - \lambda (HBH\Gamma + H\Gamma HB) +$$

$$+ \; (H\Gamma)^2 + x^{-h} D \lambda (HB)^2,$$

$$(\lambda HB - H\Gamma)^3 = \lambda^3 H^3 - \lambda^2 \left((HB)^2 H\Gamma + HBHBH\Gamma + H\Gamma(HB)^2\right) +$$

$$+ \ \lambda(HB(H\Gamma)^2 + H\Gamma HBH\Gamma + (H\Gamma)^2 HB) - (H\Gamma)^3 +$$

$$+ \ x^{-h}(\lambda D\lambda + D\lambda^2)(HB)^3 - x^{-h} D\lambda((HB)^2 H\Gamma +$$

$$+ \ HBH\Gamma HB + H\Gamma(HB)^2) + x^{-2h}(D - hx^{-1})D\lambda(HB)^3,$$

....

Введемо такі позначення. Суму всіх можливих добутків i множників α та j множників β позначимо через $\sigma[(\alpha)_i, (\beta)_j]$. Символом $R^i[\lambda^k]$ позначимо суму всіх можливих добутків i „множників” R_s та k множників λ, причому останнім множником у всіх доданках має бути λ, $R_s = (D - shx^{-1})$, і в кожному доданку цієї суми індекс s пробігає значення від $i-1$ до нуля починаючи зліва. Наприклад

$$R^2 [\lambda] = R_1 R_0 \lambda = \left(D - hx^{-1}\right) D\lambda = D^2\lambda - hx^{-1} D\lambda = \lambda'' - hx^{-1}\lambda',$$

$$R\left[\lambda^2\right] = \lambda R_0 \lambda + R_0 \lambda^2 = \lambda D\lambda + D\lambda^2 = \lambda\lambda' + \left(\lambda^2\right)' = 3\lambda\lambda',$$

$$R^2\left[\lambda^2\right] = \lambda R_1 R_0 \lambda + R_1 \lambda R_0 \lambda + R_1 R_0 \lambda^2 = \lambda \left(D - hx^{-1}\right) D\lambda +$$

$$+ \ \left(D - hx^{-1}\right) \lambda D\lambda + \left(D - hx^{-1}\right) D\lambda^2.$$

Тоді

$$(\lambda HB - H\Gamma)^3 = (-1)^3 (H\Gamma)^3 + \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=0}^{3-j} (-1)^{i+j+3} x^{-hi} R^i \left[\lambda^j\right] \sigma \left[(HB)_{i+j}, (H\Gamma)_{3-i-j}\right].$$

Методом математичної індукції неважко довести, що в загальному випадку має місце формула

$$(\lambda HB - H\Gamma)^k = (-1)^k (H\Gamma)^k + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{i+j+k} x^{-hi} R^i \left[\lambda^j\right] \sigma \left[(HB)_{i+j}, (H\Gamma)_{k-i-j}\right]. \tag{14}$$

Підставивши (14) у (13), з урахуванням (2) дістанемо

$$H\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}(-1)^k x^{-s}\tilde{P}_k^s(H\Gamma)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{s=k}^{\infty}(-1)^{i+j+k}x^{-hi-s}R^i\left[\lambda^j\right]\tilde{P}_{i+j,k-i-j}^s(HB;H\Gamma).$$

Тут символом $\tilde{P}_{i,j}^k(HB;H\Gamma)$ позначено суму всіх можливих добутків i множників $HB_{r_1},\ldots$ $\ldots,HB_{r_i}$ та j множників $H\Gamma_{s_1},\ldots,H\Gamma_{s_j}$, сума індексів яких $r_1+\ldots+r_i+s_1+\ldots+s_j=k$, причому згідно з (2), (7) індекси r_i — це набори цілих невід'ємних чисел, а індекси s_j — набори тільки натуральних чисел. Вираз $\tilde{P}_j^k(H\Gamma)$ є сумою всіх можливих „добутків" j множників $H\Gamma_{s_1},\ldots,H\Gamma_{s_j}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює k.

Після нескладних перетворень, пов'язаних із зміною порядку підсумовування та заміною індексів, дістанемо

$$H\tilde{L} = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^j x^{-s}\tilde{P}_j^s(H\Gamma)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hi}(-1)^j x^{-s}R^i\left[\lambda^k\right]\tilde{P}_{i+k,j}^{s-hi}(HB;H\Gamma).\qquad(15)$$

Тоді

$$L(\lambda,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}(-1)^j x^{-s}\left(P_j^s(H\Gamma)\varphi,\psi\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hi}(-1)^j x^{-s}R^i\left[\lambda^k\right]\left(P_{i+k,j}^{s-hi}(HB;H\Gamma)\varphi,\psi\right)$$

(вирази $P_j^s(H\Gamma)$, $P_{i+k,j}^{s-hi}(HB;H\Gamma)$ відрізняються від виразів $\tilde{P}_j^s(H\Gamma)$, $\tilde{P}_{k+i,j}^{s-hi}(H;H\Gamma)$ лише відсутністю в усіх доданках першого множника H).

Отже, рівняння (12) записується у вигляді

$$\lambda^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}L_{k0}\left[\lambda^k\right]+\sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}L_{0s}+\sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}L_{ks}\left[\lambda^k\right]=0,\qquad(16)$$

де

$$L_{00} = 0,$$

$$L_{k0}\left[\lambda^k\right] = \lambda^k\left(B_0\left(HB_0\right)^{k-1}\varphi,\psi\right),\ k\geq 1,$$

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j\left(P_j^s\left(H\Gamma\right)\varphi,\psi\right),\ s\geq 1, \tag{17}$$

$$L_{ks}\left[\lambda^k\right] = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hi}(-1)^j R^i\left[\lambda^k\right]\left(P_{i+k,j}^{s-hi}\left(HB;H\Gamma\right)\varphi,\psi\right),\ k\geq 1,\ s\geq 1.$$

Враховуючи (4), маємо

$$L_{k0}\left[\lambda^k\right] = \lambda^k\delta_{k,p},\ k = \overline{1,p}.$$

Підставивши (15) у (11), знайдемо відповідний вираз для вектора $u(x)$:

$$u\left(x\right) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}H\tilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}x^{-s}H\tilde{L}_{ks}\left[\lambda^k\right]\varphi, \tag{18}$$

де

$$\tilde{L}_{0s} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{s}(-1)^j P_j^s\left(H\Gamma\right),\ s\geq 1,$$

$$\tilde{L}_{ks}\left[\lambda^k\right] = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{\mathrm{j}=0}^{s-hi}(-1)^j R^i\left[\lambda^k\right]P_{i+k,j}^{s-hi}\left(HB;H\Gamma\right),\ k\geq 1, s\geq 0. \tag{19}$$

Цим самим доведено таку теорему.

Теорема 1. *Для того щоб вектор (5) був формальним розв'язком системи (1), необхідно й достатньо, щоб функція $\lambda(x)$ формально задовольняла рівняння (16), де операторні функції $L_{ks}\left[\lambda^k\right]$ визначаються виразами (17), а відповідна вектор-функція $u(x)$ зображується у вигляді розвинення (18), коефіцієнти якого визначаються за формулами (19).*

Розв'язки другої групи, що відповідають нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць $L(\lambda)$, шукатимемо у вигляді

$$y\left(x\right) = w\left(x\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x}x^h\xi^{-1}\left(x\right)dx\right), \tag{20}$$

де $w(x)$ — n-вимірний вектор, $\xi(x)$ — скалярна функція, які підлягають визначенню.

Підставивши (20) в (1), дістанемо

$$x^{-h}B\left(x\right)w'+x^{-h}B\left(x\right)wx^{h}\xi^{-1}\,=\,A\left(x\right)w. \tag{21}$$

Якщо $\xi^{-1}\left(x\right)\neq 0\;\forall x\in S$, то з (21) дістанемо

$$B_0 w\,=\,\xi A\left(x\right)w-\tilde{B}\left(x\right)w-x^{-h}B\left(x\right)\xi w'.$$

Позначивши

$$\tilde{B}\left(x\right)\,=\,\sum_{s\geq 1}x^{-s}B_s,\;\;K\left(x\right)\,=\,\sum_{s\geq 0}x^{-s}K_s, \tag{22}$$

де

$$K_s\,=\,A_s-B_{s-h}\frac{d}{dx},\;\;s\,\geq\,0,$$

отримаємо рівняння

$$B_0 w\,=\,\Big(\xi\left(x\right)K\left(x\right)-\tilde{B}\left(x\right)\Big)\,w. \tag{23}$$

Як і в першому випадку, задача визначення функції $\xi(x)$ і вектора $w(x)$ зводиться до задачі про збурення нульового власного значення оператора B_0 під дією збурюючих операторів $\tilde{B}\left(x\right)$ і $K(x)$.

Вектор $w(x)$ задовольнятиме рівняння (23) тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься умова

$$\left(\left(\xi K-\tilde{B}\right)w,\tilde{\psi}\right)\,=\,0. \tag{24}$$

При виконанні цієї умови

$$\left(E-\xi GK-G\tilde{B}\right)w\,=\,\tilde{\varphi}.$$

Рівняння (10) формально задовольняється, якщо вектор w подати у вигляді ряду

$$w\,=\,\tilde{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi GK-G\tilde{B}\right)^{k}\tilde{\varphi}. \tag{25}$$

Підставивши (25) у (24), дістанемо відповідне рівняння розгалуження

$$M\left(x,\xi\right)\,=\,\left(\left(\xi K-B\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\xi GK-G\tilde{B}\right)^{k}\varphi,\psi\right)\,=\,0. \tag{26}$$

Позначивши

$$\tilde{M}\,=\,\left(\xi K-B\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\xi GK-G\tilde{B}\right)^{k},$$

розглянемо вираз

$$G\tilde{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi GK - G\tilde{B}\right)^k.$$

Врахувавши, що $Kx^{-kh}\xi = x^{-kh}\xi K - x^{-(k+1)h}\left(D - khx^{-1}\right)\xi B,\ k \geq 0$, матимемо

$$\left(\xi GK - G\tilde{B}\right)^2 = \xi^2 (GK)^2 - \lambda\left(GKG\tilde{B} + G\tilde{B}GK\right) +$$

$$+ \left(G\tilde{B}\right)^2 - x^{-h}\xi D\xi GBGK,$$

$$\left(\xi GK - G\tilde{B}\right)^3 = \xi^3 (GK)^3 - \xi^2\left[(GK)^2 G\tilde{B} + GKG\tilde{B}GK + G\tilde{B}(GK)^2\right] +$$

$$+ \xi\left[GK\left(G\tilde{B}\right)^2 + G\tilde{B}GKG\tilde{B} + \left(G\tilde{B}\right)^2 GK\right] - \left(G\tilde{B}\right)^3 - x^{-h}\xi D\xi^2 GB(GK)^2 -$$

$$- x^{-h}\xi^2 D\xi GKGBGK + x^{-2h}\xi\left(D - hx^{-1}\right)\xi D\xi (GB)^2 GK +$$

$$+ x^{-h}\xi D\xi\left[GBGKG\tilde{B} + GBG\tilde{B}GK + G\tilde{B}GBGK\right],$$

....

Проаналізувавши ці вирази, методом математичної індукції встановимо, що

$$\left(\xi GK - G\tilde{B}\right)^k = (-1)^k\left(G\tilde{B}\right)^k + \sum_{s=1}^{k}(-1)^{s+k}\xi^s\sigma\left[(GK)_s, \left(G\tilde{B}\right)_{k-s}\right] +$$

$$+ \xi\sum_{s=2}^{k}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{i=0}^{k-s}(-1)^{j+s+k}x^{-hj}\sigma\left[(GB)_j; (GK)_{s-1-j}; \left(G\tilde{B}\right)_i\right]\left(\xi^{s-1}\right)GK\left(G\tilde{B}\right)^{k-s-i}, \tag{27}$$

де залежність $\sigma\left[(GB)_j; (GK)_{s-1-j}; \left(G\tilde{B}\right)_i\right]\left(\xi^{s-1}\right)$ від ξ визначається за таким правилом. Кожному доданку операторного виразу $\sigma\left[(GB)_j; (GK)_{s-1-j}; \left(G\tilde{B}\right)_i\right]$ відповідає добуток j множників $R_s\xi$, які відповідають множникам GB, і $s-1-j$ множників ξ, що відповідають множникам GK. Порядок розміщення множників $R_s\xi$ та ξ такий же, як і порядок розміщення множників GB і GK у відповідному доданку. У кожному доданку суми індекс s пробігає значення від $j-1$ до нуля починаючи зліва. Наприклад

$$\sigma\left[(GB)_2; (GK)_0; \left(G\tilde{B}\right)_0\right]\left(\xi^2\right) = R_1\xi R_0\xi (GB)^2,$$

$$\sigma\left[(GB)_1\,;(GK)_1\,;(G\tilde{B})_1\right]\left(\xi^2\right) = R_0\xi^2 GBGKG\tilde{B} + R_0\xi^2 GBG\tilde{B}GK +$$
$$+\; R_0\xi^2 G\tilde{B}GBGK + \xi R_0\xi G\tilde{B}GKGB + \xi R_0\xi GKGBG\tilde{B} + \xi R_0\xi GKG\tilde{B}GB.$$

Після перетворень (27), аналогічних до викладених у [7], остаточно дістанемо

$$M(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left(G\tilde{B}\right)^k\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\xi\left(\sigma\left[(GK)_1\,,\left(G\tilde{B}\right)_{k-1}\right]\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right) +$$
$$+\;\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{k}\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^{j+s+k}\,x^{-hj}\xi^2\tilde{R}^j\left(\xi^{s-2}\right)\left(\sigma\left[(GK)_{s-j}\,;\left(G\tilde{B}\right)_{k-s}\right]\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right).$$

Підставивши сюди (22) і згрупувавши доданки з однаковими степенями x, дістанемо

$$M(x,\xi) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\,x^{-s}\left(P_j^s\left(G\tilde{B}\right)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right) +$$
$$+\;\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\,x^{-s}\xi\left(P_{1,i}^s\left(GK;G\tilde{B}\right)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right) +$$
$$+\;\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{k}\sum_{i=0}^{\min\left(k-2,\left[\frac{s}{h}\right]\right)}\sum_{j=0}^{s-ih}(-1)^{i+j}\,x^{-s}\xi^2\tilde{R}^j\left(\xi^{k-2}\right)\left(P_{k-i,j}^{s-hi}\left(GK;G\tilde{B}\right)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right).$$

Вирази $P_j^s(H\Gamma)\,, P_{i,j}^k(H;H\Gamma)$ утворюються за таким же правилом, що й аналогічні вирази (15). Символом $\tilde{R}^i(\xi^s)$ позначається сума всіх можливих „добутків" i множників $R_s\xi$ та $s-i$ множників ξ. У кожному доданку цієї суми індекс s пробігає значення від $i-1$ до нуля починаючи зліва. Оператор R_s в усіх „добутках" діє на весь вираз, який знаходиться праворуч від нього.

Отже, рівняння (26) зводиться до вигляду

$$\xi^q + \sum_{k=q+1}^{\infty}\xi^k M_{k0}\left[\xi^k\right] + \sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}M_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}M_{ks}\left[\xi^k\right] = 0, \tag{28}$$

де

$$M_{00} = 0,$$

$$M_{k0}\left[\xi^k\right] = \xi^k \left(A_0 \left(GA_0\right)^{k-1} \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right),\ k \geq 1,$$

$$M_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \left(P_j^s \left(G\tilde{B}\right) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right),\ s \geq 1, \tag{29}$$

$$M_{1s}\left[\xi\right] = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \xi \left(P_{1,j}^s \left(GK; G\tilde{B}\right) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right),\ s \geq 1,$$

$$M_{ks}\left[\xi^k\right] = \sum_{i=0}^{\min\left(k-2,\frac{s}{h}\right)} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^{i+j} \xi^2 \tilde{R}^i \left(\lambda^{k-2}\right) \left(P_{k-i,j}^{s-hi} \left(GK; G\tilde{B}\right) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right),\ k \geq 2, s \geq 1.$$

Зазначимо, що згідно з (4)

$$M_{k0}\left[\xi^k\right] = \xi^k \delta_{k,q},\ k = \overline{1,q}. \tag{30}$$

Відповідне розвинення для вектора $w(x)$ матиме вигляд

$$w(x) = \tilde{\varphi} + \sum_{s=1}^{\infty} x^{-s} G\tilde{M}_{0s}\tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} x^{-s} G\tilde{M}_{ks}\left[\xi^k\right]\tilde{\varphi}, \tag{31}$$

де

$$\begin{gathered} \tilde{M}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s \left(G\tilde{B}\right),\ s \geq 1, \\ \tilde{M}_{ks}\left[\xi^k\right] = \sum_{i=0}^{\min\left(k-1,\frac{s}{h}\right)} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^j \xi \tilde{R}^i \left(\xi^{k-1}\right) P_{k-i,j}^{s-hi} \left(GK; G\tilde{B}\right),\ k \geq 1, s \geq 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб вектор (20) був формальним розв'язком системи (1), необхідно й достатньо, щоб функція $\xi(x)$ формально задовольняла рівняння (28), де операторні функції $M_{ks}\left[\xi^k\right]$ визначаються за формулами (29). Відповідна вектор-функція $w(x)$ зображується у вигляді розвинення (31), коефіцієнти якого $\tilde{M}_{ks}\left[\xi^k\right]$ визначаються за формулами (32).*

Для аналізу розв'язків рівнянь розгалуження (16) і (28) застосуємо метод діаграм Ньютона [2, 7].

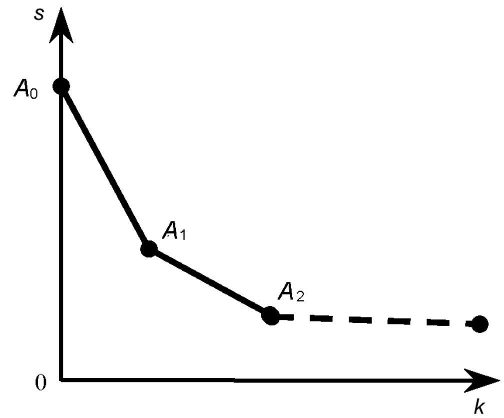

Рис. 1

Щоб знайти вигляд розв'язків $\lambda(x)$ рівняння (16), кожному відмінному від нуля коефіцієнту $L_{ks}\left[\lambda^k\right]$ поставимо у відповідність точку $(k;s)$ у прямокутній системі координат Oks (рис. 1). Потім навколо точки $A_0\,(0;s_0)$, що знаходиться найближче до осі Ok, обертатимемо проти руху годинникової стрілки пряму, доки вона не зустрінеться з деякою точкою $A_1\,(k_1;s_1)$. Далі цю пряму в тому ж напрямку обертатимемо навколо точки A_1, доки вона не зустрінеться з деякою точкою $A_2\,(k_2;s_2)$, і так далі. Сполучивши знайдені точки, дістанемо відповідну діаграму Ньютона.

Зауважимо, що коли на осі Os немає точок, побудову діаграми необхідно починати з подібної точки прямої $k = 1$ (або прямої $k = i$, якщо на прямих $k = i_1$, $i_1 < i$, точок немає).

Нехай тепер $\dfrac{r}{m}$ — тангенс кута нахилу деякої ланки $L^{(i)} = A_{i-1}A_i$ побудованої діаграми до від'ємного напрямку осі Ok. Тоді цій ланці відповідатиме розв'язок рівняння (16), який зображується у вигляді розвинення

$$\lambda(x) = \lambda_1 x^{-\frac{r}{m}} + \sum_{i\geq 2} x^{-\frac{r+i-1}{m}}\lambda_i, \tag{33}$$

якщо визначальне рівняння

$$\sum L_{ks}^{(i)}\left[\lambda_1^k\right] = 0$$

має простий ненульовий корінь (індекс i у виразах $L_{ks}^{(i)}\left[\lambda_1^k\right]$ вказує, що $(k;s) \in L^{(i)}$). Якщо ж λ_1 — тотожно кратний корінь визначального рівняння, то в розвиненні (33) зберігатиметься тільки перший член, а для знаходження наступних членів треба використати нове рівняння розгалуження, виконавши в (16) заміну $\lambda = \lambda_1 x^{-\frac{r}{m}} + \eta$. Якщо відповідне визначальне рівняння матиме знову кратний корінь, то процедуру слід повторити, і так далі.

При цьому для кожної ланки діаграми Ньютона можна побудувати стільки розв'язків рівняння (16), якою є довжина проекції цієї ланки на вісь абсцис. Згідно з (17) кількість таких розв'язків рівняння (16), враховуючи нульові, дорівнює p, тому що на осі абсцис знаходиться точка $(p;0)$.

Аналогічним способом можна знайти розв'язки другого рівняння розгалуження (28).

Розглянемо деякі випадки, пов'язані з поведінкою коефіцієнтів рівняння (16).

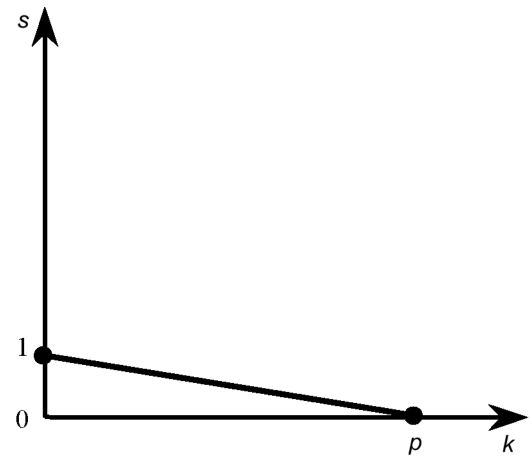

Рис. 2

Якщо виконується умова

$$L_{01} = -(\Gamma_1\varphi, \psi) = -(A_1\varphi, \psi) + \lambda_0(B_1\varphi, \psi) \neq 0, \tag{34}$$

то відповідна діаграма Ньютона матиме вигляд відрізка, який сполучає точки $(0; 1)$ і $(p; 0)$ (рис. 2). Нахил цієї діаграми дорівнює $\dfrac{1}{p}$, а відповідне визначальне рівняння $\lambda_1^p - (\Gamma_1\varphi, \psi) = 0$ має p простих, відмінних від нуля, коренів:

$$\lambda_1^{(j)} = \sqrt[p]{(\Gamma_1\varphi, \psi)} = \sqrt[p]{|(\Gamma_1\varphi, \psi)|}\exp\left(i\frac{\arg(\Gamma_1\varphi, \psi) + (j-1)\,2\pi}{p}\right), \qquad j = \overline{1, p}.$$

Звідси випливає таке твердження.

Теорема 3. *Якщо* $((A_1 - \lambda_0 B_1)\varphi, \psi) \neq 0$*, то система рівнянь (1) має* p *формальних розв'язків вигляду (5), в яких функція* $\lambda(x)$ *та вектор* $u(x)$ *зображуються формальними розвиненнями за степенями* $\mu = \sqrt[p]{x}$*:*

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{-i}\lambda_i, \quad u(x) = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{-i} u_i.$$

Зазначимо, що це твердження було доведено іншим способом у роботі [3]. Якщо умова (34) не виконується, тобто

$$((A_1 - \lambda_0 B_1)\varphi, \psi) = 0, \tag{35}$$

але

$$\begin{gathered} L_{02} = ((\Gamma_1 H \Gamma_1 - \Gamma_2)\varphi, \psi) \neq 0, \\ L_{11} = ((B_1 - B_0 H \Gamma_1 - \Gamma_1 H B_0)\varphi, \psi) \neq 0, \end{gathered} \tag{36}$$

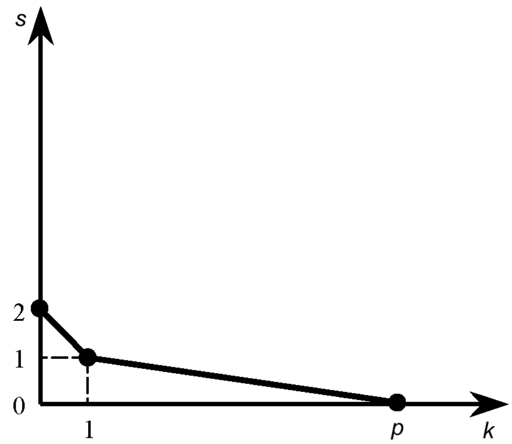

Рис. 3

і $p \geq 3$, то відповідно діаграма Ньютона складається з двох ланок (рис. 3). Нахили цих ланок дорівнюють 1 і $\dfrac{1}{p-1}$, а відповідні визначальні рівняння

$$L_{02} + \lambda_1 L_{11} = 0, \quad L_{11} + \lambda_1^{p-1} = 0$$

мають лише прості, відмінні від нуля, корені. Тому в цьому випадку $p-1$ розв'язків системи (1) можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $x^{-\frac{1}{p-1}}$ й один розв'язок — за цілими степенями x.

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови (35), (36), то система рівнянь (1) має p формальних розв'язків вигляду (5), в яких функція $\lambda(x)$ та вектор-функція $u(x)$ зображуються у вигляді формальних розвинень*

$$\lambda^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{-i}\lambda_i, \quad u^{(1)}(x) = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} x^{-i}u_i,$$
$$\lambda^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{-i}\lambda_i^{(j)}, \quad u^{(j)}(x) = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{-i}u_i^{(j)}, \qquad j = \overline{2,p},\ \mu = \sqrt[p-1]{x}.$$

Аналогічно можна дослідити також інші випадки, коли умови (35), (36) не виконуються.

Аналіз рівняння розгалуження (28) дає змогу зробити такі висновки:

1) згідно з (30) це рівняння має q розв'язків з урахуванням нульових, оскільки на осі абсцис завжди знаходиться точка $(q; 0)$;

2) оскільки при побудові розв'язків другої групи нульові розв'язки рівняння розгалуження відкидаються, то розв'язків другої групи може бути менше q. Їх кількість дорівнює $q - s$, де s — кратність нульового кореня рівняння (28);

3) як випливає з методу діаграм Ньютона, якщо

$$M_{ks}\left[\xi^k\right] \equiv 0 \text{ при } k < s, \quad M_{st}\left[\xi^s\right] \neq 0 \text{ при деякому } t,$$

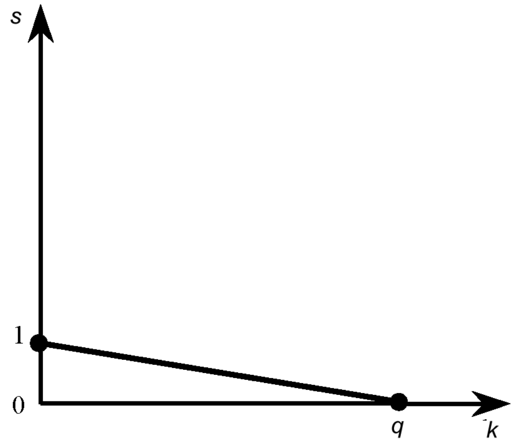

Рис. 4

то рівняння розгалуження (28) має нульовий розв'язок кратності s і $q-s$ ненульових розв'язків. Можна показати, що ця умова еквівалентна наявності в матриці $B(x)$ жорданового ланцюжка завдовжки s відносно оператора $K(x)$. Отже, всього можна побудувати $p+q-n=n-s$ лінійно незалежних розв'язків системи рівнянь (1), де s — довжина жорданового ланцюжка матриці $B(x)$ відносно оператора $\left(A - x^{-h}B\dfrac{d}{dx}\right)$, що узгоджується зі структурою точного загального розв'язку виродженої лінійної системи, встановленого в теоремі 2.2 із [7].

Проаналізуємо деякі випадки, які зустрічаються при побудові розв'язків другої групи.

Якщо виконується умова

$$M_{01} = -\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0, \tag{37}$$

то відповідна діаграма Ньютона матиме вигляд відрізка, який сполучає точки $(0;1)$ і $(q;0)$ (рис. 4). Нахил цієї діаграми дорівнює $\dfrac{1}{q}$, а відповідне визначальне рівняння $\xi_0^q - \left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = 0$ має q простих, відмінних від нуля, коренів:

$$\xi_0^{(j)} = \sqrt[q]{\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)} = \sqrt[q]{\left|\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)\right|}\exp\left(i\frac{\arg\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) + (j-1)\,2\pi}{p}\right),\ j = \overline{1,q}.$$

Звідси випливає таке твердження.

Теорема 5. *Якщо* $\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0$, *то система рівнянь (1) має* q *формальних розв'язків вигляду (20), в яких функція* $\xi(x)$ *та вектор* $w(x)$ *зображуються формальними розвиненнями за степенями* $\nu = x^{\frac{1}{q}}$:

$$\xi\,(x) = \sum_{i\geq 0}\nu^{-i}\xi_i, \quad w\,(x) = \tilde{\varphi} + \sum_{i\geq 1}\nu^{-i}w_i.$$

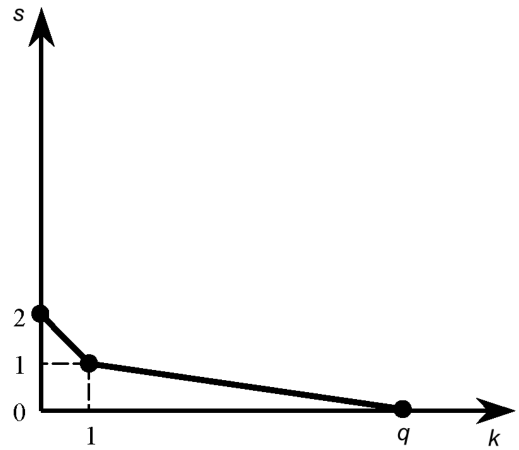

Рис. 5

Якщо умова (37) не виконується, тобто

$$\left(B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = 0, \tag{38}$$

але

$$\begin{gathered} M_{02} = \left(\left(B_1GB_1 - B_2\right)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0, \\ M_{11} = \left(\left(A_1 - A_0GB_1 - B_1GA_0\right)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0, \end{gathered} \tag{39}$$

і $q \geq 3$, то відповідно діаграма Ньютона складається з двох ланок (рис. 5).

Нахили цих ланок дорівнюють 1 і $\dfrac{1}{q-1}$, а відповідні визначальні рівняння

$$M_{02} + \xi_0 M_{11} = 0, \quad M_{11} + \xi_0^{q-1} = 0$$

мають лише прості, відмінні від нуля, корені. Тому в цьому випадку $q-1$ розв'язків системи (1) можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $x^{-\frac{1}{q-1}}$ й один розв'язок — за цілими степенями x.

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови (38), (39), то система рівнянь (1) має q формальних розв'язків вигляду (20), в яких функція $\xi(x)$ та вектор-функція $w(x)$ зображуються у вигляді формальних розвинень*

$$\xi^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{-i}\xi_i, \quad w^{(1)}(x) = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{-i} w_i,$$
$$\xi^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{-i}\xi_i^{(j)}, \quad w^{(j)}(x) = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^{-i} w_i^{(j)}, \ j = \overline{2,q}, \ \nu = \sqrt[q-1]{x}.$$

Аналізуючи коефіцієнти M_{0s}, $s \geq 1$, при $x \to \infty$, $x \in S$, приходимо до висновку, що матриця $B(x)$ неособлива при досить великих x тоді і тільки тоді, коли хоча б один із

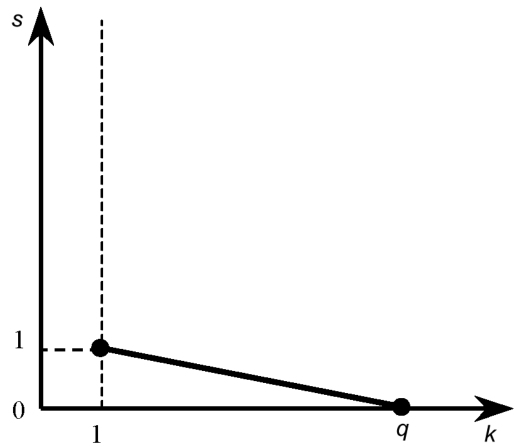

Рис. 6

коефіцієнтів M_{0s} відмінний від нуля. Отже, наявність хоча б однієї точки на осі Os забезпечує неособливість матриці $B(x)$ й одночасно існування q розв'язків другої групи.

Розглянемо випадок, коли матриця $B(x)$ є виродженою при $x \to \infty$, тобто

$$M_{0s} = 0 \quad \forall s \geq 1. \tag{40}$$

Нехай

$$M_{11} = \left(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0. \tag{41}$$

Тоді відповідна діаграма Ньютона має вигляд відрізка, що сполучає точки $(1;1)$ і $(q;0)$ (рис. 6).

Нахил цього відрізка дорівнює $\dfrac{1}{q-1}$, а відповідне визначальне рівняння

$$M_{11} + \xi_0^{q-1} = 0$$

має $q-1$ простих, відмінних від нуля, коренів. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 7. *Якщо виконуються умови (40), (41), то система рівнянь (1) має $q-1$ формальних розв'язків вигляду (20), де функція $\xi(x)$ та вектор $w(x)$ зображуються формальними розвиненнями за степенями $\nu = x^{\frac{1}{q-1}}$:*

$$\xi\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{-i}\xi_i, \quad w\left(x\right) = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^{-i} w_i.$$

Слід зазначити, що побудовані розв'язки системи рівнянь (1) лінійно незалежні при досить великих $x \to \infty$, оскільки вектори $u(x)$ є власними векторами оператора $\Big(A(x) - x^{-h}B(x)\dfrac{d}{dx}\Big)$ відносно оператора $B(x)$, які відповідають власним значенням $\lambda_0 + \lambda(x)$, а $w(x)$ — власні вектори оператора $B(x)$ відносно оператора $\left(A(x) - x^{-h}B(x)\dfrac{d}{dx}\right)$, що відповідають власним значенням $\xi(x)$.

Використовуючи методи [7], можна довести, що побудовані вище формальні розв'язки системи рівнянь (1) є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків цієї системи, що утворюють її загальний розв'язок.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
2. *Шкіль М. І., Григоренко В. К.* Про загальний формальний розв'язок для системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою // Допов. АН УРСР. — 1972. — № 1. — С. 29 – 34.
3. *Елишевич М. А.* Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Математичні методи в науково-технічних дослідженнях. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. — С. 100 – 107.
4. *Елишевич М. А.* Асимптотичне інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння з виродженням та особливою точкою в банаховому просторі // Вісн. Київ. ун-ту Сер. фіз.-мат. — 1997. — Вип. 4. — С. 36 – 41.
5. *Коддингтон Е., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.
6. *Жукова Г. С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988. — 200 с.
7. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Одержано 10.10.2002