

# Горячие электроны в металлических пленках при низких температурах

(Обзор)

В.А. Шкловский

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*  
E-mail: shklovskij@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 ноября 2017 г., опубликована онлайн 25 января 2018 г.

В обзоре обсуждаются работы, выполненные в результате взаимодействия автора с отделом Игоря Михайловича Дмитренко в период от 1975 до 1992 годов. В рамках кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения теоретически рассматриваются горячие электроны при низких температурах в металлических пленках, осажденных на подложки с высокой теплопроводностью. Кратко анализируются основные результаты о горячих электронах в сверхпроводящих пленках, проблема отвода тепла от образца, вопрос о виде функции распределения горячих электронов в условиях нарушения критерия их термализации, размерный эффект в теплоотдаче металлических пленок, туннелирование горячих электронов, а также обобщение представленных результатов на металлы с произвольным законом дисперсии электронов и фононов в терминах спектральных функций Элиашберга.

В огляді обговорюються роботи, які були виконані внаслідок взаємодії автора з відділом Ігора Михайловича Дмитренка за час від 1975 до 1992 років. У рамках кінетичних рівнянь для електронної та фононної функцій розподілу теоретично розглянуто гарячі електрони при низьких температурах у металевих плівках на діелектричних підкладках з високою теплопровідністю. Коротко аналізуються основні результати щодо гарячих електронів у надпровідних плівках, проблема тепловідведення від зразка, питання про вид функції розподілу гарячих електронів в умовах порушення критерію їхньої термалізації, розмірний ефект у тепловіддачі металевих плівок, тунелювання гарячих електронів, а також узагальнення представлених результатів на метали з довільним законом дисперсії електронів та фононів у термінах спектральних функцій Еліашберга.

PACS: 73.40.Gk Туннелирование;  
73.50.-h Явления электронного транспорта в тонких пленках.

Ключевые слова: металлические пленки, нагрев постоянным током, электрон-фононная кинетика.

## Содержание

1. Введение .....	222
2. Горячие электроны в сверхпроводящих (СП) пленках .....	223
2.1. Гистерезис критического тока .....	223
2.2. Динамика СП пленок вблизи критического тока при облучении фотонами .....	223
2.3. Влияние теплоотвода на неустойчивость Ларкина–Овчинникова в СП пленках .....	224
3. Функция распределения горячих электронов в металле при низких температурах в отсутствие межэлектронных соударений .....	225
3.1. Постановка задачи .....	225
3.2. Кинетическое уравнение .....	226
3.3. Исследование решения кинетического уравнения при нулевой температуре .....	227
3.4. Нелинейное электросопротивление металлической пленки при конечной температуре .....	228

4. Размерный эффект в теплоотдаче металлических пленок и их нелинейное электросопротивление при низких температурах.....	230
4.1 Перенос тепла через границу металл–диэлектрик .....	230
4.2. Размерный эффект в теплоотдаче металлических пленок .....	231
4.3. Вычисление нелинейного электросопротивления.....	235
5. Горячие электроны в металлах с произвольным законом дисперсии электронов и фононов .....	237
5.1. Кинетическое уравнение в терминах спектральной функции.....	237
5.2. Мощность, поглощаемая электронами в сильном электрическом поле.....	238
5.3. Нелинейное электросопротивление при низких температурах.....	238
5.4. Туннелирование горячих электронов .....	240
6. Заключение .....	241
Литература.....	242

## 1. Введение

Экспериментальные наблюдения эффектов разогрева носителей заряда в стационарных условиях могут быть легко реализованы в веществах со сравнительно низкой концентрацией таких носителей (горячие электроны в плазме или полупроводниках). Подобные эффекты для металлов с высокой концентрацией электронов впервые теоретически обсуждались в работах [1,2] с использованием приближения двух различных температур для электронов и решетки в модели электронного газа с изотропным и квадратичным законом дисперсии и фононов с дебаевским спектром. Величина теплопередачи от электронов к решетке [1] и нелинейные поправки к закону Ома [2] были получены из условия энергетического баланса. Результаты этих работ использованы автором обзора в 1975 г. в работе [3] для объяснения экспериментов по наблюдению гистерезиса критического тока сверхпроводящих пленок в условиях идеального (по утверждению авторов статьи [4]) теплоотвода в сверхтекучем гелии. Дальнейшие экспериментальные работы по наблюдению гистерезиса критического тока [5] и выяснению роли горячих электронов в задаче об аномальной прозрачности границы металл–диэлектрик [6], предсказанной в работе [7], были проведены в отделе И.М. Дмитренко (см. о горячих электронах разд. 3 обзора [8]). В 1992 г. в этом же отделе была сделана первая экспериментальная работа [9] по подтверждению выводов часто цитируемой теоретической статьи [10] о влиянии теплоотвода на неустойчивость Ларкина–Овчинникова течения вихрей в сверхпроводящих пленках.

Дальнейшие теоретические [11–14] и экспериментальные [6] исследования показали, что в стационарных условиях горячие электроны в хороших металлах могут быть созданы при прохождении электрического тока достаточно умеренной плотности ( $< 10^6$  А/см<sup>2</sup>) через довольно тонкие, узкие (шириной меньше или порядка 1 мкм) металлические пленки, находящиеся в хорошем тепловом контакте с массивными монокристаллическими диэлектрическими подложками, охлаждаемыми жидким гелием. Было показано, что в этом

случае в зависимости от соотношения между мощностью  $P$ , диссипируемой в образце, акустической прозрачностью  $\alpha$  границы металл–диэлектрик и толщиной металлической пленки  $d$  могут быть два, существенно различных режима теплоотвода.

В первом режиме, детально изученном в большом числе работ (см., например, ссылки в статье [6]) и реализуемом при достаточно больших значениях мощности  $P$ , наблюдается обычный «джоулев» нагрев образца, когда электроны и спектральное распределение излучаемых пленкой фононов могут быть описаны одинаковой температурой, которая зависит от акустических параметров металла и подложки так, как это предсказывается теорией акустического рассогласования [15].

При умеренных значениях мощности  $P$  и высокой прозрачности  $\alpha$  (более подробные оценки смотри в п. 4.2) может реализоваться второй режим теплоотвода, который называется режимом электронного перегрева. Существенно, что в этом режиме как диссипируемая мощность, так и спектральное распределение излучаемых пленкой фононов не зависят от параметров подложки, а определяются параметрами, которые характеризуют электрон–фононное взаимодействие (ЭФВ) в металле — фактически хорошо известной (первоначально из теории сверхпроводимости [16]) спектральной функцией Элиашберга  $\alpha^2 F(\omega)$ . Таким образом, в режиме электронного перегрева можно не рассматривать механизмы теплоотвода от образца и нелинейные по электрическому полю эффекты не маскируются чисто тепловыми, как в случае первого режима. В таком случае эксперименты с горячими электронами содержат информацию об ЭФВ в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_D$ ) энергетического спектра, ответственного за кинетические процессы в металле при низких температурах ( $T \ll \theta_D$ ) ( $\theta_D$  — температура Дебая). В обзоре будут обсуждены с теоретической точки зрения некоторые вопросы новых методов ЭФВ диагностики в нормальных и сверхпроводящих металлах. Один из таких вопросов, не рассмотренных в работах [1,2], состоит в выяснении пределов применимости двухтемпературного приближения и анализа тех случаев, в которых оно не применимо. Естественно, что такой анализ тре-

бует использования кинетического подхода для взаимодействующих электронов и фононов.

Соответственно, структура предлагаемого обзора такова. Во втором разделе кратко обсуждаются основные результаты работ по горячим электронам в сверхпроводящих пленках. В третьем разделе рассматривается функция распределения горячих электронов в металле при низких температурах в отсутствие межэлектронных соударений, т.е. ситуация, когда для электронов нарушен критерий термализации. Четвертый раздел посвящен подробному анализу размерного эффекта в теплоотдаче металлических пленок и поведению их нелинейного электросопротивления при низких температурах. В пятом разделе рассмотрены горячие электроны в металлах с произвольным законом дисперсии электронов и фононов в терминах спектральной функции Элиашберга, а также даны ссылки на работы по наблюдению предсказанных эффектов. В Заключении (разд. 6) кратко формулируются основные результаты предыдущих разделов. Отметим также, что содержание обзора при изложении теоретических результатов определяется главным образом наличием оригинального материала автора.

## 2. Горячие электроны в сверхпроводящих (СП) пленках

### 2.1. Гистерезис критического тока

Хорошо известно, что в веществах с достаточно малой концентрацией носителей нетрудно реализовать экспериментальную ситуацию, в которой хорошо выражены эффекты разогрева носителей («горячие» электроны в плазме и полупроводниках). Подобные эффекты для металлов, в которых концентрация электронов велика, теоретически обсуждались в работах [1,2] в рамках приближения двух различных температур для электронов и решетки. В частности, проведенный в [2] учет нелинейных поправок к закону Ома показал, что даже при плотности тока порядка  $10^6\text{--}10^7$  А/см<sup>2</sup> проводимость пленок  $\sigma$  практически нечувствительна к эффектам электронного перегрева ( $\Delta\sigma/\sigma \sim 1\%$  при наиболее оптимистических оценках). По-видимому, с такой оценкой связано общепринятое ранее мнение об отсутствии реальной возможности экспериментального изучения эффектов электронного перегрева в хороших металлах. Однако в работе [3] было впервые обращено внимание на то, что, несмотря на указанную выше нечувствительность  $\sigma$  к перегреву электронов, прямые оценки показывают, что величина перегрева электронов  $\delta T$  при плотности тока порядка  $10^5\text{--}10^6$  А/см<sup>2</sup> может быть весьма значительной ( $\delta T \geq T$  при  $T > 1$  К). Отсюда следует, что учет подобного перегрева важен при анализе резистивного поведения тонких пленок и проволок сверхпроводников (для которых обычно уже при  $t = T/T_c < 0,8$  плотность критического тока

$j_{c1}(t) \sim 10^5\text{--}10^6$  А/см<sup>2</sup>), где этот перегрев достаточно легко может быть обнаружен прежде всего по гистерезису критического тока. Тем самым сверхпроводящая пленка может служить чувствительнейшим индикатором наличия электронного перегрева. Обычно принято наблюдать при  $t < 0,8$  гистерезисы критического тока связывать с перегревом пленки по отношению к гелиевой ванне за счет неизбежного выделения тепла в резистивном состоянии. При таком объяснении величина второго критического тока  $j_{c2}$  должна существенно зависеть от условий теплоотвода (которые в свою очередь определяются размерами пленки и подложки, теплопроводностью последней и т.д.), что и наблюдалось в ряде экспериментов.

Однако в экспериментах [4], проведенных, по утверждению авторов, в условиях практически идеального теплоотвода (температуры ниже  $\lambda$ -точки гелия) показали, что, несмотря на последнее обстоятельство, четко выраженный гистерезис ( $j_{c1}(t)/j_{c2}(t) \geq 4$  для пленок олова) остается, причем величина его зависит только от вещества пленки и температуры. Поэтому в работе [3] было указано, что величина этого гистерезиса и его температурная зависимость находят количественное объяснение в терминах электронного перегрева. Действительно, оценка температуры горячих электронов для пленок олова при их переходе в нормальное состояние при достижении  $j_{c1}$  порядка 7 К, т.е. вдвое больше  $T_c$ . Дальнейшие экспериментальные работы по наблюдению гистерезиса критического тока [5] и аномальной прозрачности границы металл–диэлектрик (см. разд. 4 настоящего обзора) при тепловом излучении фононов тонкими металлическими пленками [6] были проведены в отделе И.М. Дмитренко. Так, в работе [5] исследованы оловянные пленки на подложках из кристаллического кварца и сапфира в диапазоне температур 1,6–4,2 К. Ширина пленок изменялась от 0,7 до 7 мкм. Для наиболее узких пленок (для которых растекание тепла в подложку наиболее эффективно) получено полное согласие с теоретическими результатами работы [3] во всем температурном интервале.

### 2.2. Динамика СП пленок вблизи критического тока при облучении фотонами

В данном разделе будет обсуждаться использование горячих электронов в сверхпроводящих пленках для реализации сверхпроводящих сенсоров фотонного излучения, а также счетчиков фотонов высоких энергий. В обзоре [17] отмечено, что в работе [3] было впервые предложено обсудить идею, объединяющую перегрев электронов с сильной зависимостью сопротивления от эффективной электронной температуры на резистивном переходе сверхпроводящей пленки. В стационарном режиме нагрева постоянным током электронный перегрев всегда маскируется обычным болометрическим эффектом. В этой связи в серии эксперименталь-

ных и теоретических работ [18–20] был исследован динамический режим перегрева электронов внешним источником излучения. После появления этих работ стало понятно, что очень короткое время релаксации электронных возбуждений делает возможным создание быстродействующих сенсоров с чувствительностью, намного превосходящей таковую для обычных болометров.

Как отмечено в [17], в последнее десятилетие было разработано новое поколение сверхпроводящих сенсоров на горячих электронах, включающее в себя счетчики фотонов для широкого спектрального диапазона от радиоволн до оптического и рентгеновского излучения. В разд. 2 обзора [17] обсуждены физические принципы, лежащие в основе использования горячих электронов в сверхпроводящих пленках, и описаны различные технические реализации сенсоров на горячих электронах. Рассмотрены как простейшие подходы, описываемые в пространственно однородном случае системой двух нестационарных линейных уравнений для электронной и фононной температур в п. 2.1, так и модели для возмущений с большой амплитудой в п. 2.2. Следует отметить, что в обзоре [21] показано, как теоретическое рассмотрение подобных нестационарных и нелинейных задач для горячих электронов проводится с использованием кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения.

В разд. 4 обзора [17] описаны физические механизмы работы однофотонных детекторов. Так, в статье [22] был предложен квантовый режим в сверхпроводящей пленке при  $T \ll T_c$ , через которую протекал постоянный ток, по величине незначительно меньший, чем критический ток при данной температуре. Генерация «горячего пятна» в месте поглощения фотона с большой энергией создает локальную область с ослабленной сверхпроводимостью. Тогда сверхпроводящий ток вынужден обтекать это нормальное (резистивное) пятно через те области пленки, которые остаются сверхпроводящими. Если диаметр резистивного пятна таков, что плотность тока в сверхпроводящей области достигает критической величины, то возникает резистивный барьер по всей ширине пленки, генерируя импульс напряжения с амплитудой, пропорциональной постоянному току смещения. В п. 4.2 обсуждается также модель однофотонного детектора для рентгеновских квантов, а в разд. 5 — детекторы фотонов на горячих электронах.

### 2.3. Влияние теплоотвода на неустойчивость Ларкина–Овчинникова в СП пленках

Нелинейное поведение вольт-амперных характеристик (ВАХ) сверхпроводящих пленок в режиме однородного течения магнитного потока вблизи  $T_c$  обычно анализируется на основании сформулированных Ларкиным и Овчинниковым (ЛО) представлений о специфической динамике квазичастиц в системе движущихся

вихрей [23]. Согласно этим представлениям, электрическое поле, возникающее при движении вихрей, может сообщить локализованным в ядрах вихрей квазичастицам энергию, достаточную для выхода из соответствующей потенциальной ямы. Иными словами, как и ранее в нормальном металле, теперь в ядрах вихрей реализуется электронный перегрев квазичастичных возбуждений сверхпроводника. Если при этом время энергетической релаксации квазичастиц  $\tau_\epsilon$  и их коэффициент диффузии  $D$  достаточно велики, так что диффузионная длина  $l_\epsilon = (D\tau_\epsilon)^{1/2}$  существенно превосходит размер ядра, то последний будет обедняться квазичастицами тем больше, чем выше скорость вихрей. В результате этого дефицита происходит уменьшение вязкости  $\eta$  при возрастании скорости вихрей  $V$  или увеличение сопротивления пленки с ростом напряженности электрического поля. Будем считать, что температура сверхпроводника  $T$  близка к критической температуре  $T_c$ , так как при  $T_c - T \ll T_c$  рассматриваемые нелинейные эффекты выражены наиболее сильно. В эксперименте в не слишком больших магнитных полях ( $B \ll H_{c2}$ ) в режиме заданного тока нелинейный участок ВАХ обычно заканчивается скачкообразным увеличением напряжения [24,25]. Согласно ЛО, причиной скачка является неустойчивость (срыв) режима однородного течения потока при скорости вихрей  $v^* = 1,31l_\epsilon(1-t)^{1/4}$ , когда увлекающая вихри сила Лоренца сравнивается с максимальным значением силы вязкости. Зависимость вязкой силы, действующей на вихрь, от его скорости  $f(v) = \eta(v)v$  имеет вид кривой с максимумом вследствие резкого убывания коэффициента вязкости при  $v \gg v^*$ . В экспериментальных работах [24,25] на основании выражения для  $v^*$  были получены значения времени неупругой релаксации электронов для In, Sn, Al, совпадающие по порядку величины с определенными из независимых экспериментов и с теоретическими оценками. Вместе с тем в этих работах отмечается ряд закономерностей, находящихся в противоречии с выводами, следующими из теории ЛО. Так, в работе Хьюбнера с сотрудниками [25] отмечается аномальная зависимость времени неупругой релаксации от величины приложенного магнитного поля. Еще одним существенным расхождением эксперимента и теории является хорошо заметное во всех экспериментах уменьшение тока срыва  $I^*$  при увеличении магнитного поля, хотя, как следует из [23], по крайней мере в малых полях ( $B \ll H_{c2}$ ), ток срыва не должен зависеть от  $B$ . Безуглый и Шкловский в работе [10] показали, что отмеченные выше расхождения между теорией и экспериментом при конечной плотности вихрей могут иметь общую причину: нагрев квазичастиц, принципиально не устранимый в эксперименте в силу конечной скорости отвода энергии, диссипируемой в образце. Было показано, что в зависимости от соотношения между величиной магнитного поля  $B$

и параметром  $B_t$ , введенным в работе [10], существуют два качественно различных механизма неустойчивости вязкого течения вихрей. Если  $B \gg B_t$ , то реализуется нагрев квазичастиц, а для  $B \ll B_t$  (т.е. в малых полях) — ЛО неустойчивость. Отметим, что, несмотря на большое число ссылок экспериментаторов на эту теоретическую работу, первая экспериментальная работа по подтверждению выводов [10] была проделана в отделе И.М. Дмитренко в том же году в работе [9].

### 3. Функция распределения горячих электронов в металле при низких температурах в отсутствие межэлектронных соударений

#### 3.1 Постановка задачи

В работе автора [3] было обращено внимание на важность изучения эффектов перегрева электронного газа применительно к анализу резистивного поведения тонких сверхпроводящих пленок, в которых такой перегрев обнаруживается прежде всего по гистерезису критического тока. Температурная зависимость величины этого гистерезиса вычислена в [3] в приближении двух различных температур для электронов и решетки [1] и оказалась (для пленок In и Sn) в достаточно хорошем согласии с опытом [5].

Как известно, приближение электронной температуры позволяет «обойти» исследование кинетического уравнения для электронной функции распределения в сильном электрическом поле и оправдано, когда выполняется критерий термализации электронного газа  $v_{ep}^e \ll v_{ee}$ , где  $v_{ep}^e$  — частота энергетической релаксации электронов на фононах, а  $v_{ee}$  — частота межэлектронных соударений. Учитывая известные оценки

$$v_{ee} \sim \frac{\varepsilon_F}{\hbar} \left( \frac{T_e}{\varepsilon_F} \right)^2, \quad v_{ep}^e \sim \frac{\theta_D}{\hbar} \left( \frac{T_e}{\theta_D} \right)^3,$$

( $T_e$  — характерная энергия электронов,  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми,  $T_e \ll \theta_D$ ), легко видеть, что грубая оценка для температуры электронов  $T_e$ , ниже которой термализация обеспечена за счет межэлектронных столкновений, дается неравенством  $T_e \ll \theta_D^2 / \varepsilon_F$ . Для таких металлов, как Sn, In, Pb, Nb, правая часть этого неравенства меньше или порядка 1 К. В то же время для этих сверхпроводников, как следует из результатов, приведенных в [3], даже при токе  $j_{c2}$  температура электронов лишь незначительно меньше критической (вне зависимости от температуры решетки), т.е.  $T_e \gtrsim 3$  К, и указанный выше критерий термализации, очевидно, не выполнен.

Более того, сказанное означает, что практически интересной для указанных выше металлов является как раз обратная ситуация, когда роль межэлектронных столкновений в формировании функции распределения горячих электронов вообще малосущественна.

В связи с этим возникает вопрос о нахождении функции распределения электронов в «греющем» электрическом поле в отсутствие межэлектронных столкновений вообще. В случае невырожденных полупроводников ответ на подобный вопрос был получен еще в работе Давыдова [26]. Существенным упрощающим обстоятельством, использованным в [26], был учет известной [27] неэффективности энергетической релаксации электронов на акустических фононах в полупроводниках. Тогда, раскладывая искомую функцию распределения в интеграле столкновений электронов с фононами в ряд по малому отношению энергий фонона и электрона, можно заменить соответствующий интегральный оператор дифференциальным. В металле, однако, при  $T_e \ll \theta_D$  энергетическая релаксация эффективна и подобное упрощение невозможно\*. Кроме того, в отличие от невырожденных полупроводников, в металле интеграл столкновений электронов с фононами содержит нелинейность по функции распределения, связанную с необходимостью учета принципа Паули. Указанные трудности (отсутствие малого параметра и существенная нелинейность задачи, смотри ниже уравнение (6)) и явились, по нашему мнению, причиной того, что для случая металлов в литературе отсутствуют даже качественные суждения о характере функции распределения «горячих» электронов (например, монотонна она или нет, каковы ее асимптотики).

В данном разделе исследуется качественное поведение решения соответствующего нелинейного интегрально-дифференциального уравнения для электронной функции распределения для случая интересующей нас экспериментальной ситуации (тонкая пленка с доминирующим упругим рассеянием электронов\*\* в постоянном однородном электрическом поле) в пределе  $T \rightarrow 0$  ( $T$  — температура решетки). Кроме того, предложен алгоритм построения сколь угодно точного приближения к исходному решению и приведены данные численных расчетов на ЭВМ. Оказывается, что, несмотря на специфическую асимптотику на бесконечности (см. формулу (15)), найденная функция распределения в характерной области изменения энергии в действительности мало отличается от равновесной фермиевской с некоторой эффективной (зависящей от величины поля) температурой  $T_e$ . Последнее обстоя-

\* В связи с этим замечанием можно упомянуть работу [28], где делалась неправильная попытка обосновать возможность такого упрощения, но что указывалось уже в [2].

\*\* Реально это может быть как «грязная» пленка с  $l < d$  ( $l$  — длина свободного пробега,  $d$  — толщина пленки), так и «чистая» пленка ( $l > d$ ) с диффузным рассеянием на границе.



тельство, по нашему мнению, помогает понять хорошую применимость температурного приближения, использованного в [3], для анализа экспериментальных зависимостей работы [4].

Далее, в п. 3.2 обсуждается постановка задачи и выводится соответствующее кинетическое уравнение. В п. 3.3 доказывается монотонность искомой функции распределения, находится ее асимптотика и описана процедура нахождения решения уравнения (6).

### 3.2. Кинетическое уравнение

Если толщина металлической пленки  $d$  удовлетворяет неравенству  $d \ll l_{\text{phe}}$ , где  $l_{\text{phe}} \simeq a\varepsilon_F / T_e$  — длина свободного пробега фонона по отношению к рассеянию на электронах ( $a$  — постоянная решетки), то почти все испущенные электроном фононы сразу же термализуются при столкновении с границей пленки (т.е. покидают металл). Поэтому для пленок толщиной  $d \lesssim 10^3 \text{ \AA}$  ( $l_{\text{phe}} \sim 10^4 \text{ \AA}$  при  $T_e \sim 1 \text{ К}$ ) можно не учитывать эффектов увлечения и разогрева фононного газа, т.е. считать функцию распределения фононов равновесной с температурой термостата. Учет этого обстоятельства позволяет ограничиваться исследованием кинетического уравнения лишь для функции распределения электронов  $n_{\mathbf{p}}$ , которое в однородном и постоянном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  можно записать в виде

$$\hat{v}_{\text{ph}} n_{\mathbf{p}} + \hat{v}_i n_{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}(\partial n_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}),$$

где  $\hat{v}_i n_{\mathbf{p}}$  — «примесный»<sup>\*</sup> интеграл столкновений и

$$\hat{v}_{\text{ph}} n_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} \left\{ \left[ n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(1-n_{\mathbf{p}})(N_{\mathbf{q}}^0 + 1) - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})N_{\mathbf{q}}^0 \right] \times \right. \\ \left. \times \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) + \right. \\ \left. + \left[ n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}(1-n_{\mathbf{p}})N_{\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})(N_{\mathbf{q}}^0 + 1) \right] \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \right\}$$

— интеграл столкновений электронов с фононами [29]. Здесь  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  — энергия электрона с импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  — энергия фонона с импульсом  $\mathbf{q}$  и  $N_{\mathbf{q}}^0 = [\exp(\hbar\omega_{\mathbf{q}}/T) - 1]^{-1}$  — равновесная функция распределения фононов с температурой  $T$ . В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением лишь изотропного и квадратичного закона дисперсии для электронов и дебаевского фононного спектра. Тогда, согласно [30],  $w_{\mathbf{q}} \equiv \pi\mu^2\omega/\rho s^2$ , где  $\mu$  — константа электрон-фононного взаимодействия,  $\rho$  — плотность вещества,  $\hbar\omega_{\mathbf{q}} = sq$  ( $s$  — скорость продольных фононов). Для «примесного» интеграла

\* Слово «примесный» взято в кавычки, так как в случае «чистой» пленки речь идет о рассеянии границей с характерным временем релаксации импульса  $\tau \sim d/v_F$ , и соответственно кинетическое уравнение не содержит члена  $\mathbf{n}\nabla n_{\mathbf{p}}$ , необходимого для вычисления проводимости  $\sigma$ .

\*\* Для «чистой» пленки она дается известным выражением  $\sigma = (3/4)\sigma_0(d/l) \ln(l/d)$ , где  $\sigma_0$  — проводимость массивного образца.

столкновений воспользуемся приближением времени релаксации.

В дальнейшем нас будут интересовать такие характерные энергии электронного газа  $T_e \ll \theta_D$ , что доминирующей является упругая релаксация электронов, т.е.  $v_{\text{eph}}^\varepsilon \ll \tau^{-1}$ , где  $\tau$  — время релаксации импульса. С одной стороны, это позволяет считать проводимость пленки<sup>\*\*</sup>  $\sigma$  не зависящей от величины поля (область «остаточного» сопротивления). С другой стороны, это же позволяет представить функцию распределения  $n_{\mathbf{p}}$  в виде суммы, зависящей только лишь от энергии изотропной части  $n(\varepsilon)$  и малой изотропной добавки  $n_{\mathbf{p}}^{(1)}$ , причем  $n_{\mathbf{p}}^{(1)} \ll n(\varepsilon)$  в меру малости параметра  $\varkappa \equiv eEl/T_e \ll 1$  (оценку для  $T_e$  как функции величины поля  $E$  см. ниже, формулу (5)). Воспользуемся теперь тем, что  $\hat{v}_i n(\varepsilon) = 0$ . Тогда, считая, что  $\hat{v}_{\text{ph}} n(\varepsilon) \ll v_i n_{\mathbf{p}}^{(1)} = -n_{\mathbf{p}}^{(1)}/\tau$ , в первом приближении по параметру  $\varkappa$  имеем

$$n_{\mathbf{p}}^{(1)} = -\frac{e\tau}{m}(\mathbf{p}\mathbf{E})dn(\varepsilon)/d\varepsilon.$$

Во втором приближении по этому же параметру с учетом соотношения  $\langle v_i n_{\mathbf{p}}^{(2)} \rangle_\varepsilon = 0$  (знак  $\langle \dots \rangle_\varepsilon$  означает усреднение по изоэнергетической поверхности) получаем уравнение для  $n(\varepsilon)$

$$\frac{\sigma E^2}{N(0)} \frac{d^2 n(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = -\hat{v}_{\text{ph}} n(\varepsilon). \quad (1)$$

Здесь  $N(0)$  — плотность состояний на уровне Ферми. В уравнении (1) удобно перейти к безразмерной переменной  $\xi = (\varepsilon - \varepsilon_F)/T_e$ , где  $T_e$  — некоторая характерная энергия электронного газа, после чего уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\sigma E^2}{N(0) T_e^2} \frac{1}{d\varepsilon^2} \frac{d^2 n(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = -v(I^0(\xi) + I^T(\xi, \gamma)), \quad (2)$$

где  $v = \alpha T_e^3 / 4\pi v_F \rho \hbar^4 s^4$  имеет порядок частоты энергетической релаксации электронов со средней энергией  $T_e$  на фононах ( $v \approx v_{\text{eph}}^\varepsilon(T_e)$ ), а  $\gamma \equiv T_e/T$ . В записи (2) электрон-фононный интеграл столкновений представлен для удобства в виде суммы двух слагаемых. Одно из них,  $(I^0(\xi))$ , соответствует процессам, связанным лишь с излучением фононов электронами, и не зависит от температуры термостата  $T$ :

$$I^0(\xi) \equiv [1 - n(\xi)] \int_0^\infty dx x^2 n(\xi + x) - n(\xi) \int_0^\infty dx x^2 [1 - n(\xi - x)]. \quad (3)$$

Другое же слагаемое ( $I^T(\xi, \gamma)$ ) описывает процессы с участием термостата и обращается в нуль при  $T = 0$ :

$$I^T(\xi, \gamma) \equiv \int_0^{\infty} dx x^2 N^0(\gamma x) [n(\xi + x) + n(\xi - x) - 2n(\xi)]. \quad (4)$$

При дальнейшем анализе уравнения (2) мы пока пренебрежем слагаемым  $I^T(\xi, \gamma)$ , что физически эквивалентно неравенству  $T_e \gg T(\gamma \gg 1)$ , соответствующего ситуации «сильного перегрева» (но так, что неравенство  $\alpha \ll 1$  тем не менее всегда выполнено). Наконец, удобно выбрать  $T_e$  из условия

$$\sigma E^2 = N(0)T_e^2 v, \quad (5)$$

так что уравнение (2) максимально упрощается и приобретает вид

$$\frac{-d^2 n(\xi)}{d\xi^2} = [1 - n(\xi)] \int_0^{\infty} dx x^2 n(\xi + x) - n(\xi) \int_0^{\infty} dx x^2 [1 - n(\xi - x)], \quad (6)$$

явно демонстрирующий отсутствие малого параметра. Заметим, что условие (5) имеет простой физический смысл: мощность, поглощаемая электронами от электрического поля ( $\sigma E^2$ ), может быть представлена в виде произведения среднего числа способных излучить фотон электронов  $N(0)T_e$ , средней энергии излученного фотона  $T_e$  и частоты энергетической релаксации  $v$ .

### 3.3. Исследование решения кинетического уравнения при нулевой температуре

Для исследования решения уравнения (6) удобно ввести функцию  $\varphi(\xi)$ :  $n(\xi) = (1 + \varphi(\xi))/2$ . Отметим, что  $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$  и  $\varphi(\infty) = +1$ ,  $\varphi(+\infty) = -1$ . Тогда (6) можно переписать в более симметричном виде

$$-\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \left\{ [1 - \varphi(\xi)] \int_0^{\infty} dx x^2 [1 + \varphi(x + \xi)] - [1 + \varphi(\xi)] \int_0^{\infty} dx x^2 [1 + \varphi(x - \xi)] \right\}, \quad (7)$$

и из нечетности  $\varphi(\xi)$  следует, что задача сводится к решению уравнения (7) на полуоси  $0 < \xi < \infty$  с условиями  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = -1$ . При этом мы будем искать решения в классе функций таких, что  $1 + \varphi(\xi)$  имеет экспоненциальную асимптотику на бесконечности. Для дальнейшего анализа введем еще обозначения:

$$y(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx x^2 [1 + \varphi(x + \xi)], \quad z = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx x^2 [1 - \varphi(\xi - x)].$$

Очевидно, что

$$y''' = 1 + \varphi(\xi) = 2n(\xi), \quad z''' = 1 - \varphi(\xi) = 2[1 - n(\xi)].$$

Отсюда следует, что

$$y''' + z''' = 2, \quad (8)$$

$$y + z = \xi^3 / 3 + \alpha \xi, \quad (9)$$

где

$$\alpha = 2y'(0). \quad (10)$$

Уравнение (7) можно переписать в виде

$$\varphi'' = yz'' + zy'''. \quad (11)$$

В свою очередь, интегрируя (11) с учетом экспоненциального убывания  $y(\xi)$  на  $+\infty$ , получаем:

$$\varphi' = yz'' + zy'' - z'y'. \quad (12)$$

Полагая теперь  $\xi \equiv \gamma x$  ( $\gamma^5 = 3$ ), на основании (9) можно написать окончательное уравнение для  $y(x)$ :

$$y^{IV} - P(x)y'' + P'(x)y' - P''(x)y + \gamma^2(2yy'' - (y')^2) = 0, \quad (13)$$

$$P(x) \equiv x^3 + \tilde{\gamma}x, \quad \tilde{\gamma} \equiv \alpha\gamma^3.$$

Заметим, что постановка задачи для уравнения (13) теперь такова: требуется найти число  $\alpha$  и решение уравнения (13) такое, что  $y(x)$  экспоненциально убывает на бесконечности и

$$y'(0) = \alpha / 2, \quad y'''(0) = 1. \quad (14)$$

Итак, хотя мы и получили дифференциальное уравнение, в целом поставленная задача осталась нелокальной. Но при этом вместо нелинейного интегрально-дифференциального уравнения (7) имеем нелинейное дифференциальное уравнение (13) и задачу для него, типа граничной задачи на полуоси. Отметим, что уже из (12) легко следует, что искомая функция  $\varphi(\xi)$  монотонно убывает. Действительно, из положительности  $n(\xi)$  и определений функций  $y(\xi)$  и  $z(\xi)$  видно, что для всех  $\xi$  имеем  $(-1)^n y^{(n)} < 0$  и  $z^{(n)} > 0$  ( $n = 0, 1, 2$ ). Тогда в (12) правая часть отрицательна. Нахождение решения поставленной для (13) задачи мы начнем с отыскания асимптотического поведения  $y(x)$ . Нелинейные члены в уравнении при этом можно отбросить и из линейного уравнения получить следующую асимптотику при  $x \rightarrow \infty$ :

$$y \approx x^{-21/4} \exp((-2/5)x^{5/2} - \tilde{\gamma}x^{1/2}) [1 + O(x^{3/2})]. \quad (15)$$

Дальнейший анализ проводился на ЭВМ. Общая схема его такова. Берем  $y$  в виде

$$y = \beta x^{-21/4} \exp\{(-2/5)x^{5/2} - \tilde{\gamma}x^{1/2}\}$$

и находим  $y^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) в точке  $x = x_0$ , где  $x_0$  достаточно велико. Фиксируя  $\alpha$  и  $\beta$ , находим  $y(x)$ . Окончательный выбор  $\alpha$  и  $\beta$  получается из двух условий (14), являющихся для этих параметров уравнениями. Не ос-

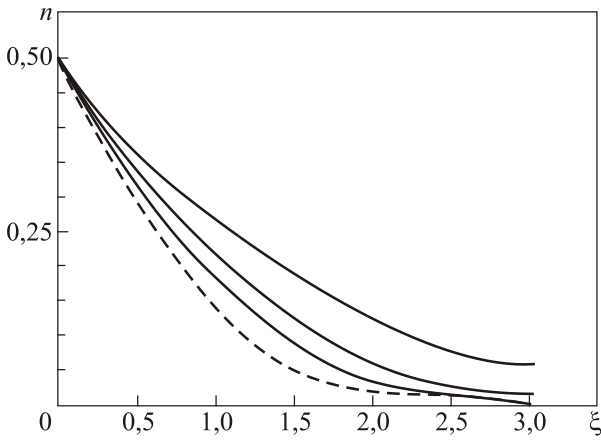


Рис. 1. График распределения  $n_\gamma(\xi)$  при  $\gamma = 1, 1.5, \infty$ ; (сверху вниз — сплошные линии). Пунктир — температурное приближение для  $\gamma = \infty$ .

танавливаясь на подробностях, численного анализа (точность которого 0,1%), приведем окончательные результаты на рис. 1.

### 3.4. Нелинейное электросопротивление металлической пленки при конечной температуре

Обобщим полученные для  $T = 0$  результаты на случай произвольной температуры термостата. Существенно при этом отметить, что такое обобщение не сводится к простому усложнению метода расчета, использованного выше, за счет появления дополнительного параметра  $T \neq 0$ . Действительно, простые физические соображения показывают, что исследованный выше случай  $T = 0$  в смысле изучения асимптотического поведения  $n(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  является выделенным. Сколь угодно малые  $T \neq 0$  изменяют найденную там асимптотику на экспоненциальную вида  $\exp(-a\xi)$ , где величина  $a$  должна зависеть от параметра  $\gamma = T_e / T$ . Особенно очевидно это в случае  $E \rightarrow 0$ , когда асимптотика функции распределения «навязывается» термостатом, т.е.  $n(\xi) \sim \exp(-\xi)$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Выделенность найденной выше асимптотики  $n(\xi)$  при  $T = 0$  физически связана, по-видимому, с тем фактом, что при  $T = 0$  любое сколь угодно малое (но конечное) электрическое поле будет «греющим» в том смысле, что оно является единственной «внешней» силой, которая формирует вид  $n(\xi)$ . В случае же  $T \neq 0$  это уже не так, ибо вид  $n(\xi)$  при  $E \rightarrow 0$  в нулевом приближении формируется термостатом с соответствующей медленно убывающей экспоненциальной асимптотикой.

Вместе с тем физически очевидно, что включение термостата с  $T \rightarrow 0$  хотя и изменяет существенно аналитическую природу точного решения задачи, тем не менее не может существенно изменить  $n(\xi)$  в характер-

ной области изменения энергии (определяемой в этом предельном случае величиной  $T_e \gg T$ ).

Для численного решения поставленной задачи нам пришлось использовать методы, отличные от тех, которые применялись выше. Краткое описание этих методов и полученные с их помощью результаты (воспроизводящие, естественно, приведенные выше результаты в случае  $\gamma \rightarrow \infty$  и являющиеся, таким образом, независимой проверкой правильной полученного там численного решения) даны ниже. Кроме того, мы также вычисляем величину полевого вклада в обусловленное фононами электросопротивление металла  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$ , с тем чтобы оценить, насколько найденные нами отличия функции распределения от «температурной» фермиевской влияют на такую интегральную характеристику, как  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$ .

Рассмотрение поставленной задачи начнем с замечания, что приведенное выше обезразмеривание кинетического уравнения по  $T_e$  неудобно для интересующего нас случая произвольного соотношения между  $T_e$  и  $T$ , так как не допускает простого перехода к предельным случаям слабого перегрева ( $E \rightarrow 0, T = \text{const}$ ) и «сильного» перегрева ( $T \rightarrow 0, E = \text{const}$ ). Поэтому, имея в виду желаемую аналогию с температурным приближением Каганова, Лифшица, Танатарова [1], обезразмерим кинетическое уравнение (2) по отношению к величине  $\theta$ , определяемой соотношением

$$\theta^5 \equiv T^5 + T_e^5, \quad (16)$$

где  $T_e$  определяется, как и выше (формула (5)). Итак, если  $\xi \equiv (\varepsilon - \varepsilon_F) / \theta$ , а  $\gamma \equiv \theta / T$ , то кинетическое уравнение для  $n(\xi)$  приобретает вид

$$\left(\frac{1}{\gamma^5} - 1\right) \frac{d^2 n(\xi)}{d\xi^2} = I^0(\xi) + I^T(\xi, \gamma). \quad (17)$$

Легко видеть, что в пределе  $T \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) уравнение (17) переходит в уравнение (6). При  $E = 0$  ( $\gamma = 1$ ) левая часть (17) обращается в нуль и решением (17) является, как и должно быть, равновесная фермиевская функция с температурой решетки  $T$ .

Для вычисления полевой зависимости обусловленного фононами электросопротивления горячих электронов находим соответствующую поправку  $n_{\text{ph}}^{(2)}$  из уравнения второго приближения

$$\hat{v}_i n_{\text{ph}}^{(2)} = e\mathbf{E} \left( \partial n_{\text{ph}}^{(1)} / \partial \mathbf{p} \right) - \hat{v}_{\text{ph}} \left\{ n_{\text{ph}}^{(0)} + n_{\text{ph}}^{(1)} \right\}.$$

Легко показать, что единственный член в правой части этого выражения, дающий вклад в ток, есть  $\hat{v}_{\text{ph}}^{(0)} n_{\text{ph}}^{(1)}$ , где  $\hat{v}_{\text{ph}}^{(0)}$  — линейризованный по малой добавке к  $n_{\text{ph}}^{(0)}$  оператор электрон-фононных столкновений. Стандарт-

\* Заметим, однако, что получить точный вид  $a(\gamma)$  нам не удалось, что связано прежде всего с нелокальностью и нелинейностью исследуемого уравнения.



ные вычисления приращения фоновой вклада в удельное электросопротивление образца за счет электрического поля  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  (определенного так, что  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E=0)=0$ ) приводят к следующему результату:

$$\delta\rho_{\text{ph}}^T(E) = \left[ \gamma^5 \frac{|Q(\gamma)|}{10D_5} - \frac{4}{5} \right] \rho_{\text{ph}}(T), \quad (18)$$

$$Q(\gamma) \equiv \int_0^\infty dx x^4 \int_0^\infty d\xi \frac{dn_\gamma}{d\xi} [n_\gamma(x+\xi) + n_\gamma(x-\xi)], \quad (19)$$

где  $n_\gamma(\xi)$  — функция распределения горячих электронов, получаемая при численном решении уравнения (17). Здесь  $D_5$  дается формулой (41), а  $\rho_{\text{ph}}(T)$  — температурная добавка к остаточному сопротивлению в равновесном случае при температуре  $T$ . Отметим еще, что, как можно показать, связь  $\gamma$  и  $P$  ( $P$  — мощность, рассеиваемая в единице объема образца) дается соотношением

$$\gamma^5 - 1 = \frac{10D_5}{6j_0^2} \frac{P}{\rho_{\text{ph}}(T)}, \quad (20)$$

где  $j_0 \equiv nes$ , а  $n$  — число электронов в единице объема,  $e$  — заряд электрона,  $s$  — скорость звука.

Итак, в общем случае, когда не выполняется критерий термализации  $v_{\text{eph}}^e \ll v_{ee}$ , т.е. преобладающими в формировании функции распределения горячих электронов  $n(\xi)$  являются электрон-фононные столкновения, схема для вычисления нелинейной по полю добавки к фоновому вкладу в удельное электросопротивление  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  такова: из нелинейного интегродифференциального уравнения (17) при различных значениях параметра  $\gamma$  находим однопараметрическое семейство функций  $n_\gamma(\xi)$ . С помощью формулы (19) вычисляем величину  $Q(\gamma)$ . Искомая зависимость  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  как функция  $T$  и  $\gamma$  дается формулой (18), где  $\gamma$  связана с физически наблюдаемой величиной  $P$  соотношением (20).

Для отыскания функции  $n_\gamma(\xi)$  следует решить уравнение (17). Вводя, как и выше, функцию  $\varphi(\xi) = 2n(\xi) - 1$ , получаем для нее уравнение

$$d^2\varphi/d\xi^2 - I_\varphi^0 - I_\varphi^T \equiv \hat{K}\varphi = 0, \quad (21)$$

которое нужно решить на интервале  $0 \leq \xi < \infty$  с условиями  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = -1$ .

Непосредственное численное решение уравнения (21) искать трудно, и мы использовали для его решения метод установления. Рассматривая решение нестационарного уравнения

$$\partial u(t, \xi) / \partial t = \hat{K}u(t, \xi), \quad (22)$$

с начальным условием  $u(0, \xi) = u_0(\xi)$  и граничными условиями  $u(t, 0) = 0$ ,  $u(t, \infty) = -1$ , находим  $u(\infty, \xi)$ .

Из физических соображений представляется очевидным, что это значение должно совпадать с искомым

значением  $\varphi(\xi)$  независимо от начальной функции распределения  $u_0(\xi)$ . Граничные значения для  $u(t, \xi)$  естественно выбрать такими же, как и для предельного распределения  $\varphi(\xi) = u(\infty, \xi)$ . В качестве начального распределения выбиралось значение  $u_0(\xi) = -\text{th}(\xi/2)$ , а уравнение (22) заменялось явной разностной схемой.

Для вычисления величины  $Q(\gamma)$  удобно воспользоваться представлением, которое нетрудно получить с помощью некоторых преобразований из (19):

$$Q(\gamma) = - \int_0^\infty x^4 [1 + \varphi(x)] dx - 4 \int_0^\infty [1 + \varphi(\xi)] d\xi \int_0^\xi y^3 [1 + \varphi(y)] dy - 12 \int_0^\infty \xi^2 [1 + \varphi(\xi)] d\xi \int_0^\xi y [1 + \varphi(y)] dy. \quad (23)$$

Обсудим теперь результаты расчета. Величина  $Q(\gamma)$  оказывается монотонно растущей функцией  $\gamma$  (см. рис. 2) такой, что  $Q(1) = 8D_5$ . При анализе полученных результатов нас прежде всего интересовал вопрос о том, насколько точные численные значения для  $n_\gamma(\xi)$  и  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(\gamma)$  отличаются от соответствующих функций, вычисляемых аналитически в температурном приближении. Последнему соответствует выбор  $n_\gamma(\xi) \rightarrow f(\xi/\tilde{\theta})$ , где  $f$  — равновесная фермиевская функция,  $\tilde{\theta}^5 \equiv T^5 + \tilde{T}_e^5$ , а  $\tilde{T}_e$  определено соотношением  $T_e^5 = D_5 \tilde{T}_e^5$ , так что  $(\tilde{\theta}/T)^5 = 1 + (\gamma^5 - 1)/D_5$  (здесь символом тильда будем обозначать результаты, относящиеся к температурному приближению). Таким образом, с учетом соотношения (20)  $\tilde{\theta}(P, T)$  есть та эффективная температура, которая для равновесной фермиевской функции  $f(\xi/\tilde{\theta})$ , подставленной в уравнение теплового баланса работы [1], дает ту же самую рассеиваемую мощность  $P$ , что и истинная функция распределения  $n_\gamma(\xi)$ .

Физическим основанием для такого выбора  $\tilde{\theta}$  может служить соображение, что  $f(\xi/\tilde{\theta})$  есть тот предел, к которому должна стремиться  $n_\gamma(\xi)$ , при «постепенном» включении межэлектронных взаимодействий и  $P = \text{const}$ , так, что в конечном итоге выполняется условие термализации  $v_{ee} \gg v_{\text{eph}}^e$ . Вычисление полевого вклада в

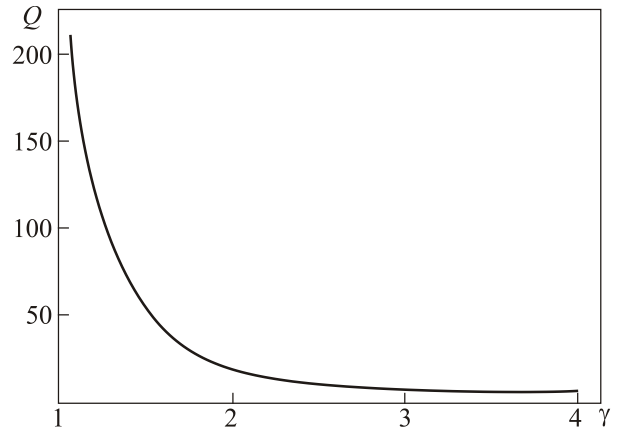


Рис. 2. График зависимости величины  $|Q|$  от  $\gamma$ .

электросопротивление в температурном приближении приводит к формуле

$$\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E) = \frac{4(\gamma^5 - 1)}{5D_5} \rho_{\text{ph}}(T). \quad (24)$$

Сравнение выражений (18) и (24) как функции параметра  $\gamma$  показывает, что различие между ними во всем исследованном интервале  $1,1 < \gamma < 10$  меньше 1%.

Таким образом, для рассматриваемой нами простейшей модели электронов с изотропным и квадратичным законом дисперсии и фононов с дебаевским спектром в отсутствие межэлектронных столкновений температурное приближение описывает такую интегральную (зависящую от функции распределения  $n_\gamma(\xi)$ ) характеристику, как  $\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E)$ , с очень высокой точностью. Возможной причиной такой точности может, на наш взгляд, являться то, что как  $P$ , так и  $\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E)$  являются в исследованной нами модели фактически моментами функции  $n_\gamma(\xi)$  одного порядка. Поэтому хотя функции  $n_\gamma(\xi)$  и  $\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E)$  различаются незначительно (но все же заметно, см. рис. 1), близость  $\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E)$  и  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  может быть весьма высокого порядка, так как  $\tilde{P}_\gamma = P_\gamma$  по определению. Это же приводит к предположению, что если рассматривать в определенном выше температурном приближении физические отклики, соответствующие моментам иного порядка от  $n_\gamma(\xi)$ , чем величина  $P_\gamma$ , то отличие таких откликов от «истинных» должно быть более заметно.

Отметим также, что, комбинируя формулы (20) и (24), видно, что из связи между экспериментально наблюдаемыми величинами  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  и  $P$  в температурном приближении величина константы электрон-фононного взаимодействия  $\mu$  выпадает. Именно, существует линейная связь в виде

$$\delta\tilde{\rho}_{\text{ph}}^T(E) = 4P / 3j_0^2. \quad (25)$$

#### 4. Размерный эффект в теплоотдаче металлических пленок и их нелинейное электросопротивление при низких температурах

##### 4.1 Перенос тепла через границу металл-диэлектрик

Исследование вопроса о тепловом сопротивлении границы металл-диэлектрик (МД) представляет самостоятельный интерес в связи с известными [31] экспериментами по распространению тепловых импульсов в твердых телах при низких температурах. Для экспериментального изучения такого сопротивления (равно как и для получения самих тепловых импульсов) ши-

роко используется метод нагрева электрическим током тонких металлических пленок, осажденных на массивные монокристаллические подложки из диэлектрика. В таких экспериментах обычно измеряются величина и спектральная интенсивность излучаемого пленкой теплового потока  $Q$  в зависимости от температуры электронов  $T_e$  и подложки  $T$  (температуру подложки в силу реализации баллистического режима распространения излучаемых пленкой фононов можно считать равной температуре гелиевой ванны). Температуру электронов  $T_e$  непосредственно не измеряют, а вычисляют по изменению электросопротивления пленки, пользуясь известной температурной зависимостью последнего в равновесном случае [32].

Получаемая в таких экспериментах зависимость  $Q = Q(T_e, T)$  обычно интерпретируется в терминах предложенной Литтлом [15] теории температурного скачка на границе двух твердых тел. Если  $T_e \ll \theta_D$ , то результат Литтла можно записать в виде  $Q = A(T_e^4 - T^4)$ , где величина  $A$  определяется только акустическими характеристиками металла и диэлектрика так, как это принято в теории акустического рассогласования. Если  $\theta$  — угол падения фонона на границу раздела сред, то величина  $A$  пропорциональна усредненной по углам прозрачности границы  $\alpha(\theta)$ , имеющей смысл вероятности прохождения данного фонона через границу раздела МД. При таком подходе электронный вклад в тепловое сопротивление границы МД отсутствует.

Однако, как показано ниже, теория акустического рассогласования, не учитывающая электронных характеристик металла, справедлива лишь для достаточно массивных металлических образцов. В интересующем нас прежде всего обратном предельном случае тонких металлических пластин (пленок) — соответствующие оценки приведены ниже — роль электронов в формировании температурного скачка на границе МД становится определяющей.

Чтобы пояснить физическую причину такого возрастания электронного вклада с уменьшением толщины металлического слоя (конфигурация типа «сэндвич» Д<sub>1</sub>МД<sub>2</sub>, см. рис. 3), рассмотрим качественно механизм переноса тепла через границу раздела МД. С этой целью прежде всего напомним, что в достаточно чистых металлах основными носителями тепла являются электроны, а не фононы. Однако перенос тепла через границу МД осуществляется только фононами в меру ее акустической прозрачности. Поэтому со стороны металла вблизи границы существует переходной слой, в котором тепловая энергия, переносимая электронами,

\* Вопрос о влиянии электронов на величину скачка Капицы между металлом и He II ранее рассматривался в известной работе Андреева [33]. Предложенный в [33] механизм такого влияния наиболее эффективен именно в случае сильного акустического рассогласования граничных сред (для границы металл-He II  $\alpha \lesssim 10^{-2}$ ). Обсуждаемый ниже механизм влияния электронов на температурный скачок наиболее эффективен как раз в обратном предельном случае высокой прозрачности ( $\alpha \sim 1$ ).

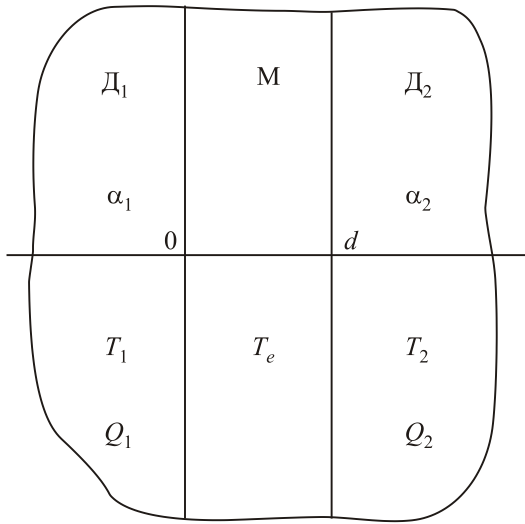


Рис. 3. Схематический вид конфигурации  $D_1MD_2$  (диэлектрик–металл–диэлектрик) типа «сэндвич».  $d$  — толщина металлической пленки.

трансформируется в поток фононов. Толщина этого слоя порядка длины свободного пробега теплового фонона по отношению к рассеянию на электронах  $l_{\text{phe}}(T_e)$  ( $l_{\text{phe}} \sim \hbar v_F / kT_e \sim 10^{-3} - 10^{-4}$  см при гелиевых температурах). Интуитивно очевидно, что если  $d \gg l_{\text{phe}}$  ( $d$  — толщина металлической пластины), то детальная структура этого переходного слоя несущественна для расчета теплосопротивления границы МД, что и соответствует обычному подходу, игнорирующему электронный вклад. Если же  $d \ll l_{\text{phe}}(T_e)$ , а  $\alpha \sim 1$ , то большинство фононов, излучаемых электронами металла, успевают уйти из пленки без перепоглощения внутри нее даже после нескольких последовательных отражений от ее границ. Таким образом, в отличие от предыдущего случая спектральное распределение излучаемой пленкой фононов в большей степени содержит информацию об электрон-фононном взаимодействии в металле, чем о величине  $\alpha$  прозрачности границы МД.

Последовательная формулировка этих качественных соображений на кинетическом уровне приводит к возможности количественного описания размерного эффекта в теплоотдаче от тонких слоев металла в условиях баллистического распространения излучаемых пленкой фононов. Такой расчет, учитывающий конечную прозрачность границы МД в духе теории акустического рассогласования [15], приводится ниже.

#### 4.2. Размерный эффект в теплоотдаче металлических пленок

Рассмотрим металлическую пластинку (пленку) толщиной  $d$ , находящуюся с обеих сторон в контакте с массивными диэлектриками  $D_1$  и  $D_2$ , температуры которых  $T_1$  и  $T_2$  известны (см. рис. 3). Пусть через образец течет постоянный электрический ток плотностью  $j$ , так,

что в единице объема выделяется мощность  $P \equiv j^2 / \sigma$ , где  $\sigma$  — проводимость металла. Требуется найти величины тепловых потоков  $Q_1$  и  $Q_2$ , если прозрачности границ раздела для фононов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  известны.

Последовательный теоретический расчет теплоотдачи пластины при практически произвольном соотношении между ее толщиной  $d$ , величиной  $l_{\text{phe}}(T_e)$  и параметрами прозрачности оказывается возможным благодаря наличию в этой ситуации нескольких упрощающих задач физических обстоятельств.

Одно из них связано с возможностью пренебречь неоднородностью электронной функции распределения по толщине пленки в меру малости параметра  $\lambda_{\text{ph}} / \lambda_e \ll 1$ , где  $\lambda_{\text{ph}}$  и  $\lambda_e$  — коэффициенты теплопроводности фононов и электронов. Если характерные энергии электронов таковы, что  $\lambda_e$  формируется на длине столкновений электронов с примесями или границами кристаллитов пленки  $l_i$ , а  $\lambda_{\text{ph}}$  определяется рассеянием фононов на электронах, то предыдущее неравенство эквивалентно условию  $(l_{\text{phe}} / l_D)^2 \gg 1$  и обычно на эксперименте при  $T_e \ll \theta_D$  выполняется с большим запасом. Здесь  $l_D \sim (l_e l_i)^{1/2}$  — диффузионная длина, а  $l_e \sim l_{\text{phe}}(T)(\theta_D / T)^2$  — средняя длина свободного пробега электрона с энергией  $\epsilon \sim kT$  по отношению к рассеянию на фононах ( $k$  — постоянная Больцмана).

Вторым важным упрощающим обстоятельством является возможность ввести электронную температуру в случае, если  $T_e \gg \theta_D^2 / \epsilon_F$ , когда формирование температурного фермиевского распределения уже не может осуществляться за счет прямых межэлектронных соударений. Такое введение  $T_e$  может быть обосновано как в пределе  $d \ll l_{\text{phe}}$  [11,12], так и в пределе  $d \gg l_{\text{phe}}$  за счет эффективных межэлектронных столкновений через фононы. Поэтому утверждение о возможности введения  $T_e$  и в случае  $d \sim l_{\text{phe}}$  можно считать достаточно надежной интерполяцией упомянутых выше предельных случаев, где оно доказывается строго.

Оба эти обстоятельства позволяют свести поставленную выше задачу к решению кинетического уравнения для фононной функции распределения, после чего величина  $T_e$  как функция  $Q$  и  $T$  определяется из уравнения теплового баланса. Наконец, еще одно важное упрощение, которое особенно существенно в актуальном для нас случае хорошей прозрачности ( $\alpha \sim 1$ ), связано с возможностью сформулировать простые граничные условия на фононную функцию распределения. Как показано ниже, возможность баллистического распространения излучаемых пленкой фононов не только существенно упрощает учет отвода тепла от образца, но и создает условия для возможной реализации размерного эффекта.

Переходя к количественной формулировке задачи, выберем направление оси  $z$  перпендикулярно границам раздела сред и пусть в плоскости  $xu$  задача про-

странственно однородна. В соответствии со сказанным выше, запишем кинетическое уравнение для фоновой функции распределения  $N(\mathbf{q}, z)$  ( $\mathbf{q}$  — импульс фонона) в виде

$$s_z(\partial N / \partial z) = \hat{v}N. \quad (26)$$

Здесь  $s_z$  — проекция скорости фонона на направление оси  $z$ ,  $\hat{v}N$  — интеграл столкновений фононов с электронами, который в нашем случае, когда функция распределения электронов является равновесной фермиевской с температурой  $T_e$ , приводится к виду  $v_{\text{phe}}[n(T_e) - N(z)]$ , где  $n(T_e)$  — равновесная бозевская функция с температурой  $T_e$ , а  $v_{\text{phe}}$  имеет смысл частоты столкновения фонона с энергией  $\hbar\omega$  с электронами. В рассматриваемой нами простейшей модели электронов с квадратичным и изотропным законом дисперсии и дебаевской модели для фононов  $v_{\text{phe}}$  определяется величиной ЭФВ и пропорциональна  $\omega$  ( $v_{\text{phe}} \sim \omega s / v_F$ ,  $v_F$  — фермиевская скорость). Точнее,

$$v_{\text{phe}} = \mu^2 m^2 \omega / 2\pi \hbar^2 \rho s^2. \quad (27)$$

Здесь  $\mu$  — константа ЭФВ ( $\mu \sim \varepsilon_F$ ),  $m$  — эффективная масса электрона,  $\rho$  — плотность вещества,  $s$  — скорость продольного звука. Общее решение уравнения (26) имеет вид

$$N(z) = C \exp(-z/l_z) + n(T_e), \quad (28)$$

где  $C$  — произвольная константа, а  $l_z = s_z / v_{\text{phe}}$ . Введем теперь две функции:  $N^{\geq}(q, z) \equiv N(z, q, q_z \geq 0)$ , и обозначим  $|l_z| = l$ , где  $l$  зависит от угла  $\theta$  между направлением вектора  $\mathbf{q}$  и оси  $z$ . Тогда для величин  $N^{\geq}$  имеем соотношения

$$N^{\geq} = C^{\geq} \exp(\mp z/l) + n(T_e). \quad (29)$$

где коэффициенты  $C^{\geq}$  должны определяться с учетом двух граничных условий на  $N(z)$  соответственно при  $z = 0$  и  $z = d$ . Такие граничные условия легко записать в интересующем нас случае баллистического распространения излучаемых металлом фононов с учетом конечной прозрачности границы МД в рамках теории акустического рассогласования.

Если  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — коэффициенты отражения фононов соответственно на границах 1 и 2 ( $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\alpha_i(\theta)$  — коэффициент прозрачности), то необходимые граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} N^>(0) &= \alpha_1 n(T_1) + \beta_1 N^<(0), \\ N^<(0) &= \alpha_2 n(T_2) + \beta_2 N^<(d). \end{aligned} \quad (30)$$

В теории акустического рассогласования коэффициент прозрачности границы раздела  $\alpha$  связан с углом падения фонона на границу раздела  $\theta_1$ , преломле-

ния  $\theta_2$  и акустическими импедансами граничащих сред известными соотношениями (см., например, [32]).

$$\alpha = \alpha_1(\theta_1) = \alpha_2(\theta_2) = \frac{4(\rho_2 s_2 / \rho_1 s_1)(\cos(\theta_2) / \cos(\theta_1))}{(\rho_2 s_2 / \rho_1 s_1 + \cos(\theta_2) / \cos(\theta_1))^2}. \quad (31)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  на данной границе связаны соотношением  $s_2 \sin(\theta_1) = s_1 \sin(\theta_2)$ . (Здесь уже индексы 1 и 2 относятся к одной из границ МД.)

Комбинируя соотношения (29) и (30), можно получить следующее выражение для  $C^>$ :

$$C^> = \frac{\alpha_1 n(T_1) + \beta_1 \alpha_2 n(T_2)x + n(T_e)(\alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 x)}{(1 - \beta_1 \beta_2 x^2)}. \quad (32)$$

Выражение для  $C^<$  отличается от (32) переменной индексов 1 и 2 и дополнительным множителем  $x = \exp(-d/l)$ . Используя выражения для  $C^{\geq}$ , легко написать результат решения кинетического уравнения (28) и выражение для теплового потока  $Q_1$  (выражение для  $Q_2$  отличается от  $Q_1$  лишь переменной индексов 1 и 2 и имеет обратный знак):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{q_z > 0} \alpha_1 \gamma (1 - \beta_2 x^2) [n(T_1) - n(T_e)] - \alpha_2 x [n(T_2) - n(T_e)], \\ \gamma &\equiv \hbar \omega_{\mathbf{q}} s_z / (1 - \beta_1 \beta_2 x^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Величина  $T_e$  определяется из уравнения теплового баланса для электронов  $Q_e = Q_1 - Q_2$ , где  $Q_e = Pd$  — полная плотность потока тепла, проходящего через границы металлической пластины.

Обратимся теперь к важному для экспериментов с тепловыми импульсами [31] вопросу о тепловом излучении нагреваемой током металлической пленки в среде с температурой  $T$ . Искомую связь между  $Q$  и  $T_e$ , следующую из (33) при  $T_1 = T_2 = T$  можно представить в компактном виде, вводя эффективную суммарную прозрачность границ  $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}(q, d)$ , так что

$$Q_e = \sum_{q_z > 0} \hbar \omega_{\mathbf{q}} s_z \tilde{\alpha}(q, d) [n(T_e) - n(T)], \quad (34)$$

$$\tilde{\alpha} = (1 - x)[\alpha_1(1 + \beta_2 x) + \alpha_2(1 + \beta_1 x)] / (1 - \beta_1 \beta_2 x^2). \quad (35)$$

Отметим, что в отличие от «затраченных» прозрачностей  $\alpha_i(\theta)$ , которые зависят лишь от угла падения фонона на границу раздела в соответствии с формулой (31), эффективная прозрачность  $\tilde{\alpha}$  имеет не только дополнительную угловую зависимость, связанную с величиной  $x$ , но и зависит от частоты фонона.

Переходя в формуле (35) от суммирования к интегрированию, выражение для теплового потока  $Q$  удобно представить в виде



$$Q_e = \frac{2\pi s^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{q_D} q^3 \chi_Q(q) [n_{T_e}(q) - n_T(q)] dq, \quad (36)$$

где мы ввели усредненную по углам  $\theta$  эффективную прозрачность  $\chi_Q(q)$  соотношением

$$\chi_Q(q) = \int_0^1 u \tilde{\alpha}(u, q) du. \quad (37)$$

Здесь  $u = \cos\theta$ ,  $n_T(q) \equiv n(sq/kT)$ , а  $\tilde{\alpha}(u, q)$  дается соотношением (35).

Выражения (36), (37) и (35) содержат связь наблюдаемой на опыте зависимости  $T_e(Q)$  (см. ссылки 12, 13 в [31], а также более подробное изложение в [32]) с толщиной пленки и параметрами прозрачности. Однако в общем случае вычисление зависимости «формфактора»  $\chi_Q(q)$  от величины импульса фонона  $q = \hbar\omega/s$  может быть проведено ввиду сложности выражения (35) для  $\tilde{\alpha}$  лишь с помощью численного интегрирования на ЭВМ. Поэтому рассмотрим представляющие физический интерес два предельных случая, когда выражение для  $\chi_Q(q)$  можно выписать в явном виде.

Предварительно определим зависящий от электронной температуры параметр  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon \equiv 2d\beta_1\beta_2 / l_{\text{phe}}(1 - \beta_1\beta_2), \quad (38)$$

где  $l_{\text{phe}} = \hbar v_F / kT_e$ .

Формулы, соответствующие обычной интерпретации [31,32], игнорирующей электронный вклад в тепловое сопротивление границы, получаются из (36) и (37) при  $\varepsilon \gg 1$ . Действительно, в этом пределе  $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \bar{\alpha}$ ,  $\chi_Q(q) = \bar{\alpha}$ , и при  $T_e \ll \theta_D$  из (36) следует хорошо известный результат Литтла [15]:

$$Q = Pd = (\pi^2 \bar{\alpha} / 120s^2 \hbar^3) (T_e^4 - T^4). \quad (39)$$

Заметим, что при  $P = \text{const}$   $T_e \sim d^{1/4}$ , т.е. хотя и слабо, но растет с толщиной пленки  $d$ . Тепловой режим пленки в этом случае соответствует обычному «джоулеву» нагреву. В частности, спектр излучаемых пленкой фононов является равновесным с температурой  $T_e$ , так что максимуму его спектральной интенсивности отвечает энергия  $\hbar\omega_m \simeq 2,8kT_e$ .

Рассмотрим обратный предельный случай, когда прежде всего  $d \ll l_{\text{phe}}(T_e)$ , сохраняя все же  $d > \Lambda$ , где  $\Lambda = \Lambda(T_e)$  — длина волны теплового фонона в металле, чтобы не учитывать деформацию фононного спектра пленки (напомним, что в рассматриваемом нами «чистом» пределе  $\Lambda/l_{\text{phe}} \sim s/v_F \ll 1$ , так что указанное выше двойное неравенство может быть выполнено). Тогда если и  $\varepsilon \ll 1$ , то из (35) легко получить, что  $\tilde{\alpha} \simeq 2d/l$  и  $\chi_Q(q) = 2d/s\tau_{\text{phe}}$ . Из формулы (36) в этом пределе получаем

$$P = \frac{2\mu^2 m^2 D_5}{(2\pi\hbar)^3 \hbar^4 \rho s^4} (T_e^5 - T^5), \quad (40)$$

где

$$D_5 \equiv \int_0^\infty \frac{z^4 dz}{e^z - 1} \simeq 24,88. \quad (41)$$

Из (40) видно, что при  $P = \text{const}$  величина  $T_e$  не зависит от параметров прозрачности  $\alpha$  и толщины пленки  $d$ , а определяется лишь интенсивностью ЭФВ.

В этом пределе ( $\varepsilon \ll 1$ ), который мы будем называть далее режимом электронного перегрева, большинство фононов, излучаемых электронами, успевают уйти из пленки, не перепоглощаясь внутри нее, и электроны и решетку можно описать с помощью двух различных температур:  $T_e$  и  $T$  [1]. Заметим, что хотя формулу (40) фактически можно написать сразу, пользуясь условием теплового баланса (что и было впервые сделано в работе [1]), однако приведенный здесь ее вывод в рамках кинетического подхода позволяет выяснить пределы ее применимости в условиях стационарного нагрева электрическим током. Именно, режим электронного перегрева в интересующей нас задаче реализуется в «чистом виде» лишь в том случае, когда параметр  $\varepsilon$  (38) удовлетворяет неравенству  $\varepsilon \ll 1$ .

Отметим, что формула (36) описывает и все «промежуточные» возможности, реализующиеся между предельными ситуациями чисто электронного перегрева ( $\varepsilon \ll 1$ ) и «джоулевого» нагрева ( $\varepsilon \gg 1$ ) по мере роста рассеиваемой мощности  $P$ , а следовательно, и величины параметра  $\varepsilon$ . Любопытно отметить также, что в режиме электронного перегрева излучение фононов из пленки неравновесно и максимуму его спектральной интенсивности отвечает энергия  $\hbar\omega_m \simeq 3,9kT_e$ .

Что же касается «джоулевого» нагрева, то, несмотря на существование формулы (39), нельзя все же считать, как это обычно делается [15], что фононы в пленке равновесны с температурой  $T_e$ , ибо такая функция распределения обращает в нуль интеграл столкновений электронов с фононами, а следовательно, и передаваемую фононам мощность  $P$ . Как показывает приведенный ниже анализ выражения для  $N(\mathbf{q}, z)$ , фононная функция распределения в рассматриваемом режиме существенно неоднородна на масштабе  $l_{\text{phe}}(T_e)$ . Поэтому в случае «джоулевого» нагрева можно лишь утверждать, что функция распределения вылетающих из металла фононов  $N^>$  на границе пленки  $z = d$  соответствует равновесным фононам с температурой  $T_e$ .

Чтобы иметь наглядную картину появления рассмотренного выше размерного эффекта, нам кажется интересным более подробно проанализировать выражения для фононной функции распределения. Для простоты ограничимся анализом симметричного случая ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $T_1 = T_2 = T$ ). Тогда, если обозначить



$$\varkappa \equiv \alpha / (1 - \beta x), \quad (42)$$

то выражения (29) для  $N^{\lessgtr}$  приобретают вид

$$N^>(z) = \varkappa e^{-z/l} n(T) + (1 - \varkappa e^{-z/l}) n(T_e),$$

$$N^<(z) = \varkappa e^{(z-d)/l} n(T) + (1 - \varkappa e^{(z-d)/l}) n(T_e). \quad (43)$$

Из выражений (39) видно, что характерной длиной пространственного изменения  $N^{\lessgtr}$  является величина

$$l = |s_z| / v_{\text{phe}} = l(q, \theta). \quad (44)$$

Функции  $N^{\lessgtr}$  представляют собой «взвешенную» сумму двух равновесных бозевских функций распределения:  $n(T)$  — фононов из термостата и  $n(T_e)$  — «горячих» фононов, излучаемых электронами металла. Относительный вес каждого из этих слагаемых определяется величиной  $\varkappa$  ( $0 < \varkappa < 1$ ), которая имеет простой физический смысл, — это эффективная вероятность для фонона, падающего на границу МД со стороны металла, уйти из пленки, не столкнувшись с электронами. Легко показать, что даже в том случае, когда затравочная прозрачность  $\alpha$  мала ( $\bar{\alpha} \ll 1$ ), величина  $\varkappa$  может быть тем не менее порядка единицы, если  $\zeta \equiv d/l \ll \alpha$ . Это значит, что если  $\zeta \ll \alpha$ , то практически все излучаемые электронами фононы, для которых выполняется это условие, несмотря на возможность ряда последовательных отражений от границ раздела внутри пленки, покидают ее (без перепоглощения внутри нее) с вероятностью порядка единицы. В соответствии с этой наглядной трактовкой, из определения (42) легко следует, что  $d\varkappa/d\alpha > 0$  и  $d\varkappa/d\zeta < 0$ , так что эффективная вероятность  $\varkappa$  растет с увеличением  $\alpha$  и падает с ростом толщины пленки. В предельных случаях при  $d \rightarrow 0$  имеем  $\varkappa \rightarrow 1$ , и если  $d \rightarrow \infty$ , то  $\varkappa \rightarrow \alpha$ .

Вернемся теперь к анализу зависимости  $T_e(Q)$ , воспользовавшись выражениями (34) и (35). Из (34) видно, что  $Q$  зависит от  $T_e$  лишь через  $n(T_e)$ . Отсюда легко следует, что  $dQ/dT_e > 0$  и  $d^2Q/dT_e^2 > 0$ , т.е. зависимость  $T_e(Q)$  в общем случае монотонна и «выпукла вверх». Примерный вид этих зависимостей при различных значениях прозрачности одной из границ представлен на рис. 4. Более пологие кривые соответствуют меньшей прозрачности. Переход от закона  $T^4$  к  $T^5$  происходит при  $\varepsilon \sim 1$ . Важной особенностью кривых на рис. 4 является то, что зависимость  $Q \sim T_e^5$ , соответствующая случаю чисто электронного подогрева, лежит на графике ниже остальных кривых (исключая участки, где они практически совпадают). Это означает, что в пределе  $\varepsilon \ll 1$  теплоотвод от пленки наиболее эффективен (минимальное  $T_e$  при данном  $Q$ ), т.е. уже не может быть увеличен за счет улучшения акустического согласования металла и подложки.

Следует отметить, что на эксперименте в ряде случаев [32,34] согласование пленки и подложки оказыва-

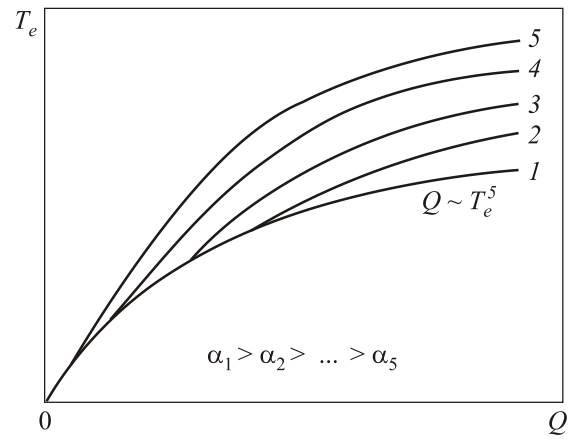


Рис. 4. Схематический вид зависимостей электронной температуры  $T_e$  от величины теплового потока в диэлектрик  $Q$  при различных значениях акустической прозрачности одной из границ МД  $\alpha$ .

ется лучше, чем это следует из теории акустического рассогласования (которой в нашем случае соответствуют участки кривых с  $\varepsilon \gtrsim 2$ ). Для интерпретации таких результатов авторы работ [32,34] используют так называемую модель абсолютно черного тела (АЧТ), не имеющую, вообще говоря, в случае  $\alpha \neq 1$  какого-либо теоретического обоснования. Как следует из сказанного выше, действительно возможен режим, в котором пока  $\varepsilon \ll 1$ , теплоотвод максимален и не зависит от коэффициентов прозрачности. Однако в противоположность модели АЧТ в режиме электронного перегрева величина теплоотвода определяется только параметрами металла, ответственными за величину ЭФВ.

Обратимся теперь к выражению для эффективной прозрачности  $\tilde{\alpha}$  (35). Можно показать, что производные  $d\tilde{\alpha}/d\alpha_1$  и  $d\tilde{\alpha}/d\alpha_2$  больше нуля, так что с увеличением «затравочных» прозрачностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при прочих равных условиях величина эффективной прозрачности растет. Соответственно,  $dQ/d\alpha_1 > 0$ , т.е. при данных  $\alpha_2$  и  $T_e$  величина рассеиваемой мощности растет с ростом прозрачности.

Упомянем еще о зависимости эффективной прозрачности  $\tilde{\alpha}$  от толщины пленки  $d$  (при прочих равных условиях). Легко показать, что  $d\tilde{\alpha}/d\zeta > 0$ , т.е.  $\tilde{\alpha}$  падает с уменьшением толщины пленки. Казалось бы, это противоречит тому, что при  $d \rightarrow 0$  и  $T_e = \text{const}$  все большая доля излучаемых электронами фононов беспрепятственно покидает металл ( $\varkappa \rightarrow 1$ ) и что, на первый взгляд, должно быть связано с ростом (а не уменьшением) эффективной прозрачности  $\tilde{\alpha}$ . На самом деле, конечно, никакого противоречия нет, если учесть, что при  $d \rightarrow 0$  полное число излучаемых электронами фононов уменьшается в меру уменьшения толщины пленки, что при  $T_e = \text{const}$  должно трактоваться как уменьшение  $\tilde{\alpha}$ .

## 4.3. Вычисление нелинейного электросопротивления

Для измерения электронной температуры в нагреваемых током металлических пленках общепринято использовать метод электросопротивления [32]. При этом обычно неявно предполагается, что электроны и фононы в пленке находятся в равновесии друг с другом. Очевидно, что для достаточно тонких пленок основанная на таком предположении термометрия горячих электронов неточна. Действительно, как было показано в п. 4.2, функция распределения фононов в металле неоднородна по толщине пластины и анизотропна (из-за зависимости от величины  $l$ , формула (44)). Поэтому вычисление фононного вклада в нелинейное электросопротивление пленки в отличие от хорошо известного случая рассеяния электронов на равновесных фононах требует специального рассмотрения.

Прежде всего заметим, что на опыте [6] измеряется величина фононного вклада в полное сопротивление пленки  $R_{\text{ph}}^T(E)$ , которое связано с дифференциальной проводимостью  $\sigma_{\text{ph}}^T(z)$  простым образом:

$$R_{\text{ph}}^T / R_i = -\rho_i \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \equiv \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\text{ph}}^T(z) dz, \quad (45)$$

где  $R_i$  и  $\rho_i$  — соответственно остаточное сопротивление и удельное электросопротивление образца ( $\bar{\rho} \ll \rho_i$ ). Таким образом, ниже предполагаем, что доминирующим механизмом релаксации импульса электронов является упругое рассеяние электронов (на примесях, границах кристаллитов и т.д.). При  $T_e \ll \theta_D$  для достаточно тонких пленок именно такая ситуация типична для эксперимента [6].

Пользуясь отмеченной малостью  $\rho_{\text{ph}} \ll \rho_i$ , с помощью стандартных вычислений для величины  $\sigma_{\text{ph}}^T(z)$  можно получить следующее выражение:

$$\sigma_{\text{ph}}^T = -\left(\frac{e\tau}{mE}\right)^2 \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{qE})(\mathbf{pE}) \frac{\partial f}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+\mathbf{q}}, \quad (46)$$

$$B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+\mathbf{q}} = (1 - f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) w_{\mathbf{q}} \left[ N_{\mathbf{q}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \Omega) + (N_{-\mathbf{q}} + 1) \times \right. \\ \left. + f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} \left[ (N_{\mathbf{q}} + 1) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \Omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + N_{-\mathbf{q}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \Omega) \right] \right]. \quad (47)$$

Здесь  $e$ ,  $m$  — заряд и эффективная масса электрона,  $E$  — напряженность электрического поля,  $f_{\mathbf{p}} \equiv f(\varepsilon_{\mathbf{p}}/T_e)$  — равновесная фермиевская функция распределения электронов с температурой  $T_e$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$  — энергия электрона с импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F$  — энергия электрона, отсчитанная от уровня Ферми,  $\Omega = \hbar\omega$  — энергия фонона с частотой  $\omega$ ,  $w_{\mathbf{q}} \equiv \pi\mu^2\omega/\rho s^2$ , а  $N_{\mathbf{q}} \equiv N(\mathbf{q}, z)$  и дается формулами (29) и (32). Отметим, что в общем случае  $\beta_1 \neq \beta_2$ , так что  $N_{\mathbf{q}} \neq N_{-\mathbf{q}}$ .

Выберем систему координат так, что ось  $z$  направлена перпендикулярно границам раздела сред, а ось  $x$  — вдоль вектора  $\mathbf{E}$ . Пусть  $\theta_1$  и  $\varphi_1$  — соответственно полярный и азимутальный углы вектора  $\mathbf{q}$ , а  $\theta_2$  и  $\varphi_2$  — аналогичные углы для вектора  $\mathbf{p}$ . Тогда, переходя в формуле (46) от суммирования к интегрированию, после ряда преобразований можно получить

$$\sigma_{\text{ph}}^T = -\left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 \frac{mcN(0)}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{qD} q^3 dq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{df}{d\xi} \times \\ \times \int_{-1}^{+1} du \int_{-1}^{+1} dv \frac{(uv+v)[N_{\mathbf{q}} + N_{-\mathbf{q}} + f(\Omega+\xi) + f(\Omega-\xi)]}{[(1-u^2)(1-v^2) - (uv+v)^2]^{1/2}}. \quad (48)$$

Величина  $c$  определена соотношением  $w_{\mathbf{q}} = cq$ ,  $v \equiv q/2p_F$ , где  $p_F$  — импульс Ферми,  $u = \cos\theta_1$  и  $v = \cos\theta_2$ . При получении (48) мы воспользовались тем, как показано в работе [13], что

$$I \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \phi\{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\} = \\ = -2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(x) dx}{(1-x^2)^{1/2}}. \quad (49)$$

Здесь  $\phi(x)$  — произвольная четная функция от  $x \equiv \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда, выбирая в качестве  $\phi$   $\delta$ -функции, входящие в выражение для  $B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+\mathbf{q}}$  (47), можно получить формулу (48). Воспользуемся далее тем, что угловая зависимость  $N_{\mathbf{q}}$  связана лишь с величиной  $u$ , и выполним интегрирование по  $v$ . Как показано в [13],

$$K \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv(uv+v)}{[(1-u^2)(1-v^2) - (uv+v)^2]^{1/2}} = -\pi v(1-u^2). \quad (50)$$

Учтем также, что

$$\bar{N}_{\mathbf{q}}(u) + \bar{N}_{-\mathbf{q}}(u) = D(u)[n(T) - n(T_e)] + 2n(T_e), \quad (51)$$

где черта обозначает пространственное усреднение (45), а

$$D(u) \equiv l(u)\tilde{\alpha}(u, d)/d, \quad (52)$$

и величины  $l$  и  $\tilde{\alpha}$  даются соотношениями (44) и (35).

Окончательно выражение для  $\bar{\sigma}$  (45) удобно записать в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\text{ph}}(T_e) + \frac{\pi c N(0) e^2 \tau^2}{(2\pi\hbar)^3 v_F m^2} \int_0^{qD} q^4 \chi_R(q) [n_{T_e}(q) - n_T(q)] dq, \quad (53)$$

где

$$\chi_R(q) \equiv \int_0^1 du (1-u^2) D(u, q). \quad (54)$$

В формуле (53) величина  $\bar{\sigma}$  представлена в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое не зависит явно от параметров прозрачности и представляет собой выражение для проводимости электронов с температурой  $T_e$ , рассеивающихся на равновесных фононах с той же температурой так, что

$$\rho_{\text{ph}}(T_e) = -\rho_i^2 \sigma_{\text{ph}}(T_e) = \eta T_e^5, \quad \eta = \frac{20\pi D_5 c N(0)}{3(2\pi\hbar)^3 n^2 e^2 v_F s^5}. \quad (55)$$

Второе слагаемое в (53) содержит явную зависимость от параметров прозрачности (через величину  $\chi_R(q)$ ). Существенно заметить, что выражение для проводимости  $\bar{\sigma}$  как функции  $T_e$  и параметров прозрачности ((53) и (55)) справедливо при любом соотношении между  $d$  и  $l_{\text{phe}}$ , описывая, как и в случае формул (36) и (37), все «промежуточные» возможности между предельными случаями электронного перегрева ( $\varepsilon \ll 1$ ) и «джоулева» нагрева ( $\varepsilon \gg 1$ ). Однако в общем случае вычисление «формфактора»  $\chi_R(q)$  даже в простейшем случае не зависящих от угла падения фонона затравочных прозрачностей  $\alpha$  не может быть проведено аналитически, а должно выполняться с помощью ЭВМ [6]. Поэтому, мы рассмотрим упомянутые выше два предельных случая, когда вычисление  $\chi_R(q)$  может быть проведено явно.

Рассмотрим вначале случай электронного перегрева ( $\varepsilon \ll 1$ ). Как легко показать, в этом случае  $\chi_R = 4/3$  и простое сравнение формул (53) и (36) дает

$$\delta\rho_{\text{ph}}(E) \equiv \rho_{\text{ph}}^T(E) - \rho_{\text{ph}}^T(E=0) = 4P/3j_0^2, \quad (56)$$

где  $j_0 = nes$  есть характеристика металла. Таким образом, в режиме электронного перегрева ( $\varepsilon \ll 1$ ) связь между экспериментально наблюдаемыми величинами  $\delta\rho_{\text{ph}}(E)$  и  $P$  является линейной, причем величина константы ЭФВ  $\mu$  в этой связи выпадает.

В противоположном предельном случае «джоулева» нагрева ( $\varepsilon \gg 1$ ) связь  $\rho_{\text{ph}}^T(E)$  и  $P$  оказывается более сложной. Считая для простоты, что  $\alpha = \text{const}$ , легко показать, что  $\chi_R(q) = s\tau_{\text{phe}}\alpha/4d \sim q^{-1}$ . Тогда, используя формулы (53) и (36), получаем

$$\rho_{\text{ph}}^T(E) = \rho_{\text{ph}}(T_e) - P/4j_0^2, \quad (57)$$

где  $T_e$  дается формулой Литтла (39), т.е.  $T_e \sim P^{1/4}$ . Учитывая, что в силу (55)  $\rho_{\text{ph}}(T_e) \sim T_e^5$ , получаем, что первый член в (57) пропорционален  $P^{5/4}$ . Наличие в формуле (57) второго слагаемого, пропорционального  $P \sim T^4$ , легко объяснимо с физической точки зрения. Действительно, в режиме «джоулева» нагрева на большей части толщины пленки фононная функция распределения является равновесной с температурой электронов  $T_e$ , так что основной вклад в сопротивление (первый член в формуле (57)) имеет обычный для равновесного случая вид. Однако даже при  $\varepsilon \gg 1$  на рас-

стояниях порядка  $l_{\text{phe}}(T_e)$ , как уже отмечалось, фононная функция распределения остается существенно неоднородной, что и приводит к появлению второго слагаемого в формуле (57). Приведенные соображения показывают, что второй член в (57) по сравнению с первым должен быть мал в меру параметра  $\varepsilon^{-1} \ll 1$ . Более детальная оценка показывает, что асимптотически при  $\varepsilon \gg 1$

$$\frac{P}{4j_0^2} = \frac{\pi^4}{200D_5\varepsilon} \rho_{\text{ph}}(T_e) \sim \frac{1}{50\varepsilon(T_e)} \rho_{\text{ph}}(T_e), \quad (58)$$

Следует, отметить, что, как очевидно из физических соображений, оценку (58) нельзя экстраполировать на случай  $\varepsilon \sim 1$ . Действительно, в интервале значений  $P$ , соответствующих  $\varepsilon(T_e) \sim 1$ , должен происходить переход от зависимости  $\rho_{\text{ph}} \sim P$ , характерной для  $\varepsilon \ll 1$ , к зависимости  $\rho_{\text{ph}} \sim P^{5/4}$ , соответствующей пределу  $\varepsilon \gg 1$ . Поэтому в случае  $\varepsilon \sim 1$  оба слагаемых в формуле (53) должны быть одного порядка.

Как следует из приведенного выше рассмотрения, в режиме электронного перегрева ( $\varepsilon \ll 1$ ) как интегральная зависимость  $Q(T_e)$ , так и спектральное распределение излучаемых пленкой фононов определяются лишь свойствами металла и практически не зависят от характеристик подложки. Итак, в отличие от режима «джоулева» нагрева ( $\varepsilon \gg 1$ ) в случае электронного перегрева нет необходимости в явном учете механизмов отвода тепла от образца и нелинейные по электрическому полю эффекты не маскируются чисто тепловыми. Поэтому результаты соответствующих экспериментов в режиме  $\varepsilon \ll 1$  содержат информацию об ЭФВ в металле. В частности, эксперименты по определению теплового сопротивления границы МД дают возможность оценить такую микроскопическую величину, как  $l_{\text{phe}}(T_e)$  [6]. Не останавливаясь более подробно на обсуждении этих вопросов здесь, сделаем лишь несколько замечаний, относящихся к возможности экспериментальной реализации режима электронного перегрева.

Дело в том, что такая реализация связана не только с формальным соблюдением неравенства  $\varepsilon \ll 1$ . Необходимо также помнить, что критерий  $\varepsilon \ll 1$  выведен в предположении баллистического распространения фононов, излучаемых электронами пленки, т.е. в том случае, когда можно пренебречь потоком так называемых обратных фононов. В случае  $\bar{\alpha} \ll 1$  такое пренебрежение всегда теоретически оправдано. Однако, как это следует из условия (38), режим электронного перегрева наиболее легко реализуем как раз при  $\bar{\alpha} \sim 1$ , а в этом случае наличие даже небольшого числа «обратных» фононов может существенно исказить экспериментальные результаты даже при формальном соблюдении критерия  $\varepsilon \ll 1$ .

Не вдаваясь в теоретическое обсуждение способов уменьшения числа «обратных» фононов, заметим лишь,

что наряду с использованием массивных монокристаллических подложек имеются по крайней мере еще две экспериментальные возможности сведения числа этих фононов к минимуму. Первая из них связана с уменьшением (при прочих равных условиях) ширины изучаемых пленок, чтобы максимально использовать эффект «растекания» тепла в подложку. Вторая возможность связана с применением импульсного нагрева пленок так, чтобы характерные времена возврата к пленке «обратных» фононов были больше длительности импульса (но длительность импульса должна быть все же достаточно велика для реализации стационарного состояния в пленке). В этом случае требования к ширине пленок могут быть существенно ослаблены (по сравнению со случаем стационарного нагрева) из-за отсутствия характерного для последнего теплового «фона».

Простой экспериментальный критерий того, что пленка действительно находится в режиме электронного перегрева, связан с отсутствием скачков наблюдаемых физических величин при переходе температуры гелиевой ванны через  $\lambda$ -точку. Действительно, из того, что в этом режиме физические характеристики электронов металла уже не зависят от затравочной прозрачности  $\alpha$ , следует, что дальнейшее ее улучшение, связанное с переходом к охлаждению пленки сверхтекучим гелием\*, только усилит неравенство  $\varepsilon \ll 1$ . Более того, если упомянутые скачки все же существуют, то их величина может быть мерой «удаленности» от интересующего нас режима.

## 5. Горячие электроны в металлах с произвольным законом дисперсии электронов и фононов

### 5.1. Кинетическое уравнение в терминах спектральной функции

В данном разделе теория горячих электронов в нормальных металлах при низких температурах (таких, что  $\theta \ll \theta_D$ ,  $\theta$  — характерная энергия электронов) формулируется в терминах реальных законов дисперсии электронов и фононов. В случае, когда не выполняются условия применимости температурного приближения [1], для электронов в постоянном электрическом поле при доминирующем упругом рассеянии выводится кинетическое уравнение для зависящей от энергии функции распределения горячих электронов и вычисляется нелинейное электросопротивление.

Исходное кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$\hat{v}_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} + \hat{v}_i n_{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}(\partial n_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}), \quad (59)$$

где  $\hat{v}_i n_{\mathbf{p}}$  — «примесный» интеграл упругих столкновений, приводящих к релаксации импульса (фактическая структура его для дальнейшего несущественна), а

$$\hat{v}_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \equiv \int_0^{\infty} d\omega \sum_{\mathbf{p}'} M(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \times \\ \times \left\{ [n_{\mathbf{p}'}(1-n_{\mathbf{p}})(1+N(\omega)) - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'})N(\omega)] \times \right. \\ \times \delta(\Omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}) + [n_{\mathbf{p}'}(1-n_{\mathbf{p}})N(\omega) - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'}) (1+N(\omega))] \times \\ \left. \times \delta(\Omega + \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) \right\}, \quad (60)$$

есть интеграл столкновений электронов с фононами, ответственный за энергетическую релаксацию электронов. Здесь  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  — энергия электрона с импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $N(\omega) = [\exp(\Omega/T) - 1]^{-1}$  — равновесная функция распределения фононов с температурой  $T$ ,  $\Omega \equiv \hbar\omega$ , а

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \equiv \sum_{\lambda} (2\pi/\hbar) |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 B_{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega),$$

где  $g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}$  — матричный элемент ЭФВ,  $B_{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega)$  — спектральная функция фононов,  $\lambda$  — номер ветви фононного спектра. В пренебрежении затуханием фононов  $B_{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \equiv \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}\lambda})$ , где  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  и  $\omega = \omega(\mathbf{q}, \lambda)$  — закон дисперсии фононов.

В дальнейшем нас будут интересовать такие характерные энергии электронного газа  $\theta \ll \theta_D$ , что доминирующей является упругая релаксация электронов, т.е.  $v_{\text{eph}}^{\varepsilon} \ll v$ , где  $v$  — характерная частота упругих столкновений с полной релаксацией импульса. С одной стороны, это позволяет считать в основном приближении проводимость пленки  $\sigma$  не зависящей от величины поля (область «остаточного» сопротивления). С другой стороны, это же позволяет представить функцию распределения  $n_{\mathbf{p}}$  в виде суммы, зависящей только от энергии части  $n(\varepsilon_{\mathbf{p}})$  и малых анизотропных добавок  $n_{\mathbf{p}}^{(k)}$ , причем  $n_{\mathbf{p}}^{(1)} \ll n(\varepsilon_{\mathbf{p}})$  в меру малости параметра  $\varkappa \equiv eEl/\theta \ll 1$ .

Для получения последовательных приближений к исходной функции  $n_{\mathbf{p}}$  важны следующие два легко проверяемые свойства оператора  $\hat{v}_i$ : а)  $\hat{v}_i n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = 0$ ; б)  $\langle \hat{v}_i n_{\mathbf{p}} \rangle = 0$ , где знак  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по изоэнергетической поверхности

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{N(0)} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_{\mathbf{p}}} \frac{dS_{\mathbf{p}} \dots}{(2\pi\hbar)^3 v_{\mathbf{p}}}, \quad N(0) \equiv \oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} \frac{dS_{\mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^3 v_{\mathbf{p}}}, \quad (61)$$

а  $N(0)$  — плотность электронных состояний с заданным значением спина на поверхности Ферми. Тогда, считая, что  $\hat{v}_{\mathbf{p}} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \ll \hat{v}_i n_{\mathbf{p}}^{(1)}$  (что легко показать, эквивалентно неравенству  $\theta/eEl_{\varepsilon} \ll 1$ , где  $l_{\varepsilon} = l_{\varepsilon}(\theta)$  — характерная длина энергетической релаксации электрона с энергией  $\theta$ ), в первом приближении по параметру  $\varkappa$  имеем

$$\hat{v}_i n_{\mathbf{p}}^{(1)} = ev_i E_i (\partial n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}}). \quad (62)$$

\* Предполагается, что металлическая пленка с одной стороны омывается жидким гелием.



Уравнение второго приближения имеет вид

$$\hat{v}_{\mathbf{p}} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) + \hat{v}_i n_{\mathbf{p}}^{(2)} = ev_k E_k (\partial n_{\mathbf{p}}^{(1)} / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}}). \quad (63)$$

Усредняя его по изоэнергетической поверхности  $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{p}}$  с учетом  $\langle \hat{v}_i n_{\mathbf{p}}^{(2)} \rangle = 0$ , получаем замкнутое (с учетом (62)) уравнение для  $n(\varepsilon_{\mathbf{p}})$

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{p}} n^{(0)} \rangle = \langle ev_k E_k (\partial n_{\mathbf{p}}^{(1)} / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}}) \rangle. \quad (64)$$

Преобразуем сначала правую часть (64), для чего запишем  $n_{\mathbf{p}}^{(1)}$  в виде  $n_{\mathbf{p}}^{(1)} \equiv eE_k \psi_k (\partial n / \partial \varepsilon)$ . Тогда, если аналогично [35] ввести оператор  $\hat{W}\{\dots\} \equiv (\partial n / \partial \varepsilon)^{-1} \hat{v}_i \{\dots \partial n / \partial \varepsilon\}$ , то из (62) имеем  $\psi_k = \hat{W}^{-1} v_k$ , после чего правая часть уравнения (64) сводится к  $e^2 E_i E_k (\partial^2 n / \partial \varepsilon^2) \langle v_k W^{-1} v_i \rangle$ . Здесь учтено, что в силу «остроты»  $\partial n / \partial \varepsilon$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \psi_k \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right) \simeq \psi_k \frac{\partial^2 n}{\partial \varepsilon^2} [1 + O(\theta / \varepsilon_F)],$$

где, как и раньше,  $\theta$  — характерная энергия электронного газа ( $\theta / \varepsilon_F \ll 1$ ). Но  $2e^2 N(0) \langle v_k W^{-1} v_i \rangle = \sigma_{ik}$ , где  $\sigma_{ik}$  — тензор удельной электропроводности для примесного рассеяния (см., например, [35]). Окончательно правая часть (64) оказывается равной  $-\sigma_{ik} E_i E_k (\partial^2 n / \partial \varepsilon^2) / 2N(0)$ .

Вычисление левой части (64), где  $\hat{v}_{\mathbf{p}} n(\varepsilon_{\mathbf{p}})$  дается формулой (60), проводится стандартным образом и приводит к следующему результату:

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{p}} n(\varepsilon) \rangle = I^0(\varepsilon) + I^T(\varepsilon), \quad (65)$$

$$I^0(\varepsilon) = \int_0^{\infty} d\omega S(\omega) \{ [1 - n(\varepsilon)] n(\varepsilon + \Omega) - n(\varepsilon) [1 - n(\varepsilon - \Omega)] \}, \quad (66)$$

$$I^T(\varepsilon) = \int_0^{\infty} d\omega S(\omega) N(\omega) [n(\varepsilon + \Omega) + n(\varepsilon - \Omega) - 2n(\varepsilon)]. \quad (67)$$

Здесь

$$S(\omega) \equiv N(0) \langle \langle M(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \rangle \rangle = \frac{1}{N(0)} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} \frac{dS_{\mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^3 v_{\mathbf{p}}} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} \frac{dS_{\mathbf{p}'}}{(2\pi\hbar)^3 v_{\mathbf{p}'}} M(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \quad (68)$$

— хорошо известная в теории сверхпроводимости [16] спектральная функция электрон-фононного взаимодействия. В записи (65) усредненный электрон-фононный интеграл столкновений представлен для удобства дальнейшего анализа в виде суммы двух слагаемых. Одно из них (66) соответствует процессам, связанным лишь с излучением фононов электронами, и не зависит явно от температуры термостата  $T$ . Другое же слагаемое (67) описывает процессы с участием термостата и обращается в нуль при  $T = 0$ .

### 5.2. Мощность, поглощаемая электронами в сильном электрическом поле

Окончательно нелинейное интегрально-дифференциальное уравнение для зависящей только от энергии функции  $n(\varepsilon)$  приводится к виду

$$-\frac{P}{2N(0)} \frac{\partial^2 n}{\partial \varepsilon^2} = I^0(\varepsilon) + I^T(\varepsilon), \quad (69)$$

где  $P = j_k E_k = \sigma_{ik} E_i E_k$  — мощность, поглощаемая электронами от поля в единице объема. Заметим, что из уравнения (69) легко следует оценка  $P \approx 2N(0)\theta^2 v_{\varepsilon}$  (см. формулу (5)), что эквивалентно оценке  $\theta \approx eEl_D$ , т.е. характерная энергия  $\theta$  набирается электроном на диффузионной длине свободного пробега  $l_D = (l_{\varepsilon})^{1/2}$ , где  $l_{\varepsilon} = l_{\varepsilon}(\theta)$ . Для дальнейшего анализа нам понадобится также выражение для мощности, передаваемой электронами решетке в единице объема в виде явного функционала от  $n(\varepsilon)$ . Так как  $P = -2\Sigma_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (\hat{v}_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}})$ , где  $\xi_{\mathbf{p}} \equiv \varepsilon - \varepsilon_F$  — энергия, отсчитанная от энергии Ферми (а множитель «2» за счет двух ориентаций спина электрона), то вычисления, аналогичные проведенным при получении формул (66) и (67), приводят к следующему результату:

$$P = 2N(0) \int_0^{\infty} d\omega \Omega S(\omega) \times \int_0^{\infty} d\xi [1 - n(\xi)] \{ N(\Omega) n(\xi - \Omega) - [1 + N(\Omega)] n(\xi + \Omega) \}. \quad (70)$$

### 5.3 Нелинейное электросопротивление при низких температурах

Одной из наблюдаемых величин, зависящих, вообще говоря, от  $n(\xi)$  (а в конечном итоге, от  $P$ ) является нелинейная поправка к закону Ома. Поэтому покажем, как получить выражение для полевой зависимости фононного вклада в удельное сопротивление образца  $\rho_{\text{ph}}^T(E)$  в том случае, когда функция распределения  $n(\varepsilon)$  определяется из уравнения (69). Вернемся к уравнению (63). В следующем приближении теории возмущений по параметру  $\alpha \ll 1$  линеаризация оператора  $\hat{v}_{\mathbf{p}}$  по малой добавке  $n_{\mathbf{p}}^{(1)}$  дает уравнение для  $n_{\mathbf{p}}^{(2)}$ , определяющей искомый вклад в  $\rho_{\text{ph}}^T(E)$ :

$$\hat{v}_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^{(2)} = ev_k E_k \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^{(1)}}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} - \hat{v}_{\mathbf{p}} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) - \frac{\delta \hat{v}_{\mathbf{p}}}{\delta n} n_{\mathbf{p}}^{(1)}, \quad (71)$$

где  $\delta \hat{v}_{\mathbf{p}} / \delta n$  — линеаризованный интеграл столкновений электронов с фононами. Искомую добавку к проводимости удобнее вычислять, используя выражение для рассеиваемой мощности

$$\sigma_{kl}^{\text{ph}} E_k E_l = \sum_{\mathbf{p}} ev_k E_k n_{\mathbf{p}}^{(2)}.$$



Легко показать, что первый и второй члены в правой части (71) не дают вклада в ток из-за их антисимметрии по  $\mathbf{p}$ , так что окончательное выражение для  $\sigma_{kl}^{\text{ph}}(E)$  имеет вид

$$\sigma_{kl}^{\text{ph}}(E) = -e^2 \sum_{\mathbf{p}} v_k \hat{v}_i^{-1} \frac{\delta v_{\mathbf{p}}}{\delta n} \hat{v}_i^{-1} v_l \frac{\partial n}{\partial \varepsilon}.$$

Для тензора электросопротивления  $\rho_{kl}^{\text{ph}}(E)$  в силу соотношений  $\rho_{kl} = \rho_{kl}^i + \rho_{kl}^{\text{ph}}$  и условия  $\rho^{\text{ph}}(E) \ll \rho^i$  имеем окончательно

$$\rho_{kl}^{\text{ph}}(E) = -\rho_{km}^i \sigma_{mp}^{\text{ph}}(E) \rho_{pl}^i, \quad (72)$$

где  $\rho^i$  — остаточное электросопротивление. Дальнейшее рассмотрение проведем в приближении времени релаксации, когда  $\hat{v}_i^{-1} = \tau$  ( $\tau$  — время релаксации), и ограничимся для простоты случаем кубических кристаллов, когда тензор проводимости вырождается в скаляр (хотя поверхность Ферми не обязательно сфера). Тогда с помощью простых (хотя и громоздких) вычислений получаем для удельного электросопротивления  $\rho_T^{\text{ph}}(E)$ , обусловленного рассеянием горячих электронов на фононах, формулу, которую удобно представить в виде (сравни с [35], с. 203)

$$\rho_T^{\text{ph}}(E) = \frac{3(2\pi\hbar)^3}{2e^2 S_F v} \tau_{\text{eph}}^{-1}. \quad (73)$$

Здесь  $S_F$  — площадь поверхности Ферми,  $v$  — средняя по поверхности Ферми скорость электрона

$$v \equiv (2\pi\hbar)^3 N(0) \langle v_p^2 \rangle / S_F, \quad (74)$$

а знак  $\langle \dots \rangle$  понимается в прежнем смысле (формула (61)),  $\tau_{\text{eph}}$  — транспортное время релаксации горячих электронов

$$\tau_{\text{eph}}^{-1}(E) \equiv 3 \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) [N_T(\Omega) - R(\Omega)], \quad (75)$$

$$R(\Omega) \equiv \int_0^{\infty} d\xi \frac{dn}{d\xi} [n(\Omega + \xi) + n(\Omega - \xi)]. \quad (76)$$

Здесь  $n(\xi)$  — функция распределения горячих электронов, даваемая решением уравнения (69),  $N_T(\Omega) \equiv N_T(\Omega/T)$ , где  $N(x) = (e^x - 1)^{-1}$  — бозевская равновесная функция. Величина  $g(\omega)$  — известная «транспортная» спектральная функция

$$g(\omega) \equiv N(0) \langle \langle (v_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}'})^2 M(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \rangle \rangle / \langle v_p^2 \rangle. \quad (77)$$

Легко проверить, что в равновесном случае ( $E = 0$ ,  $T = \text{const}$ )

$$R(\Omega) \equiv R_T(\Omega) = \frac{d}{d\Omega} [\Omega N_T(\Omega)]$$

и для  $\tau_{\text{eph}}^{-1}$  имеем обычное выражение

$$\tau_{\text{eph}}^{-1}(E) = \frac{3}{T} \int_0^{\infty} d\omega \Omega g(\omega) N_T(\Omega) [N_T(\Omega) + 1]. \quad (78)$$

В дальнейшем удобнее рассматривать не  $\rho_{\text{ph}}^T(E)$ , а величину  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E) = \rho_{\text{ph}}^T(E) - \rho_{\text{ph}}^T$ , представляющую собой приращение фоновой вклада в удельное электросопротивление за счет внешнего электрического поля  $E$ , так что  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E = 0) = 0$ . Тогда

$$\delta\rho_{\text{ph}}^T(E) = \frac{3(2\pi\hbar)^3}{2e^2 S_F v} \frac{1}{\tilde{\tau}}, \quad (79)$$

где

$$\tilde{\tau}^{-1} = 3 \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) [R_T(\Omega) - R(\omega)], \quad (80)$$

а величина  $R_T(\Omega)$  определена выше.

Итак, в общем случае, когда не выполняется критерий термализации  $v_{\text{eph}}^e \ll v_{ee}$ , т.е. преобладающими в формировании функции распределения горячих электронов  $n(\xi)$  являются электрон-фононные столкновения, схема для вычисления нелинейной по полю добавки к фоновому вкладу в удельное электросопротивление  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  такова: из нелинейного интегродифференциального уравнения (69) находим  $n(\xi)$ . С помощью формулы (76) вычисляем  $R(\Omega)$ . Наконец, вычисление интеграла (80) дает искомым ответ. Естественно, что при заданных конкретных функциях  $g(\omega)$  и  $S(\omega)$  такая схема может быть реализована лишь в результате численных расчетов. Результаты таких расчетов для простейшей модели были описаны в п. 3.4). Там было показано, что даже в отсутствие межэлектронных столкновений функция распределения горячих электронов незначительно отличается от равновесной фермиевской с эффективной температурой  $\theta = \theta(P, T)$ , находимой из уравнения теплового баланса (69), в котором положено  $n(\xi) = f(\xi/\theta)$ , где  $f(x) = (e^x + 1)^{-1}$  — равновесная фермиевская функция. Вычисленная по указанной выше процедуре точная полевая зависимость  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  (с истинной  $n(\xi)$ ) с высокой точностью (расхождение меньше 1%) совпадает с ее приближенным значением, вычисляемым по формуле (79) с той же аппроксимирующей функцией  $n(\xi) = f(\xi/\theta)$ . Поэтому можно надеяться, что температурное приближение, использованное первоначально в [1,2] и теоретически обоснованное лишь в случае выполнения критерия термализации, может иметь более широкую область применимости. Поэтому ниже мы приведем краткий анализ тех выводов, который можно получить в температурном приближении из общих соотношений (70) и (80).

Легко показать прямым вычислением, что если  $n(\xi) = f(\xi/\theta)$  и  $\theta$  имеет теперь смысл температуры

горячих электронов, то соотношение (70) превращается в уравнение для нахождения  $\theta$

$$P = 2N(0) \int_0^{\infty} d\omega \Omega^2 S(\omega) [N_{\theta}(\Omega) - N_T(\Omega)], \quad (81)$$

где  $N_{\theta}(\Omega) \equiv N(\Omega/\theta)$ , а  $N$  — равновесная бозевская функция. В частности, если при  $\omega \ll \omega_D$ , можно аппроксимировать величину  $S(\omega)$  простой зависимостью  $S = A\omega^n$ , где  $n > 0$  не обязательно целое,  $A$  — константа, то из (81) легко получаем простое соотношение, связывающее  $P$ ,  $\theta$  и  $T$  с характеристиками металла  $N(0)$  и величиной  $A$ :

$$P = \frac{2AN(0)D_{n+3}}{\hbar^{n+1}} (\theta^{n+3} - T^{n+3}), \quad (82)$$

где

$$D_n = \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1} dz}{e^z - 1} = \Gamma(n)\zeta(n)$$

и  $\Gamma(n)$  — гамма-функция Эйлера,  $\zeta(n)$  — дзета-функция Римана.

Величина  $\tilde{\tau}_{\text{eph}}^{-1}(\theta)$  в температурном приближении оказывается равной

$$\tilde{\tau}_{\text{eph}}^{-1}(\theta) = 3 \int_0^{\infty} d\omega \Omega \frac{dg}{d\Omega} [N_{\theta}(\Omega) - N_T(\Omega)]. \quad (83)$$

Сопоставление формул (82) и (83) указывает на любопытную возможность линейной связи в режиме электронного перегрева между экспериментально наблюдаемыми величинами  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  и  $P$  при произвольных  $S(\omega)$ , если предположить, что в общем случае при  $\omega \ll \omega_D$  между  $g(\omega)$  и  $S(\omega)$  имеется связь вида  $g(\omega) \sim \omega^2 S(\omega)$ . Такая связь в случае обычного когерентного рассеяния электронов на фононах хорошо известна: появление в транспортной спектральной функции  $g(\omega)$  дополнительного множителя  $\omega^2$  перед  $S(\omega)$  связано с известной неэффективностью рассеяния электронов на фононах при  $\omega \ll \omega_D$  — рассеяние происходит лишь на малые углы. Замечая также, что в силу условия  $T, \theta \ll \theta_D$  основной вклад в интегралы (82) и (83) вносит область частот  $\omega \ll \omega_D$ , снова аппроксимируем  $S(\omega)$  степенным выражением  $S(\omega) = A\omega^n$ . Тогда  $g(\omega) = B\omega^{n+2}$  и легко получить искомую линейную связь  $\delta\rho_{\text{ph}}(E) = \lambda P$ , где

$$\lambda^{-1} = \frac{A}{(n+2)B} \left[ \frac{2}{3} e\hbar N(0) \right]^2 \langle v_{\mathbf{p}}^2 \rangle. \quad (84)$$

Любопытно также, что при сделанных предположениях величина  $\lambda$  не зависит от температуры термостата  $T$  при любых  $\theta > T$ . Если же отказаться от исходного предположения  $g(\omega) \sim \omega^2 S(\omega)$ , то связь  $\delta\rho_{\text{ph}}(E)$  и  $P$ , вообще говоря, уже не будет линейной. Наконец, заметим еще, что, как это следует из формулы (82), вели-

чина  $\delta\rho_{\text{ph}}^T(E)$  при достаточно больших  $P$  перестает зависеть от температуры термостата  $T$  в меру малости параметра  $(T/\theta)^n \ll 1$ .

Упомянем еще случай, когда справедливость температурного приближения обеспечена выполнением условия  $v_{ee} \gg v_{\text{eph}}^e$ . Естественно, что общая формула (81) остается справедливой, ибо за энергетическую релаксацию ответственны электрон-фононные столкновения. Межэлектронные столкновения в этом случае с одной стороны обеспечивают «фермизацию»  $n(\xi)$ , а с другой — формируют полевую зависимость электросопротивления. Снова, если  $S(\omega) \sim \omega^n$ , то предполагая еще  $(T/\theta)^{3+n} \ll 1$  в соответствии с (82) имеем  $P \sim \theta^{n+3}$ , а так как  $\delta\rho_{ee} \sim \theta^2$ , то окончательно  $\delta\rho_{ee}(E) \sim P^{2/(n+3)}$ . Наконец, в силу того, что при низких температурах величина  $v_{\text{eph}}^e(\theta)$  может на несколько порядков превышать частоту релаксации импульса электрона на фононах  $v_{\text{eph}}^p(\theta) \equiv \tau_{\text{eph}}^{-1}$  (см. формулу (78)), то возможен и промежуточный случай, когда  $v_{\text{eph}}^p \ll v_{ee} \ll v_{\text{eph}}^e$ , т.е. критерий термализации не выполнен, но  $\delta\rho(E)$  формируется межэлектронными столкновениями.

#### 5.4. Туннелирование горячих электронов

Пусть металлическая пленка с горячими электронами является одним из электродов такого туннельного перехода, в котором однородный транспортный ток, создающий горячие электроны, течет в плоскости перехода. Тогда, как следует из анализа функции распределения фононов вне электрода с горячими электронами, второй электрод имеет температуру термостата  $T$ , если выполнено неравенство  $\epsilon \ll 1$  (где  $\epsilon$  дается соотношением (38)). Теперь возникает вопрос о связи вольт-амперной характеристики такого туннельного перехода с функцией распределения горячих электронов, которая в общем случае дается уравнением (69).

Легко показать, что если металл второго электрода также находится в нормальном состоянии, то туннельный ток такого перехода не зависит от величины транспортного тока и равен  $I_{NN} = CeV$ , где  $C$  — известная константа [36],  $e$  — заряд электрона, и  $V$  — напряжение на переходе. Однако, если металл второго электрода находится в сверхпроводящем (S) состоянии, то ВАХ такого перехода зависит от величины транспортного тока. Для того чтобы найти эту зависимость, мы предположим для простоты, что плотность состояний электронных возбуждений в сверхпроводящем электроде описывается формулой БКШ [36]. Тогда, предполагая еще, что возмущение  $n_{\gamma}(\xi)$ , связанное с протеканием туннельного тока, является незначительным, можно сразу написать общее выражение для туннельного тока

$$I_{NS} = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| d\xi}{(\xi^2 - \Delta^2)^{1/2}} \left[ f\left(\frac{\xi}{T}\right) - n_{\gamma}(\xi + eV) \right]. \quad (85)$$

Здесь  $\Delta = \Delta(T)$  — энергетическая щель  $S$  электрода,  $f(\xi)$  — равновесная функция распределения Ферми,  $n_\gamma(\xi)$  — функция распределения горячих электронов, где символ  $\gamma$  обозначает различные решения уравнения (69), соответствующие различным значениям мощности  $P$ ; и  $C$  есть та же константа, фигурирующая в выражении для  $I_{NS}$ .

Переход от  $n(\xi)$  к  $\varphi(\xi)$  по формуле  $n = (1 + \varphi)/2$ , где  $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ , приводит к более симметричной форме соотношения (85):

$$I_{NS} = \frac{C}{2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - \Delta^2)^{1/2}} [\varphi(\xi - eV) - \varphi(\xi + eV)]. \quad (86)$$

Формулы (85) и (86) позволяют вычислить ВАХ, если решения уравнения (69) известно. Именно в таком туннельном эксперименте наиболее вероятно наблюдать предсказанную в [11] разницу в асимптотическом поведении для  $\xi/\theta > 3$  между  $n(\xi)$  и ее температурной аппроксимацией  $f(\xi/\theta)$  для простейшей модели металла с изотропным и квадратичным законом дисперсии [11] в случае сильного перегрева, когда  $(\theta/T)^5 \gg 1$ . В работе [11] было показано (см. формулу (15)), что вместо обычного асимптотического поведения, характерного для равновесной фермиевской функции типа  $\exp(-x)$ , величина  $n(x)$  имеет специфическую асимптотику, представленную формулой (15), которая дает гораздо более быстрое убывание при больших  $x$ , чем равновесная функция. Насколько известно автору, подобные эксперименты еще не проводились.

В случае, если справедливо температурное приближение с электронной температурой, даваемой уравнением (81), то можно получить, что

$$I_{NS} = 2C\Delta(T) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_1(n\Delta(T)) \operatorname{sh}(neV/\theta). \quad (87)$$

Эта формула дает возможность различать случай обычного «джоулевого» нагрева туннельного перехода транспортным током от случая нагрева одного из электродов в режиме горячих электронов. Отметим, что в последнем случае величина  $\theta$  растет с ростом транспортного тока, тогда как  $T$  и  $\Delta(T)$  остаются постоянными. В случае обычного нагрева температура излученных фононов равна  $\theta$  и, следовательно, температура сверхпроводящего электрода также равна  $\theta$ . Таким образом, в случае «джоулевого» нагрева током  $\Delta = \Delta(\theta)$  в формуле (87) и ВАХ перехода не отличается от известного выражения [36] для ВАХ обычного туннельного перехода при температуре  $\theta$  с единственной разницей в зависимости  $\theta$  от  $P$ , которая дается формулой Литтла (39).

## 6. Заключение

Концепция горячих электронов в металлах, первоначально предложенная в теоретических работах школы И.М. Лифшица [1,2], за последние годы не претерпела существенных изменений. Эти работы по теплообмену между электронами и фононами с различными температурами оказали решающее влияние на мои последующие работы в этой области. Авторы работ [1,2], однако, не рассматривали экспериментальные возможности стационарного нагрева электронов. В частности, в связи с тем, что вычисления, выполненные в работах [1,2], ограничивались рассмотрением пространственно однородного случая, в этих работах не обсуждалась проблема отвода тепла от образца и связанный с этим вопрос о влиянии размеров образца на экспериментальную реализацию режима горячих электронов.

Дальнейшее уточнение и развитие этих представлений применительно к поведению электросопротивления металлических пленок при низких температурах обсуждалось мною в работах [11–14] на постоянном токе и впоследствии в других близких нестационарных задачах в соавторстве с А.И. Безуглым в обзоре [21]. Фактически данный обзор основан на теоретических статьях автора [11–14], не обсуждавшихся подробно в [21], однако не потерявших своей актуальности до настоящего времени, так как в них концепция горячих электронов в металлах была обобщена на металлы с произвольными законами дисперсии для электронов и фононов и используется в наших последних работах по горячим электронам (работы [68,70,72] в обзоре [21]).

Сформулируем ниже основные результаты разделов 2–5 обзора.

1. В разд. 2 рассмотрены горячие электроны в сверхпроводящих (СП) пленках. Обсужден гистерезис критического тока, динамика СП пленок вблизи критического тока при облучении фотонами, влияние теплоотвода на неустойчивость Ларкина–Овчинникова в СП пленках. Отмечается, что дальнейшие экспериментальные работы по наблюдению гистерезиса критического тока [5] и выяснению роли горячих электронов в задаче об аномальной прозрачности границы металл–диэлектрик [6], предсказанной в работе [7], были проведены в отделе И.М. Дмитренко. В 1992 г. в этом же отделе была сделана первая экспериментальная работа [9] по подтверждению выводов часто цитируемой теоретической статьи [10] о влиянии теплоотвода на неустойчивость Ларкина–Овчинникова течения вихрей в сверхпроводящих пленках.

2. В разд. 3 показано [11,12], что даже в отсутствие межэлектронных столкновений функция распределения горячих электронов в металлической пленке в характерной области энергий электрона незначительно отличается от фермиевской с некоторой эффективной, зависящей от величины электрического поля, темпера-

турой  $T$  (см. формулу (5) разд. 3), а нелинейная добавка к электросопротивлению практически не отличается от таковой, рассчитанной в температурном приближении. Поэтому температурное приближение, первоначально теоретически обоснованное лишь в случае выполнения критерия термализации, когда частота межэлектронных столкновений значительно больше частоты электрон-фононных столкновений (см. начало разд. 3), в исследуемой ситуации имеет более широкую область применимости.

3. В разд. 4, посвященном подробному анализу размерного эффекта в теплоотдаче металлических пленок и их нелинейного электросопротивления при низких температурах [13], показано, что для электронов с квадратичным законом дисперсии, взаимодействующих с дебаевскими фононами, получены замкнутые выражения для экспериментально наблюдаемых величин рассеиваемой мощности  $Q(T_e)$  и электросопротивления  $R_{ph}(T_e)$  при произвольных соотношениях между толщиной пленки  $d$  и  $l = l(T_e) = \alpha l_{ph}(T_e)$ , где  $\alpha$  — вероятность прохождения фонона через границу (МД),  $l_{ph}(T_e)$  средняя длина свободного пробега фонона по отношению к рассеянию на электронах с температурой  $T_e$ . Полученные результаты показывают, что даже в режиме джоулева нагрева  $d \gg l(T_e)$  зависимость  $R_{ph}(T)$  не сводится к равновесной (с температурой  $T$ ), а содержит пропорциональную  $(l/d) \ll 1$  добавку, связанную с неоднородностью фононной функции распределения в пленке на длине  $l_{ph}(T_e)$ . Эти результаты позволяют обосновать термометрию электронов в нагреваемых током металлических пленках. Здесь же *предсказан размерный эффект* в теплоотдаче и нелинейном электросопротивлении нагреваемых током металлических пленок, связанный со специфической ролью электронов в формировании теплового сопротивления границы металл–диэлектрик (МД), а также *сформулировано представление о двух предельных (в изучаемой ситуации) режимах теплоотвода*. Так, если  $d \gg l$ , то реализуется *обычный джоулев нагрев*, когда скачок температуры на границе пленка–подложка зависит от ее акустической прозрачности (и не зависит от электронных характеристик металла). Если  $d \ll l$ , то возможна реализация *режима электронного перегрева*, в котором решетка практически не нагревается, а нелинейные по напряженности электрического поля эффекты определяются только свойствами металла и не зависят от величины  $\alpha$ . Свойства подложки из величины температурного скачка между электронами и решетки выпадают.

4. В разд. 5 теория горячих электронов формулируется для реальных законов дисперсии электронов и фононов [14] в терминах известных спектральных функций  $S(\omega) \equiv \alpha^2(\omega)F(\omega)$  и  $g(\omega) \equiv \alpha_{tr}^2(\omega)F(\omega)$ . Так как в режиме электронного перегрева (в отличие от джоулева нагрева) спектральное распределение излучаемых пленкой фононов определяется только харак-

теристиками электронов металла, то это открывает возможность для диагностики ЭФВ металлических пленок. Поэтому в работе [21] предложено использовать фоннную спектрометрию теплового излучения из нагреваемых током пленок для экспериментального определения  $S(\omega)$  в кинетическом ( $\omega \ll \omega_D$ ) интервале энергий. В этом разделе также теоретически обсуждается туннелирование горячих электронов и показано, что если металл второго электрода находится в сверхпроводящем ( $S$ ) состоянии, то ВАХ такого перехода зависит от величины транспортного тока, создающего горячие электроны.

5. Перегрев электронов является причиной теплового гистерезиса критического тока в длинных сверхпроводящих пленках [4], неустранимого даже при идеальном акустическом согласовании пленки и подложки ( $\alpha = 1$ ). См. также работы [3,5,37].

6. Основные теоретические результаты этого обзора уже получили убедительное экспериментальное подтверждение (размерный эффект и горячие электроны при низких температурах в работе [38], гистерезис критического тока в режиме электронного перегрева в работах [5,37]).

Автору особо хочется поблагодарить К.В. Маслова за неизменную доброжелательность и плодотворное сотрудничество в работах [11,12], а также А.А. Моторную за выполнение нестандартных и трудоемких численных расчетов на ЭВМ в этих работах. Отдельные результаты теоретических работ, представленных в обзоре, в свое время обсуждались автором с А.Ф. Андреевым, Г.Н. Гольцманом, Р.Н. Гуржи, И.М. Дмитренко, М.И. Кагановым; автор обзора весьма признателен за проявленные при этом внимание и интерес к работе. Я также благодарен за поддержку исследовательской и инновационной программе Марии Скловдовской-Кюри (грант 644348 (MagIC)) в рамках ЕС Горизонт 2020.

1. М.И. Каганов, И.М. Лифшиц, Л.В. Танатаров, *ЖЭТФ* **31**, 232 (1956).
2. М.И. Каганов, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **33**, 1261 (1957).
3. В.А. Шкловский, *ФТТ* **17**, 3076 (1975).
4. И.И. Еру, С.А. Песковацкий, А.В. Поладич, *ФТТ* **15**, 1599 (1973).
5. В.Г. Волоцкая, Л.Е. Мусиенко, И.М. Дмитренко, Ю.В. Калекин, *ФНТ* **2**, 500 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 248 (1976)].
6. В.Г. Волоцкая, В.А. Шкловский, Л.Е. Мусиенко, *ФНТ* **6**, 1033 (1980) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **6**, 503 (1980)].
7. В.А. Шкловский, *Письма в ЖЭТФ* **26**, 679 (1977).
8. И.М. Дмитренко, *ФНТ* **22**, 849 (1996) [*Low Temp. Phys.* **22**, 648 (1996)].
9. В.Г. Волоцкая, И.М. Дмитренко, О.Г. Корецкая, Л.Е. Мусиенко, *ФНТ* **18**, 973 (1992) [*Low Temp. Phys.* **18**, 683 (1992)].



10. A.I. Bezuglyj and V.A. Shklovskij, *Physica C* **202**, 234 (1992).
11. К.В. Маслов, В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **71**, 1514 (1976).
12. К.В. Маслов, В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **78**, 1221 (1980).
13. В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **78**, 1281 (1980).
14. V.A. Shklovskij, *J. Low Temp. Phys.* **41**, 375 (1980).
15. A.W. Little, *Can. J. Phys.* **37**, 334 (1959).
16. D.J. Scalapino, in: *Superconductivity*, R.D. Parks and Marcel Dekker (eds.), New York (1969), p. 449.
17. A.D. Semenov, G.N. Gol'tsman, and R. Sobolewski, *Supercond. Sci. Technol.* **15**, R 1-R 16 (2002).
18. N. Perrin and C. Vanneste, *Phys. Rev. B* **28**, 5150 (1983).
19. A.D. Semenov, R.S. Nebosis, Yu.P. Gousev, M.A. Heusinger, and K.F. Renk, *Phys. Rev. B* **52**, 581 (1995).
20. Е.М. Гершензон, М.Е. Гершензон, Г.Н. Гольцман, А.Д. Семенов, А.В. Сергеев, *ЖЭТФ* **86**, 758 (1984).
21. А.И. Безуглый, В.А. Шкловский, *ФНТ* **42**, 809 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 636 (2016)].
22. A.D. Semenov, G.M. Gol'tsman, and A.A. Korneev, *Physica C* **351**, 349 (2001).
23. А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **68**, 1915 (1975).
24. Л.Е. Мусиенко, И.М. Дмитренко, В.Г. Волоцкая, *Письма в ЖЭТФ* **31**, 603 (1980).
25. W. Klein, R.P. Huebener, S. Gauss, and J. Parisi, *J. Low Temp. Phys.* **61**, 413 (1985).
26. Б.И. Давыдов, *ЖЭТФ* **7**, 1069 (1937).
27. Э. Конуэлл, *Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях*, Мир, Москва (1970).
28. В.П. Шабанский, *ЖЭТФ* **31**, 657 (1956).
29. Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, Мир, Москва (1965).
30. J. Vardeen and D. Pines, *Phys. Rev.* **99**, 1140 (1955).
31. *Физика фононов больших энергий*, сб. статей, Мир, Москва (1976).
32. J.D.N. Cheeke, V. Hebral, and C. Martinon, *De Physique J.* **34**, 257 (1973).
33. А.Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **43**, 1535 (1962).
34. Р. Гутфельд, *Распространение тепловых импульсов*, в кн.: *Физическая акустика*, У. Мэзон (ред.), Мир, Москва (1973), т. 5, с. 267.
35. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
36. P. Douglass and L. Falikov, *Progr. Low Temp. Phys.* **4**, New York (1964), p. 97.
37. W.J. Skocpol, *Nonequilibrium Effects in 1D Superconductors. Nonequilibrium Superconductivity. Phonons and Kapitza Boundaries*, K.S. Gray (ed.), Plenum, N.Y. (1981), p. 559.
38. M.L. Roukes, M.K. Preeman, R.S. Germain, R.C. Richardson, and M.B. Ketchen, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 422 (1985).

## Hot electrons in metal films at low temperatures (Review Article)

V.A. Shklovskij

The paper reviews the works appeared during the interaction of the author with the department headed by Igor Mikhajlovich Dmitrenko in period of time from 1975 till 1992 years. Within the framework of kinetic equations for the phonon and electron distribution functions are considered the hot electrons at low temperatures in metal films deposited on dielectric substrates with high thermal conductivity. The brief analysis of main results about the hot electrons in a superconducting films, the heat removal problem from a sample, the form of the hot electron distribution function for the case when the conditions of thermalization are not satisfied, the size effect in the heat removal from metal films, the tunneling of the hot electrons, and generalization of the presented results on the metals with arbitrary dispersion laws of electrons and phonons in terms of the spectral functions of Eliashberg.

PACS: 73.40.Gk Tunneling;  
73.50.-h Electronic transport phenomena in thin films.

Keywords: metal films, DC heating, electron-phonon kinetics.