УДК 517 . 929 . 7

УСЕРЕДНЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ВИЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул Терещенківська, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

Я. Й. Бігун

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул.Університетська, 28
e-mail: bigun@math.chdu.cv.ua

A method of averaging in the phase variables is substantiated for oscillation resonance systems, with a delay, defined on a bounded interval or a semiaxis. Error estimates depending on the small parameter are obtained for the averaging method.

Для коливних резонансних систем із запізненням на скінченному відрізку і на півосі обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними. Одержано оцінки похибки методу, явно залежні від малого параметра.

Проблема обґрунтування методу усереднення для багаточастотних систем звичайних диференціальних рівнянь вищого наближення досліджувалась в [1–3]. Асимптотичні наближення для розв'язків систем із повільно змінним обмеженим запізненням у резонансному випадку побудовано в [4, 5]. Метод усереднення для систем вищого наближення із $m,\ m \geq 1$, частотами, залежними від „повільного часу” $\tau = \varepsilon t$ (ε — малий додатний параметр), обґрунтовано в [6].

У даній роботі розглядається система з повільними і швидкими змінними вищого наближення, вектор частот якої залежить і від повільних змінних. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка ґрунтується на оцінках відповідних осциляційних інтегралів [7]. Метод оцінок осциляційних інтегралів для дослідження коливних резонансних систем, запропонований у [8], набув свого розвитку в [2].

1. Постановка задачі і припущення. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $L = \mathrm{const} > 0$, $\tau \in [0, L] = I$, функції λ, σ, τ: $I \to I$, причому $\lambda(\tau) \leq \tau$, $\sigma(\tau) \leq \tau$ і $\theta(\tau) \leq \tau$; $r \geq 0$ і $m \geq 1$ — цілі числа.

Розглянемо систему, яку називають [2, 3] системою вищого наближення:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^{\nu} \boldsymbol{X}^{(\nu)}(\tau, x, x_\lambda) + \varepsilon^{r+1} \boldsymbol{X}(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, x, x_\sigma)}{\varepsilon} + \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^{\nu-1} \boldsymbol{Y}^{(\nu)}(\tau, x, x_\lambda) + \varepsilon^{r} \boldsymbol{Y}(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon).\end{gathered} \tag{1}$$

Тут $x, x_\lambda \in D$, $\varphi, \varphi_\theta \in \mathbb{R}^m$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda(\tau))$, $x_\sigma(\tau) = x(\sigma(\tau))$. Вектор-функція $A = [X(\tau, x, z, u, v, \varepsilon), Y(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)]$ 2π-періодична за змінними u_ν, v_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, $Y^0(\tau, x, z) \equiv 0$.

Відповідна (1) усереднена за швидкими змінними на кубі періодів система набирає вигляду

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{x}}{d\tau} &= \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^\nu X^{(\nu)}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda) + \varepsilon^{r+1} X_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \\
\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\sigma)}{\varepsilon} + \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^{\nu-1} Y^{(\nu)}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda) + \varepsilon^r Y_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Введемо такі позначення: $A^{(\nu)} = [X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}]$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$; $A_0 = [X_0, Y_0]$, $C^l_{x,z}(G, a)$ — простір неперервно диференційовних за змінними x, z до порядку l включно функцій для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в області $G = I \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$, обмежених разом із частинними похідними в цій області сталою $a > 0$. Якщо $x \in \mathbb{R}^n$, то $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Нехай виконуються такі умови:

1°. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вектор-функції A, $A^{(\nu)}$, $A_0 \in C^1_u(G, a_1)$, $\omega \in C^p_{\tau, x, x_\sigma}(G_1, a_2)$, де $u = (\tau, x, z, \varphi, \varphi_\theta)$, $G_1 = I \times D \times D$, p — деяке ціле число, $p \geq 2m - 1$.

2°. Функції $\lambda \in C^1(I, a_3)$, $\sigma \in C^p(I, a_3)$, $\theta \in C^{p+1}(I, a_3)$,

$$
\left| \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right| \geq a_4^{-1} > 0, \qquad \tau \in I.
$$

Будемо вважати, що аналогічні нерівності із сталою a_4 виконуються і для функцій $\sigma(\tau)$ і $\theta(\tau)$.

3°. Існує єдиний розв'язок системи першого наближення для повільних змінних

$$
\frac{d\xi}{d\tau} = X^{(0)}(\tau, \xi, \xi_\lambda), \qquad \tau \in I, \tag{3}
$$

$\xi(0) = x_0 \in D$, який належить області D разом із деяким ρ-околом.

4°. Для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)$ вздовж розв'язку системи першого наближення (3) справджується нерівність

$$
\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0} \left[\sup_{G_2} \|A_{kl}\| + \big(\|k\| + a_4\|l\|\big)^{-1} \left(\sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau} \right\| + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x} \right\| + a_3 \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda} \right\| \right) \right] \leq a_5, \quad G_2 = I \times (0, \varepsilon_0].
$$

5°. На проміжку I визначено матрицю $(V^T(\tau)V(\tau))^{-1}V^T(\tau)$. Тут $V(\tau)$ — $(p \times 2m)$-вимірна матриця з елементами

$$
V_{ij}(\tau) = \frac{d^{i-1}}{d\tau^{i-1}} (\omega_j(\tau, \xi(\tau), \xi(\sigma(\tau)))),
$$

$$V_{im+j}(\tau) = \frac{d^{i-1}}{d\tau^{i-1}}\left(\omega_j\big(\theta(\tau), \xi_\theta(\tau), \xi_\theta(\sigma(\tau))\big)\frac{d\theta}{d\tau}\right), \quad j = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, p+1.$$

Покажемо, що при виконанні зазначених умов для досить малого $\varepsilon_0 > 0$ справджується оцінка

$$\eta(\tau,\varepsilon) \equiv \|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,\varepsilon)\| + \varepsilon\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^q \qquad \forall\,(\tau,\varepsilon) \in I \times (0,\varepsilon_0], \tag{4}$$

де $c_1 = \mathrm{const} > 0$, $q = r + 1 + 1/p$, $x(0,\varepsilon) = \overline{x}(0,\varepsilon)$, $\varphi(0,\varepsilon) = \overline{\varphi}(0,\varepsilon)$.

2. Система першого наближення. Для системи (2) існує $\tau_1(\varepsilon) \in (0, L]$ таке, що для будь-якого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ на півінтервалі $[0,\tau_1)$ визначено розв'язок $[\overline{x}(\tau,\varepsilon), \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)]$. За умовою 1° для $\varepsilon_0 \le 0,5$ і $\overline{x}(0,\varepsilon) = \xi(0)$

$$\|\overline{x}(\tau,\varepsilon) - \xi(\tau)\| \le a_1\int_0^\tau (\|\overline{x}(s,\varepsilon) - \xi(s)\| + \|\overline{x}_\lambda(s,\varepsilon) - \xi_\lambda(s)\|)ds + 2a_1\tau\varepsilon \le$$

$$\le a_1(1+a_4)\int_0^\tau \|\overline{x}(s,\varepsilon) - \xi(s)\|ds + 2a_1\tau\varepsilon.$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла одержуємо

$$\|\overline{x}(\tau,\varepsilon) - \xi(\tau)\| \le c_2\varepsilon, \tag{5}$$

де $c_2 = 2a_1 L\exp[a_1(1+a_4)L]$.

Якщо $\varepsilon_0 = \min(0,5;\varepsilon_1)$, де $2c_2\varepsilon_1 \le \rho$, то $\tau \ge L$ і для будь-яких $(\tau,\varepsilon) \in I \times (0,\varepsilon_0]$ розв'язок $\overline{x}(\tau,\varepsilon)$ належить D разом із $\rho/2$-околом.

3. Обґрунтування методу усереднення на I.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $1^\circ - 4^\circ$. *Тоді існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що для будь-яких* $(\tau,\varepsilon) \in I \times (0,\varepsilon_0]$ *справджується оцінка (4).*

Доведення. Із неперервності правих частин (1) випливає, що існує $\tau_2(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких $(\tau,\varepsilon) \in (0,\tau_2) \times (0,\varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $[x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)]$ системи (1). Із систем (1) і (2), враховуючи (5), для $\tau \in (0,\tau_2]$ одержуємо

$$\eta(\tau,\varepsilon) \le (1+a_4)\left(a_2 + a_1\sum_{\nu=0}^{r}\varepsilon^\nu\right)\int_0^\tau \|x(s,\varepsilon) - \overline{x}(s,\varepsilon)\|ds +$$

$$+\,\varepsilon^{r+1}\int_0^\tau \|A(s,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon) - A(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon)\|ds +$$

$$+\varepsilon^{r+1}\int\limits_0^\tau \|A(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon)-A(s,\xi,\xi_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon)\|ds+$$

$$+\varepsilon^{r+1}\int\limits_0^\tau \|A_0(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varepsilon)-A_0(s,\xi,\xi_\lambda,\varepsilon)\|ds+$$

$$+\varepsilon^{r+1}\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\int\limits_0^\tau \|A_{kl}(s,\xi,\xi_\lambda,\varepsilon)\exp[i(k,\varphi)+i(k,\overline{\varphi}_\theta)]ds\| \leq$$

$$\leq (2a_1+a_2)(1+a_4)\int\limits_0^\tau \eta(s,\varepsilon)ds+4a_1c_2L\varepsilon^{r+2}+\varepsilon^{r+1}\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|. \qquad (6)$$

Тут I_{kl} — осциляційний інтеграл вигляду

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau F_{kl}(s,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \gamma_{kl}(z)dz\right\}ds.$$

Вектор-функція

$$F_{kl}(s,\varepsilon)= A_{kl}(s,\xi(s),\xi_\lambda(s),\varepsilon)\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \gamma_{kl}(z)dz+i(k,\overline{\varphi}(\tau,\varepsilon))+i(l,\overline{\varphi}_0(\tau,\varepsilon))\right\},$$

$$\gamma_{kl}(s)=(k,\omega(s,\xi(s),\xi_\sigma(s)))+(l,\omega(\theta(s),\xi_\theta(s),\xi_\theta(\sigma(s)))).$$

Виконання співвідношення $\gamma_{kl}(s)=0, \|k\|+\|l\|\neq 0$, є умовою резонансу в точці $s\in I$. Наявність резонансів у системі значно ускладнює її дослідження [1–3].

Умови 1°, 2° і 4° дають змогу скористатись для I_{kl} оцінкою [7]

$$\|I_{kl}(s,\varepsilon)\|\leq c_3\varepsilon^{1/p}\left(\sup_{I\times(0,\varepsilon_0]}\|F_{kl}(s,\varepsilon)\|+\right.$$

$$\left.+(\|k\|+a_4\|l\|)^{-1}\sup_{I\times(0,\varepsilon_0]}\left\|\frac{dF_{kl}(s,\varepsilon)}{ds}\right\|\right), \quad (\tau,\varepsilon)\in[0,\tau_2)\times(0,\varepsilon_0].$$

На підставі умов 1°, 2° одержуємо

$$\|F_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\leq\sup_{G_2}\|A_{kl}(\tau,\xi(\tau),\xi(\lambda(\tau))\|,$$

$$\left\|\frac{dF_{kl}}{dtau}(\tau,\varepsilon)\right\| \le \sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\right\| + a_1\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| + a_3\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sup_{G_2}\|A_{kl}\|\left[\left\|(k,\omega(\tau,\overline{x},\overline{x}_\sigma)-\omega(\tau,\xi,\xi_\sigma))+\right.\right.$$

$$\left.+(l,\omega_\theta(\tau,\overline{x},\overline{x}_\sigma)-\omega(\tau,\xi,\xi_\sigma))\frac{d\theta}{d\tau}\right\|+$$

$$+\left\|\left(k,\sum_{\nu=0}^{r-1}\varepsilon^\nu Y^{(\nu)}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)+\varepsilon^r Y_\theta(\tau,\overline{x},\overline{x},\varepsilon)\right)\right\|+$$

$$\left.+\left\|\left(l,\sum_{\nu=0}^{r-1}\varepsilon^\nu Y_0^{(\nu-1)}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)+\varepsilon^{r+1}(Y_0(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varepsilon))_\theta\frac{d\theta}{d\tau}\right)\right\|\right] \le$$

$$\le \sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\right\| + a_1\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| + a_3\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right)+$$

$$+2a_1a_2(1+c_2)[\|k\|+a_3\|l\|].$$

Враховуючи умову 4°, маємо

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\|I_{kl}\| \le c_3\varepsilon^{1/p}\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}[(1+2a_1a_2(1+c_2))\sup_{G_2}\|A_{kl}\|+$$

$$+ (1+a_1)(\|k\|+a_4\|l\|)^{-1}\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\right\| + \sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| + a_3\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right) \le$$

$$\le a_5c_3(1+2a_1a_2(1+c_2))\varepsilon^{1/p} \equiv c_4\varepsilon^{1/p}.$$

Нарешті, із (6) на підставі нерівності Гроноулла одержуємо потрібну оцінку

$$\eta(\tau,\varepsilon) \le \varepsilon^q(c_4+4a_{12}L\varepsilon^{\frac{p-1}{p}})\exp[(2a_1+a_2)(1+a_4)L] \le 2c_4\varepsilon^q,$$

якщо $\varepsilon \le \varepsilon_2 = (4a_1c_2L/c_4)^{p/(1-p)}$.

Крім того, якщо $\varepsilon_0 \le \varepsilon_3 = (\rho/4c_4)^{1/q}$, то $\tau_2 \ge L$, тому нерівність (4) справджується для $\tau \in I$. Отже, теорему доведено.

4. Усереднення на півосі. Як і для випадку багаточастотної системи [2], яка описується звичайними диференціальними рівняннями, чи системи першого наближення із запізненням [7], покажемо, що для повільних змінних виконується оцінка, аналогічна (4), і для $R_+ = [0,\infty)$.

Доведемо спочатку лему.

Лема. *Нехай вектор-функція* $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_k(x))^T$ *визначена в області* $S \subset \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset C^2(S)$ *і*

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sup_{x \in S} \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x_\alpha}(x) \right\| \leq a_6. \tag{7}$$

Тоді для $x, x + \Delta \in S$ *для вектор-функції* $r(x) = F(x + \Delta) - F(x) - \dfrac{\partial F(x)}{\partial x}\Delta$ *виконується нерівність*

$$\|r(x)\| \leq \frac{1}{2} a_6 k \|\Delta\|^2. \tag{8}$$

Доведення. Справді,

$$\|r(x)\| = \sum_{\alpha=1}^{k} |r_\alpha(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left| \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x + \theta_\nu \Delta) \Delta_\alpha \Delta_\beta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\Delta_\alpha| \sum_{\beta} |\Delta_\beta| \sum_{\nu} \max_{\nu} \left| \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x + \theta_\nu \Delta) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} k \|\Delta\| \sum_{\alpha} |\Delta_\alpha| \max_{\beta} \left| \frac{\partial^2 F_{\nu_0}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x + \theta_{\nu_0} \Delta) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} k \|\Delta\|^2 \sum_{\alpha} \left\| \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial x_\alpha \partial x}(x + \theta_{\nu_0} \Delta) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} k \|\Delta\|^2 \sum_{\alpha} \sup_{x \in S} \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x}(x) \right\| \leq \frac{1}{2} k a_6 \|\Delta\|^2.$$

Лему доведено.

Нехай $\overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon) = \overline{x}(\tau, 0, x^0, \varepsilon)$ — розв'язок усередненого рівняння (2), $\overline{x}(0, 0, x^0, \varepsilon) = = x^0$. Відповідне рівняння у варіаціях набирає вигляду

$$\frac{dv}{d\tau} = A_1(\tau, \varepsilon) v + A_2(\tau, \varepsilon) v_\lambda, \tag{9}$$

де

$$A_\alpha(\tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{r+1} \varepsilon^\nu \frac{\partial X^{(\nu)}}{\partial u_\alpha}(\tau, \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon), \overline{x}_\lambda^{\,0}(\tau, \varepsilon)), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$X^{(\nu)}(\tau, u_1, u_2) \equiv X^{(\nu)}(\tau, x, x_\lambda), \;\; X^{(r+1)}(\tau, u_1, u_2, \varepsilon) \equiv X_0(\tau, u_1, u_2, \varepsilon).$$

Теорема 2. *Нехай функції у правих частинах систем (1) і (2) задовольняють такі умови:*

1) для $\tau \in R_+$ виконуються умови $1°$, $2°$ і $4°$;

2) на R_+ існує єдиний розв'язок системи (2), причому $\overline{x} = \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon)$ належить D разом із деяким ρ-околом;

3) функція Коші $C(\tau, s)$ [9] лінійної системи (9) задовольняє оцінку

$$\|C(\tau, s, \varepsilon)\| \leq Be^{-\gamma(\tau - s)}, \tau \geq s \geq 0, \tag{10}$$

де $2B > 1$ і $\gamma > 0$ — не залежні від ε сталі;

4) функції $\dfrac{d^i\omega_\nu(\tau, \xi(\tau), \xi_\sigma(\tau))}{d\tau^i}$ і $\dfrac{d^i}{d\theta}\theta(\tau)$, $i = 0, 1, \ldots, p$, $\nu = 1, \ldots, m$, рівномірно неперервні на $\mathbb{R}_+$ і норма матриці $(V^TV)^{-1}V^T$, обчислена вздовж розв'язку $\xi = \xi(\tau)$, обмежена на $\mathbb{R}_+$;

5) $X^{(\nu)} \in C_u^2(G_1)$, $u = [u_1, u_2]$, і

$$\sum_{\alpha=0}^{2n} \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial^2 X^{(\nu)}}{\partial u \partial u_\alpha} \right\| \leq a_6;$$

6) $\sup\limits_{\tau \in R_+} (\tau - \lambda(\tau)) \leq a_7$.

Тоді для досить малого $\varepsilon > 0$, всіх $\tau \in R_+$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_5\varepsilon^q. \tag{11}$$

Доведення. Нехай $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_4$, $4c_1\varepsilon_4^q \leq \rho$. На підставі теореми 1 розв'язок системи (1) існує на деякому максимальному півінтервалі $[0, \tau_3(\varepsilon))$, $\tau_3 > L$. Подамо півінтервал $[0, \tau_3)$ у вигляді

$$[0, \tau_3) = \bigcup_{\nu=0}^{N} I_\nu,$$

де $I_\nu = [\nu L, (\nu+1)L]$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, $N \geq 1$, $I_N = [NL, \tau_3)$, $L = \text{const} > 0$.

Позначимо через $x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)$ компоненту розв'язку системи (1), $x(0, x^0, \varphi^0, \varepsilon) = x^0$, $\tau^\nu = \nu L$, а через $\overline{x}(\tau, \tau^\nu, x^\nu, \varepsilon)$ — розв'язок першого із рівнянь (2) для $\tau \in I_\nu$, $\overline{x}(s, \tau^\nu, x^\nu, \varepsilon) = x(s, x^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $s \in I_{\nu-1} \cap [\lambda(\tau^\nu), \tau^\nu]$.

Введемо заміну

$$\overline{x}(\tau, \tau^\nu, x^\nu, \varepsilon) = \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon) + z(\tau, \varepsilon), \tau \geq \tau^\nu.$$

Для $z(\tau, \varepsilon)$ маємо рівняння

$$\frac{dz}{d\tau} = A_1(\tau, \varepsilon)z + A_2(\tau, \varepsilon)z_\lambda + R(\tau, z, z_\lambda, \varepsilon),$$

де

$$R(\tau, z, z_\lambda, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{r+1} \varepsilon^\nu R_\nu,$$

$$R_\nu = X^{(\nu)}(\tau, z+\overline{x}^{\,0}, z_\lambda+\overline{x}^{\,0}_\lambda) - X(\tau, \overline{x}^{\,0}, \overline{x}^{\,0}_\lambda) - \frac{\partial X^{(\nu)}}{\partial u_1}(\tau, \overline{x}^{\,0}, \overline{x}^{\,0}_\lambda)z - \frac{\partial X^{(\nu)}}{\partial u_2}(\tau, \overline{x}^{\,0}, \overline{x}^{\,0}_\lambda)z_\lambda.$$

На підставі леми, умови 5 і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ маємо

$$\|R\| \le \frac{1}{2} n\|[z, z_\lambda]\|^2 \sum_{\nu=0}^{r+1} \varepsilon^\nu \sum_{\alpha=1}^{2n} \sup_{G_2^\rho} \left\| \frac{\partial^2 X^{(\nu)}}{\partial u \partial u_\alpha}(\tau, u_1, u_2)\right\| \le a_6 n\|[z, z_\lambda]\|^2. \qquad (12)$$

Оцінка (12) і умова 3 дають змогу скористатись також оцінкою [9] (теорема 1)

$$\|z(\tau, \varepsilon)\| \le c_6 e^{(-\gamma(\tau-\tau^\nu))} \max_{[\lambda(\tau^\nu), \tau^\nu]} \|z(s, \varepsilon)\|, \quad \tau \ge \tau_\nu, \qquad (13)$$

де $c_6 = B(1+a_7)e^{a_7\gamma}$.

Виберемо $L = \gamma^{-1}\ln(2c_6)$. На проміжку I_0 маємо $\max\|x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^q$. Для $\tau \in I_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N+1$, враховуючи оцінки (4), (13) та вибір L, одержуємо

$$\max_{\tau \in I_\nu} \|x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \max_{\tau \in I_\nu} \|x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \tau^\nu, x^\nu, \varepsilon)\| +$$

$$+ c_6 e^{-\gamma L}\|\overline{x}(\tau^\nu, \tau^\nu, x^\nu, \varepsilon) - \overline{x}^{\,0}(\tau^\nu, \varepsilon)\| \le$$

$$\le c_1\varepsilon^q + c_6 e^{-\gamma L} \max_{\tau \in I_{\nu-1}} \|x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \tau^{\nu-1}, x^{\nu-1}, \varepsilon)\| \le$$

$$\le c_1\varepsilon^q \sum_{\nu=0}^{N} (c_6 e^{-\gamma L})^\nu \le 2c_1\varepsilon^q.$$

Зауважимо, що аналогічно доводиться той факт, що розв'язок системи першого наближення знаходиться у $2c_2\varepsilon$-околі усередненого розв'язку $\overline{x}^{\,0}(\tau, \varepsilon)$, коли $\tau \in \mathbb{R}_+$ і $\varepsilon \in$ $\in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_5 = \varepsilon_1/2$.

Нехай $\varepsilon = \min\limits_{\nu=1,\ldots,5} \varepsilon_\nu$. Тоді розв'язок $x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)$ належить D разом із $(\rho/4)$-околом для всіх $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, і для нього виконується оцінка (11) із сталою $c_5 = 2c_1$.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.

3. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

4. *Медведев Г.Н.* Высшие приближения метода усреднения при расчете некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Весн. Моск. ун-та. Сер. 3. — 1966. — № 4. — С. 110–115.

5. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
6. *Бігун Я.Й.* Усереднення в коливних резонансних системах вищого наближення з запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 2000. — Вип. 76. — С. 11–16.
7. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 1. — С. 7–14.
8. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Там же. — 1987. — **23**, № 2. — С. 267–278.
9. *Азбелев Н.В., Малыгина В.В.* Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием // Изв. вузов. Математика. — 1994. — № 6. — С. 20–27.

Одержано 04.12.2001