УДК 517 . 929

# О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

**Г. П. Пелюх**

*Ин-т математики НАН Украины*
*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*
*e-mail: pel@imath.kiev.ua*

*We study the structure of continuously differentiable solutions when $t \in R^+ = [0, +\infty)$ for a system of nonlinear differential-functional equations.*

*Досліджено структуру множини неперервно диференційовних при $t \in R^+ = [0, +\infty)$ розв'язків одного класу нелінійних диференціально-функціональних рівнянь.*

Рассмотрим систему нелинейных дифференциально-функциональных уравнений вида

$$x'(t+1) = x'(t) + F(t, x(t), x(f(t, x(t))), x'(\varphi(t))), \tag{1}$$

где $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $F : R^+ \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$, $f : R^+ \times R^n \to R^+$, $\varphi : R^+ \to \to R^+$. Частные случаи таких уравнений широко применяются во многих областях науки и техники и при различных предположениях относительно функций $F$, $f$ и $\varphi$ исследовались многими математиками (см., например, [1, 2]). В результате в настоящее время такие уравнения достаточно хорошо исследованы [1 – 9]. Целью настоящей работы является исследование структуры множества непрерывно дифференцируемых решений системы уравнений (**??**), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t+1) - x(t)| = 0, \tag{2}$$

где $|x| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) вектор-функция $F(t, x, y, z)$ является непрерывной при $t \in R^+$, $x, y, z \in R^n$, $F(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, и удовлетворяет соотношению

$$|F(t, x', y', z') - F(t, x'', y'', z'')| \le \eta(t)(|x' - x''| + |y' - y''| + |z' - z''|),$$

где $\eta(t)$ — некоторая непрерывная и неотрицательная при $t \in R^+$ функция, $x', y', z', y''$, $x'', z'' \in R^n$;

2) функция $f(t, x)$ является непрерывной, неотрицательной при всех $t \in R^+$, $x \in R^n$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le l|x - y|,$$

где $l = \mathrm{const}$, $t \in R^+$, $x, y \in R^n$;

3) функция $\varphi(t)$ является непрерывной и неотрицательной при $t \in R^+$;

4) ряды

$$H_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta(t+i),$$

$$H_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta(\tau+i)d\tau$$

равномерно сходятся при всех $t \in R^+$ и $4H_1(t) \le \theta_1 < 1, 4H_2(t) \le \theta_2 < 1.$

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия 1 – 4. Тогда для произвольного непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решения задачи (1), (2) существует непрерывно дифференцируемая, 1-периодическая вектор-функция $\omega(t)$ такая, что при $t \to +\infty$ выполняется соотношение*

$$x(t) = \omega(t) + o(1). \tag{3}$$

***Доказательство.*** Пусть $\gamma(t)$ — некоторое непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решение задачи (1), (2). Тогда в силу условий 1 – 4 имеем тождество

$$\gamma(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(\varphi(\tau+i)))d\tau,$$

где $\omega(t) = \gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(\varphi(\tau+i)))d\tau.$

Отсюда непосредственно вытекает, что соотношение (3) выполняется. Кроме того, вектор-функция $\omega(t)$ является, очевидно, непрерывно дифференцируемой при всех $t \in \in R^+$. Остается, таким образом, доказать ее периодичность. Действительно, поскольку в силу (2) имеем

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) - \int_t^{\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau, \gamma(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)))d\tau,$$

то

$$\omega(t+1) = \gamma(t+1)-$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t}^{\infty}F(\tau+1+i,\gamma(\tau+1+i),\gamma(f(\tau+1+i,\gamma(\tau+1+i))),\gamma'(\varphi(\tau+1+i)))d\tau=$$

$$= \gamma(t)-\int_{t}^{\infty}F(\tau,\gamma(\tau),\gamma(f(\tau,\gamma(\tau))),\gamma'(\varphi(\tau)))d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\int_{t}^{\infty}F(\tau+i,\gamma(\tau+i),\gamma(f(\tau+i,\gamma(\tau+i))),\gamma'(\varphi(\tau+i)))d\tau =$$

$$=\gamma(t)-\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t}^{\infty}F(\tau+i,\gamma(\tau+i),\gamma(f(\tau+i,\gamma(\tau+i))),\gamma'(\varphi(\tau+i)))d\tau = \omega(t),$$

т.е. функция

$$\omega(t) = \gamma(t)-\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t}^{\infty}F(\tau+i,\gamma(\tau+i),\gamma(f(\tau+i,\gamma(\tau+i))),\gamma'(\varphi(\tau+i)))d\tau$$

является 1-периодической. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия 1 – 4. Тогда при достаточно малом $l$ задача (1) – (3) имеет единственное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решение.*

***Доказательство.*** Пусть $x(t)$ — произвольное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решение задачи (1) – (3). Тогда нетрудно показать, что оно удовлетворяет системе уравнений

$$x(t) = \omega(t)+\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t}^{\infty}F(\tau+i,x(\tau+i),x(f(\tau+i,x(\tau+i))),x'(\varphi(\tau+i)))d\tau. \tag{4}$$

Верно и обратное утверждение: если $x(t)$ — непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решение системы уравнений (**??**), то оно является решением системы уравнений (**??**) (в этом легко убедиться непосредственной подстановкой (**??**) в (**??**)) и удовлетворяет условиям (**??**), (**??**).

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что система уравнений (**??**) имеет единственное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in \in R^+$ (вместе с первой производной) решение.

С помощью соотношений

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \omega(t), \quad x_0'(t) = \omega'(t), \\
x_m(t) &= \omega(t)+ \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} F(\tau+i, x_{m-1}(\tau+i), x_{m-1}(f(\tau+i, x_{m-1}(\tau+i))), x_{m-1}'(\varphi(\tau+i)))d\tau, \quad (5) \\
x_m'(t) &= \omega'(t)- \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} F(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}(f(t+i, x_{m-1}(t+i))), x_{m-1}'(\varphi(t+i))), \\
&\qquad m = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

определим последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и их производных и докажем, что она равномерно сходится к некоторому непрерывно дифференцируемому и ограниченному при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решению системы уравнений (**??**).

Используя условия 1 – 4 и соотношения (5), можно по индукции показать, что вектор-функции $x_m(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in R^+$ и для всех $m \geq 0$ выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
|x_m(t)| &\leq \frac{M}{1-\theta}, \\
|x_m'(t)| &\leq \frac{M}{1-\theta},
\end{aligned} \tag{6}
$$

где $M = \max\{\max_t |\omega(t)|, \max_t |\omega'(t)|\}$, $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$.

Более того, докажем, что при всех $t \in R^+$, $m \geq 1$ и $Ml \leq 1 - \theta$ имеют место оценки

$$
\begin{aligned}
| \, x_m(t) - x_{m-1}(t) \, | &\leq M\theta^m, \\
| \, x_m'(t) - x_{m-1}'(t) \, | &\leq M\theta^m.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Действительно, в силу (**??**) и условий 1 – 4 имеем

$$|x_1(t)-x_0(t)| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}|F(\tau+i,\omega(\tau+i),\omega(f(\tau+i,\omega(\tau+i))),\omega'(\varphi(\tau+i)))|d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta(\tau+i)(|\omega(\tau)|+|\omega(f(\tau+i,\omega(\tau)))|+|\omega'(\varphi(\tau+i))|)d\tau \le$$

$$\le 3MH_1(t) \le M\theta_1 \le M\theta,$$

$$|x_1'(t)-x_0'(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty}|F(t+i,\omega(t+i),\omega(f(t+i,\omega(t+i))),\omega'(\varphi(t+i)))| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\eta(t+i)(|\omega(t)|+|\omega(f(t+i,\omega(t)))|+|\omega'(\varphi(t+i))|) \le$$

$$\le 3MH_2(t) \le M\theta_2 \le M\theta,$$

т. е. оценки (7) выполняются при $m=1$. Предположим, что оценки (7) доказаны для некоторого $m\ge 1$, и покажем, что они не изменяются при переходе к $m+1$. Действительно, принимая во внимание соотношения (5) – (7) и условия 1 – 4, получаем

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta(\tau+i)(|x_m(\tau+i)-x_{m-1}(\tau+i)|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_{m-1}(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m'(\varphi(\tau+i))-x_{m-1}'(\varphi(\tau+i))|)d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta(\tau+i)(|x_m(\tau+i)-x_{m-1}(\tau+i)|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_m(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))-x_{m-1}(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+ |x'_m(\varphi(\tau+i)) - x'_{m-1}(\varphi(\tau+i))|)d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta(\tau+i)(M\theta^m + \frac{M}{1-\theta} lM\theta^m + M\theta^m + M\theta^m)d\tau \le$$

$$\le M\theta^m 4H_1(t) \le M\theta^{m+1},$$

$$|x'_{m+1}(t) - x'_m(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \eta(t+i)(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| +$$

$$+ |x_m(f(t+i, x_m(t+i))) - x_m(f(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x_m(f(t+i, x_{m-1}(t+i))) - x_{m-1}(f(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x'_m(\varphi(t+i)) - x'_{m-1}(\varphi(t+i))|) \le$$

$$\le M\theta^m 4H_2(t) \le M\theta^{m+1}.$$

Таким образом, оценки (7) выполняются при $t \in R^+$ и всех $m \ge 1$. Тогда из (7) непосредственно вытекает, что последовательности вектор-функций $x_m(t)$, $x'_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся при $t \in R^+$. Более того, вектор-функция $x(t) = \lim_{m \to +\infty} x_m(t)$ является непрерывно дифференцируемым при $t \in R^+$ решением системы уравнений (4) (в этом легко убедиться, если перейти в (5) к пределу при $m \to \infty$) и удовлетворяет соотношениям

$$| \; x(t) \; | \le \frac{M}{1-\theta}, \quad | \; x'(t) \; | \le \frac{M}{1-\theta}.$$

Докажем теперь, что система уравнений (4) не имеет других непрерывно дифференцируемых и ограниченных при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решений. В самом деле, пусть система (4) имеет еще одно непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \in R^+$ (вместе с первой производной) решение $y(t)$. Тогда в силу условий 1 – 4 и (4) получаем

$$|x(t) - y(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta(\tau+i)(|x(\tau+i) - y(\tau+i)| +$$

$$+ |x(f(\tau+i, x(\tau+i))) - x(f(\tau+i, y(\tau+i)))| +$$

$$+ |x(f(\tau+i, y(\tau+i))) - y(f(\tau+i, y(\tau+i)))| +$$

$$+ |x'(\varphi(\tau+i)) - y'(\varphi(\tau+i))|)d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta(\tau+i)(|x(\tau+i) - y(\tau+i)| +$$

$$+ \frac{M}{1-\theta} l|x(\tau+i) - y(\tau+i)| +$$

$$+ |x(f(\tau+i, y(\tau+i))) - y(f(\tau+i, y(\tau+i)))| +$$

$$+ |x'(\varphi(\tau+i)) - y'(\varphi(\tau+i))|)d\tau \leq$$

$$\leq 4H_1(t)||x(t) - y(t)|| \leq \theta_1||x(t) - y(t)||,$$

$$|x'(t) - y'(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \eta(t+i)(|x(t+i) - y(t+i)| +$$

$$+ \frac{M}{1-\theta} l|x(t+i) - y(t+i)| +$$

$$+ |x(f(t+i, y(t+i))) - y(f(t+i, y(t+i)))| +$$

$$+ |x'(\varphi(t+i)) - y'(\varphi(t+i))|) \leq$$

$$\leq 4H_2(t)||x(t) - y(t)|| \leq \theta_2||x(t) - y(t)||,$$

где $||x(t) - y(t)|| = \max\{\sup_t |x(t) - y(t)|, \sup_t |x'(t) - y'(t)|\}$.

Отсюда вытекает

$$||x(t) - y(t)|| \leq \theta||x(t) - y(t)||, \tag{8}$$

и, следовательно, $x(t) = y(t)$.Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

1. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 548 с.
3. *Driver R.D.* Existence and continuous dependence of solutions of a neutral functional-differential equation // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1965. — **19**, N<sup>o</sup> 2. — P. 149–166.
4. *Животовский Л.А.* О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения и его производной// Дифференц. уравнения. — 1969. — **5**, № 5. — С. 880–889.

5. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-functional equation // Ann. Pol. Math. — 1975. — **31**, № 1. — P. 23–41.

6. *Блащак Н.І., Пелюх Г.П.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргумента // Допов. НАН України. — 1997. — № 8. — С. 10–13.

7. *Пелюх Г.П.* О представлении решений нелинейных дифференциально- функциональных уравнений в окрестности особых точек // Дифференц. уравнения. — 1986. — **22**, № 9. — С. 1628–1630.

8. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Допов. НАН України. — 1994. — № 3. — С. 19–21.

9. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных диференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737–747.


*Получено 07.12.2001*