

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ
У КРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЄМНОСТЯХ,
РОЗДІЛЕНИХ ДІАМЕТРАЛЬНОЮ ПЕРЕГОРОДКОЮ***

О. В. Солодун

*Ин-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: solodun@imath.kiev.ua*

We study nonlinear oscillations of an ideal incompressible fluid in a partially filled vertical semicylinder container. We construct periodic approximate solutions for the four-mode system that describes nonlinear oscillations in a semicircular cylindrical container for a perturbation force acting in the plane of the partition. Stability and instability regions of the considered physical processes are constructed and studied. A numeric realization of the method is given and an analysis of the hydrodynamic interaction between the fluid and the container is carried out. The problem is interesting for studying nonlinear processes in containers with a diameter partition.

Розглядаються нелінійні коливання ідеальної нестисливої рідини в частково заповненому вертикальному півкруговому циліндричному баку. Побудовано наближені періодичні розв'язки для чотиримодової системи, що описує нелінійні коливання у півкруговому циліндричному баку при дії збурюючої сили у площині перегородки. Побудовано і досліджено області стійкості і нестійкості розглядуваних фізичних процесів. Проведено чисельну реалізацію методу та аналіз гідродинамічної взаємодії рідини та баку. Задача становить інтерес для вивчення нелінійних процесів у рідині при наявності в баках діаметральної перегородки.

Вступ. Для зменшення негативного впливу коливань вільної поверхні рідини на стійкість руху системи „тіло-рідина” на практиці застосовують різного роду конструктивні пристрої. Широке застосування отримали пристрої у вигляді жорстких чи пружних перегородок. Наявність перегородок в ємності суттєво впливає на характер взаємодії між тілом та рідиною. Цю проблему добре вивчено у випадку лінійних постановок задач динаміки твердих тіл з рідиною [1–6]. Проте вона призводить до цілого ряду парадоксів, яких можна уникнути при дослідженні відповідних задач тільки у нелінійній постановці. Це підтверджено експериментальними дослідженнями [1, 3, 4, 7], а також деякими теоретичними розробками [8–13].

Задачі про нелінійні коливання рідини в основному базуються на потенціальній теорії ідеальної нестисливої рідини. Зараз розвиваються аналітичні та чисельно-аналітичні методи, які в основному використовують асимптотичну та модальну техніку. Широкого розповсюдження останнім часом набув модальний підхід, що розвивається на засадах варіаційних принципів механіки [14–16]. Він полягає в тому, що вихідна задача механіки, сформульована в рівняннях з частинними похідними, зводиться до систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно залежних від часу параметрів, що характеризують еволюцію вільної поверхні рідини. Цей підхід має суттєві переваги перед аналогічними методами, побудованими на засадах теорії збурень [2, 17–19]. Сучасний стан

* Виконана при частковій підтримці ДФФД (проект 01.07/096).

математичних проблем нелінійної теорії коливань рідини в рухомих резервуарах дискутується в роботі [20].

У даній роботі наводяться результати теоретичних досліджень з постановки і розв'язку задачі, пов'язаної з вивченням поведінки рідини в рухомій ємності у формі прямого кругового циліндричного баку, розділеного на дві частини діаметральною перегородкою. Ці дослідження ґрунтуються на нелінійній математичній моделі руху рідини, побудованій за допомогою методу Майлса – Луковського в роботі [21].

1. Математична постановка задачі. Будемо розглядати поступальний рух твердого тіла — вертикального півкругового циліндра, що містить у собі обмежений об'єм ідеальної нестисливої рідини густини ρ . Будемо вважати далі, що стінки баку є абсолютно жорсткими. Цей рух розглядається у зв'язаній з баком циліндричній системі координат x, ξ, η , причому початок координат вибрано на незбуреній вільній поверхні Σ_0 . Вісь Ox направимо по осі циліндра у напрямі, протилежному вектору прискорення сил земного тяжіння \vec{g} .

Обмежимося розглядом безвихрових рухів рідини. Припустимо, що розподіл її швидкостей можна подати у вигляді градієнта потенціальної функції $\Phi(x, \xi, \eta, t)$

$$\vec{v} = \nabla\Phi(x, \xi, \eta, t),$$

причому потенціал швидкостей повинен бути розв'язком нелінійної крайової задачі з вільною межею, яка пов'язує (згідно з [17]) $\Phi(x, \xi, \eta, t)$ і миттєве положення вільної поверхні, форму якої будемо задавати рівнянням $\zeta(x, \xi, \eta, t) = 0$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{|\nabla\zeta|^2}, \quad \vec{r} \in \Sigma, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi, \nabla\Phi) - \nabla\Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma, \quad (4)$$

де $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області Q , зайнятої рідиною; S та Σ — відповідно тверда стінка (включаючи поверхню перегородки) та збурена вільна поверхня рідини; \vec{r} — радіус-вектор точок об'єму рідини Q у зв'язаній системі координат; \vec{v}_0 — вектор поступального руху об'єму рідини Q ; U — потенціал сил земного тяжіння.

Розподіл тиску в об'ємі рідини визначається за допомогою інтеграла Лагранжа – Коші, записаного у зв'язаній циліндричній системі координат $Ox\xi\eta$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi, \nabla\Phi) - \nabla\Phi \cdot \vec{v}_0 + gx + \frac{p - p_0}{\rho} = 0,$$

де p_0 — тиск газу над вільною поверхнею рідини, при умові збереження об'єму рідини

$$\int_{Q(t)} dQ = 0. \quad (5)$$

Припускаємо, що тиск p на Σ рівний $p_0 = \text{const}$. Умова збереження об'єму (5) є умовою розв'язності крайової задачі Неймана (1)–(3).

Еволюційна задача з вільною межею (1)–(4) вимагає початкових умов Коші, пов'язаних із заданням початкового профілю вільної поверхні $\Sigma(t_0)$ та розподілу швидкостей на ньому в початковий момент часу $t = t_0$:

$$\zeta(x, \xi, \eta, t_0) = \zeta_0(x, \xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, \xi, \eta),$$

де $\zeta_0(x, \xi, \eta)$ та $\Phi_0(x, \xi, \eta)$ — відомі функції.

2. Модальна система. У роботах [15, 17, 22] показано, що узагальнені розв'язки крайової задачі (1)–(4) надають стаціонарного значення функціоналу

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

тобто

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (6)$$

де

$$L = \int_{Q(t)} p dQ = -\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{Q(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi, \nabla \Phi) - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + gx \right] dQ. \quad (7)$$

Скористаємося методом Майлса–Луковського [14, 15] розв'язування варіаційної задачі (6) для визначення вільної поверхні та потенціалу швидкостей в даному об'ємі. Він полягає в тому, що форма вільної поверхні (за припущень розв'язності відносно однієї змінної) $x = f(\xi, \eta, t)$ та потенціал швидкостей $\Phi(x, \xi, \eta, t)$ подаються у вигляді розкладу ряду Фур'є по деякій повній ортогональній системі функцій

$$f(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(\xi, \eta), \quad (8)$$

$$\Phi(x, \xi, \eta, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(t) \varphi_j(x, \xi, \eta), \quad (9)$$

де $f_i(\xi, \eta)$ — повна ортогональна до константи в гільбертовому просторі $L_2(\Sigma_0)$ система функцій, що задана на незбуреній вільній поверхні Σ_0 ; $\beta_i(t)$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є, що залежать від часу як від параметра і мають зміст узагальнених координат (вони характеризують відхилення вільної поверхні рідини від незбуреного положення); $R_j(t)$ — параметри, що характеризують зміну потенціалу швидкості в часі; $\varphi_j(x, \xi, \eta)$ — система гармонічних функцій в області $Q(t)$, що задовольняють крайову умову неперетікання на змочуваній поверхні $S(t)$.

Підставимо розклад (9) для потенціалу швидкостей з урахуванням (8) у вираз (7). Проінтегрувавши по просторових змінних „функцію Лагранжа” L у згаданому вище варіаційному принципі, подамо її у вигляді функції змінних $\beta_i(t)$, $R_j(t)$ та $\dot{R}_j(t)$.

Із (6) для визначення параметрів $\beta_i(t)$ та $R_j(t)$ отримаємо систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь загального вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta_i} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_n} - \frac{\partial L}{\partial R_n} &= 0, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Практично осяжні результати вдається отримати при врахуванні скінченної кількості параметрів $\beta_i(t)$ та $R_j(t)$, виділяючи серед них ті, які відіграють домінуючу роль. Аналітичний шлях реалізації наведеного тут методу припускає також введення обмежень на порядок малості цих параметрів. Із всієї множини $\beta_i(t)$ надалі ми обмежимося в (8) урахуванням чотирьох коефіцієнтів ряду $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$, які в лінійній теорії вносять суттєвий вклад у приєднані маси та моменти інерції системи „тіло-рідина” і які для зручності запису перепозначимо таким чином:

$$\beta_0 = p_0, \quad \beta_1 = r_1, \quad \beta_2 = p_2, \quad \beta_3 = r_3.$$

За припущень, що $r_1 \approx \varepsilon$, $p_0 \approx p_2 \approx \varepsilon^2$, $r_3 \approx \varepsilon^3$, обмежимося розглядом математичної моделі з величинами параметрів до порядку ε^3 включно.

3. Вимушені коливання у відсіку під дією гармонічної збурюючої сили. Обмежимося в даній роботі випадком, коли коливання відсіку відбуваються під дією збурюючої сили в площині діаметральної перегородки. З використанням методик роботи [7], застосованої для кругового циліндра, в роботі [21] одержано із (10) систему нелінійних звичайних

диференціальних рівнянь, що описує коливання рідини в даному об'ємі:

$$\begin{aligned}
 L_0(r_1, p_0) &= \ddot{p}_0 + \sigma_0^2 p_0 + d_{14}^* r_1 \ddot{r}_1 + d_8^* \dot{r}_1^2 = 0, \\
 L_1(r_1, p_0, p_2) &= \ddot{r}_1 + \sigma_1^2 r_1 + d_1^* (r_1 \dot{r}_1^2 + r_1^2 \ddot{r}_1) + d_3^* (p_2 \ddot{r}_1 + \dot{p}_2 \dot{r}_1) + d_4^* r_1 \ddot{p}_2 + \\
 &\quad + d_5^* (\dot{p}_0 \dot{r}_1 + p_0 \ddot{r}_1) + d_6^* r_1 \ddot{p}_0 + P_1 \omega^2 \cos(\omega t) = 0, \\
 L_2(r_1, p_2) &= \ddot{p}_2 + \sigma_2^2 p_2 + d_{15}^* r_1 \ddot{r}_1 + d_7^* \dot{r}_1^2 = 0, \\
 L_3(r_1, p_2, r_3) &= \ddot{r}_3 + \sigma_3^2 r_3 + d_9^* r_1 \dot{r}_1^2 + d_{10}^* r_1^2 \ddot{r}_1 + d_{11}^* \dot{r}_1 \dot{p}_2 + d_{12}^* p_2 \ddot{r}_1 + d_{13}^* r_1 \ddot{p}_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned}
 d_1^* &= \frac{d_1}{\mu_1}, & d_3^* &= \frac{d_3}{\mu_1}, & d_4^* &= \frac{d_4}{\mu_1}, & d_5^* &= \frac{d_5}{\mu_1}, & d_6^* &= \frac{d_6}{\mu_1}, \\
 d_7^* &= \frac{d_7}{\mu_2}, & d_8^* &= \frac{d_8}{\mu_0}, & d_9^* &= \frac{d_9}{\mu_3}, & d_{10}^* &= \frac{d_{10}}{\mu_3}, & d_{11}^* &= \frac{d_{11}}{\mu_3}, \\
 d_{12}^* &= \frac{d_{12}}{\mu_3}, & d_{13}^* &= \frac{d_{13}}{\mu_3}, & d_{14}^* &= \frac{d_6}{\mu_0}, & d_{15}^* &= \frac{d_4}{\mu_2}, & P_1 &= \frac{H \lambda_{23}}{\mu_1}.
 \end{aligned}$$

Надалі знак * в коефіцієнтах d_i будемо пропускати.

Нам потрібно відшукати періодичні розв'язки системи (11). Для цього узагальнену координату $r_1(t)$ подамо у вигляді відрізка ряду Фур'є з невизначеними коефіцієнтами [23]

$$r_1(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\omega t + \beta_k \sin k\omega t). \tag{12}$$

Обмежившись у цьому зображенні лише основними гармоніками

$$r_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{13}$$

з першого і двох останніх рівнянь системи (11) (оскільки вони лінійні відносно $p_0(t)$, $p_2(t)$ і $r_3(t)$) можна знайти явні вирази для узагальнених координат $p_0(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$:

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= (A^2 + B^2)f_0 + (A^2 - B^2)f_2 \cos 2\omega t + 2ABf_2 \sin 2\omega t, \\
 p_2(t) &= (A^2 + B^2)g_0 + (A^2 - B^2)g_2 \cos 2\omega t + 2ABg_2 \sin 2\omega t, \\
 r_3(t) &= (A^3 + AB^2)h_1 \cos \omega t + (B^3 + A^2B)h_1 \sin \omega t + \\
 &\quad + (A^3 - 3AB^2)h_3 \cos 3\omega t + (3A^2B - B^3)h_3 \sin 3\omega t,
 \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$f_0 = \frac{d_{14} - d_8}{2\bar{\sigma}_0^2}, \quad f_2 = \frac{d_{14} + d_8}{2(\bar{\sigma}_0^2 - 4)}, \quad g_0 = \frac{d_{15} - d_7}{2\bar{\sigma}_2^2}, \quad g_2 = \frac{d_{15} + d_7}{2(\bar{\sigma}_2^2 - 4)},$$

$$h_1 = \frac{1}{4(\bar{\sigma}_3^2 - 1)}(-d_9 + 3d_{10} + 4d_{12}g_0 + 2(-2d_{11} + d_{12} + 4d_{13})g_2),$$

$$h_3 = \frac{1}{4(\bar{\sigma}_3^2 - 9)}(d_9 + d_{10} + 2(2d_{11} + d_{12} + 4d_{13})g_2),$$

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{\omega^2}, \quad \bar{\sigma}_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\omega^2}, \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{\sigma_2^2}{\omega^2}, \quad \bar{\sigma}_3^2 = \frac{\sigma_3^2}{\omega^2}.$$

Після підстановки співвідношень (13) і (14) у рівняння Бубнова – Гальоркіна

$$\int_0^{2\pi/\omega} L_1(p_0, r_1, p_2) \cos \omega t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} L_1(p_0, r_1, p_2) \sin \omega t dt = 0$$
(15)

отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються величини амплітуд A та B :

$$A(\bar{\sigma}_1^2 - 1) + A^3 m_1 + AB^2 m_1 + P_1 = 0,$$

$$B(\bar{\sigma}_1^2 - 1) + B^3 m_1 + A^2 B m_1 = 0,$$
(16)

де

$$m_1 = -\frac{d_1}{2} - d_5 f_0 - d_3 g_0 + \left(2d_6 - \frac{d_5}{2}\right) f_2 + \left(2d_4 - \frac{d_3}{2}\right) g_2.$$

Урахування в (12) вищих гармонік ($n > 1$) призведе до того, що вирази (14) наберуть більш громіздкого вигляду. Відповідно збільшиться кількість умов (15) (до $2n + 1$) і кількість рівнянь (16). Але, як показано в роботі [17], для випадку кругової циліндричної порожнини без перегородок це не приводить до суттєвого поліпшення кінцевого результату ні в якісному, ні в кількісному відношенні.

Із аналізу системи (16) при умові $P_1 \neq 0$ отримуємо

$$A \neq 0, \quad B = 0.$$

Таким чином, враховуючи (13), (14) і (16), приходимо до того, що можливий лише такий наближений періодичний розв'язок нелінійної системи (11):

$$r_1(t) = A \cos \omega t,$$

$$p_0(t) = A^2 f_0 + A^2 f_2 \cos 2\omega t,$$

$$p_2(t) = A^2 g_0 + A^2 g_2 \cos 2\omega t,$$

$$r_3(t) = A^3 h_1 \cos \omega t + A^3 h_3 \cos 3\omega t,$$
(17)

де значення амплітуди A можна знайти з кубічного рівняння

$$A^3 m_1 + A(\bar{\sigma}_1^2 - 1) + P_1 = 0. \quad (18)$$

Аналогічні рівняння для амплітудно-частотних характеристик рідини можна також отримати й іншими методами нелінійної механіки, зокрема методом Крилова – Боголюбова – Митропольського, або методом гармонічного балансу.

На рис. 1 зображено графік залежності модуля амплітуд вимушених коливань рідини (18) від параметрів P_1 і ω . Поклавши в (18) $P_1 = 0$, отримаємо рівняння для визначення залежності амплітуд вільних коливань рідини від частоти (так звану скелетну лінію). На рисунку вона зображена тонкою лінією.

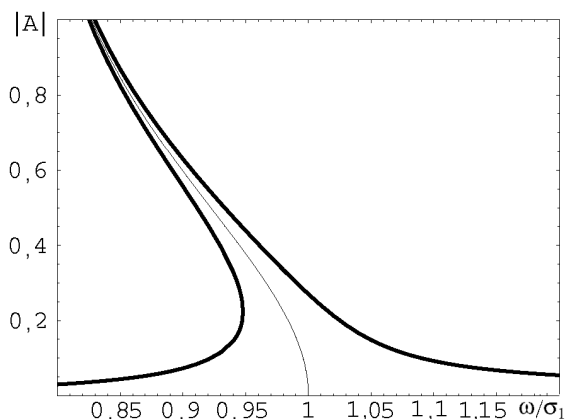


Рис. 1. Амплітудно-частотні характеристики коливань рідини у півкруговому циліндричному баку $h/d = 1$ в околі основного резонансу з параметром $\chi_{11} = k_{11}thk_{11}h$ ($k_{11} = 1,8412$).

Аналіз амплітудно-частотних характеристик для вільних коливань рідини у півциліндричному баку показує, що для розглядуваної динамічної системи в залежності від глибини рідини h має місце нелінійність „м'якого” або „жорсткого” типу. Критичне значення безрозмірної глибини h_*/R , при якому відбувається реверс частот, дорівнює $0,597$, в той час як для не розбитого на відсіки циліндра $h_*/R = 0,52239$.

4. Дослідження на стійкість періодичних розв'язків системи рівнянь (11). Періодичні коливання, що описуються виразами (17), не завжди фізично реалізуються. В дійсності мають місце лише стійкі рухи.

Задачу про динамічну стійкість вільної поверхні рідини дослідимо за допомогою аналізу розв'язків рівнянь у варіаціях.

Рівняння у варіаціях знайдемо для випадку коливань, коли незбурені за Ляпуновим рухи системи (11) описуються залежностями (17). Разом із незбуреними рухами (відміченими нижче знаком \sim) розглянемо близькі до них збурені, які мають вигляд

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \tilde{r}_1(t) + \alpha(t), & p_0(t) &= \tilde{p}_0(t) + \beta(t), \\ p_2(t) &= \tilde{p}_2(t) + \gamma(t), & r_3(t) &= \tilde{r}_3(t) + \delta(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Для того щоб отримати рівняння у варіаціях стосовно збурень α, β, γ та δ , підставимо збурені розв'язки (19) у систему (11) з урахуванням того, що незбурений розв'язок (17) задовольняє цю систему. Лінеаризуючи отриману систему відносно збурень, одержуємо таку систему рівнянь у варіаціях:

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \ddot{\beta}(t) + \sigma_0^2 \beta(t) + 2d_8 \dot{\alpha}(t) \dot{r}_1(t) + d_{14}(r_1(t) \ddot{\alpha}(t) + \alpha(t) \ddot{r}_1(t)), \\
 L_1 &= (1 + d_5 p_0(t) + d_3 p_2(t) + d_1 r_1^2(t)) \ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) (d_5 \dot{p}_0(t) + d_3 \dot{p}_2(t) + 2d_1 r_1(t) \dot{r}_1(t)) + \\
 &\quad + \alpha(t) (\sigma_1^2 + d_1 \dot{r}_1(t)^2 + d_6 \ddot{p}_0(t) + d_4 \ddot{p}_2(t) + 2d_1 r_1(t) \ddot{r}_1) + d_6 r_1(t) \ddot{\beta}(t) + d_4 r_1(t) \ddot{\gamma}(t) + \\
 &\quad + d_5 \dot{\beta}(t) \dot{r}_1(t) + d_3 \dot{\gamma}(t) \dot{r}_1(t) + d_5 \beta(t) \ddot{r}_1(t) + d_3 \gamma(t) \ddot{r}_1(t), \\
 L_2 &= \ddot{\gamma}(t) + \sigma_2^2 \gamma(t) + 2d_7 \dot{\alpha}(t) \dot{r}_1(t) + d_{15}(r_1(t) \ddot{\alpha}(t) + \alpha(t) \ddot{r}_1(t)), \\
 L_3 &= \ddot{\delta}(t) + \sigma_3^2 \delta(t) + (d_{12} p_2(t) + d_{10} r_1^2(t)) \ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) (d_{11} \dot{p}_2(t) + 2d_9 r_1(t) \dot{r}_1(t)) + \\
 &\quad + \alpha(t) (d_9 \dot{r}_1(t)^2 + d_{13} \ddot{p}_2(t) + 2d_{10} r_1(t) \ddot{r}_1) + d_{11} \dot{\gamma}(t) \dot{r}_1(t) + d_{12} \gamma(t) \ddot{r}_1(t) + d_{13} \ddot{\gamma}(t) r_1(t).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Рівняння у варіаціях (20) є лінійними рівняннями з періодичними коефіцієнтами. Основні відомості про розв'язки цих рівнянь дає теорія Флоке. Такі рівняння в літературі називають рівняннями типу Хіла. Розрізняють три типи їх розв'язків: 1) „нестійкі”, які необмежено зростають при $t \rightarrow \infty$; 2) „стійкі”, які залишаються обмеженими при $t \rightarrow \infty$; 3) розв'язки, які мають період T чи $2T$ і називаються нейтральними (їх розглядають як частинний випадок стійких).

Нестійкі розв'язки займають на площині параметрів таких рівнянь цілі області. При цьому області нестійкості відділяються від областей стійкості періодичними розв'язками з періодами T і $2T$. Два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів — область стійкості. Отже, визначення меж областей нестійкості зводиться до відшукування умов, при яких диференціальне рівняння має розв'язок з періодами T і $2T$.

Таким чином, задача про дослідження стійкості періодичних розв'язків (17) звелася до дослідження розв'язків системи (20). Отримані рівняння являють собою систему рівнянь з періодичними коефіцієнтами і фундаментальна система їх розв'язків, згідно з теоремою Флоке – Ляпунова, містить розв'язки вигляду

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= e^{\lambda t} \varphi_1(t), & \beta(t) &= e^{\lambda t} \varphi_2(t), \\
 \gamma(t) &= e^{\lambda t} \varphi_3(t), & \delta(t) &= e^{\lambda t} \varphi_4(t),
 \end{aligned} \tag{21}$$

де λ — характеристичний показник системи, а φ_i — $2\pi/\omega$ -періодичні функції.

Стійкість розв'язків (17), як впливає із виразів (21), залежить від значень характеристичного показника λ . Якщо всі характеристичні показники мають від'ємні дійсні частини, то періодичні розв'язки будуть стійкими. Якщо серед характеристичних показників є хоча б один із додатною дійсною частиною, періодичні розв'язки стають нестійкими.

Більш складним є випадок, коли дійсна частина характеристичного показника дорівнює нулеві. Коли характеристичні показники будуть простими чи кратними, з простим елементарним дільником, тоді розв'язки системи рівнянь у варіаціях (20) будуть обмеженими в часі.

Для того щоб отримати рівняння для визначення характеристичних показників, періодичну функцію $\varphi_1(t)$ подамо у вигляді ряду Фур'є і утримаємо у розкладі лише перші гармоніки

$$\varphi_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad (22)$$

де a_1, b_1 — деякі сталі коефіцієнти.

Підставимо вирази (22) разом із (21) у систему рівнянь у варіаціях (20). При цьому збурення $\beta(t), \gamma(t)$ і $\delta(t)$ можна явно знайти з першого та двох останніх рівнянь системи і виражаються вони через a_1 і b_1 .

Для визначення коефіцієнтів a_1, b_1 отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} C_{11}a_1 + C_{12}b_1 &= 0, \\ C_{21}a_1 + C_{22}b_1 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Тут через $\bar{\lambda}$ позначено відношення λ/ω , а коефіцієнти $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ виражаються через коефіцієнти системи нелінійних диференціальних рівнянь (11), величину $\bar{\lambda}$ і амплітуду A узагальненої координати $r_1(t)$:

$$\begin{aligned} C_{11} = & \bar{\sigma}_1^2 - 1 + \bar{\lambda}^2 \left(1 + A^2 \left(\frac{3}{4}d_1 + d_3 \left(g_0 + \frac{1}{2}g_2 \right) + d_4 \left(y_1 - \frac{1}{2}y_3 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + d_5 \left(f_0 + \frac{1}{2}f_2 \right) + d_6 \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 \right) \right) \right) - A^2 \bar{\lambda} \left(\left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_4 + \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) x_4 \right) + \\ & + A^2 \left(-\frac{3}{2}d_1 - d_3(g_0 + y_1) - d_5(f_0 + x_1) + \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) (g_2 - y_3) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) (f_2 - x_3) \right), \end{aligned}$$

$$C_{12} = A^2 \bar{\lambda}^2 \left(d_4 \left(y_2 - \frac{1}{2}y_4 \right) + d_6 \left(x_2 - \frac{1}{2}x_4 \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\lambda} \left(2 + A^2 \left(d_1 + 2d_3g_0 + 2d_5f_0 + \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_3 + \left(\frac{d_5}{2} - 2d_6 \right) x_3 \right) \right) + \\
& + A^2 \left(-d_3y_2 - d_5x_2 - \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_4 - \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) x_4 \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} = & A^2 \bar{\lambda}^2 \frac{1}{2} (d_4y_4 + d_6x_4) - \bar{\lambda} \left(2 + A^2 \left(d_1 + d_3(2g_0 + y_1) + d_5(2f_0 + x_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_3 + \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) x_3 \right) \right) + A^2 \left(\left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_4 + \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) x_4 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{22} = & \bar{\sigma}_1^2 - 1 + \bar{\lambda}^2 \left(1 + A^2 \left(\frac{1}{4}d_1 + d_3 \left(g_0 - \frac{1}{2}g_2 \right) - \frac{1}{2}d_4y_3 + d_5 \left(f_0 - \frac{1}{2}f_2 \right) - \frac{1}{2}d_6x_3 \right) \right) + \\
& + A^2 \bar{\lambda} \left(-d_3y_2 - d_5x_2 - \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) y_4 - \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) x_4 \right) + \\
& + A^2 \left(-\frac{1}{2}d_1 - d_3g_0 - d_5f_0 - \left(\frac{1}{2}d_3 - 2d_4 \right) (g_2 + y_3) - \left(\frac{1}{2}d_5 - 2d_6 \right) (f_2 + x_3) \right);
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-\bar{\lambda}^2 d_{14} + 2d_{14} - 2d_8}{2(\bar{\lambda}^2 + \bar{\sigma}_0^2)}, \quad x_2 = \frac{\bar{\lambda}(d_8 - d_{14})}{\bar{\lambda}^2 + \bar{\sigma}_0^2},$$

$$x_3 = \frac{2d_8(4 + 3\bar{\lambda}^3 - \bar{\sigma}_0^2) + d_{14}(\bar{\lambda}^4 + (\bar{\lambda}^2 - 2)(\bar{\sigma}_0^2 + 2) + 12)}{2(\bar{\lambda}^4 + 2\bar{\lambda}^2(\bar{\sigma}_0^2 + 4) + (\bar{\sigma}_0^2 - 4)^2)}, \tag{25}$$

$$x_4 = \frac{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}^2(d_8 - d_{14}) + (d_8 + d_{14})\bar{\sigma}_0^2)}{\bar{\lambda}^4 + 2\bar{\lambda}^2(\bar{\sigma}_0^2 + 4) + (\bar{\sigma}_0^2 - 4)^2};$$

$$y_1 = \frac{-\bar{\lambda}^2 d_{15} + 2d_{15} - 2d_7}{2(\bar{\lambda}^2 + \bar{\sigma}_2^2)}, \quad y_2 = \frac{\bar{\lambda}(d_7 - d_{15})}{\bar{\lambda}^2 + \bar{\sigma}_2^2},$$

$$y_3 = \frac{2d_7(4 + 3\bar{\lambda}^3 - \bar{\sigma}_2^2) + d_{15}(\bar{\lambda}^4 + (\bar{\lambda}^2 - 2)(\bar{\sigma}_2^2 + 2) + 12)}{2(\bar{\lambda}^4 + 2\bar{\lambda}^2(\bar{\sigma}_2^2 + 4) + (\bar{\sigma}_2^2 - 4)^2)}, \tag{26}$$

$$y_4 = \frac{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}^2(d_7 - d_{15}) + (d_7 + d_{15})\bar{\sigma}_2^2)}{\bar{\lambda}^4 + 2\bar{\lambda}^2(\bar{\sigma}_2^2 + 4) + (\bar{\sigma}_2^2 - 4)^2}.$$

Оскільки система лінійних алгебраїчних рівнянь (23) відносно сталих a_1, b_1 повинна мати розв'язок, відмінний від нуля (інакше $a_1 = b_1 = 0$), то визначник цієї системи повинен

бути рівним нулеві:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Характеристичне рівняння, яке отримується після розкриття визначника (27), буде в загальному випадку поліномом 24-го степеня відносно $\bar{\lambda}$. Отримання такого рівняння в явному вигляді, враховуючи вигляд виразів (24)–(26), є складною процедурою. Тому дослідження значень характеристичних показників λ зводиться до знаходження всіх коренів характеристичного визначника (27) чисельними методами. Таким чином, нестійким рухам відповідає випадок, коли серед характеристичних показників є такі, що мають дійсну частину ($\text{Re } \lambda \neq 0$). Стійким коливанням у розглядуваному випадку відповідають уявні корені ($\text{Re } \lambda = 0$) характеристичного визначника (27), які за класифікацією Хіла належать до розв'язків нейтрального типу відповідних рівнянь у варіаціях.

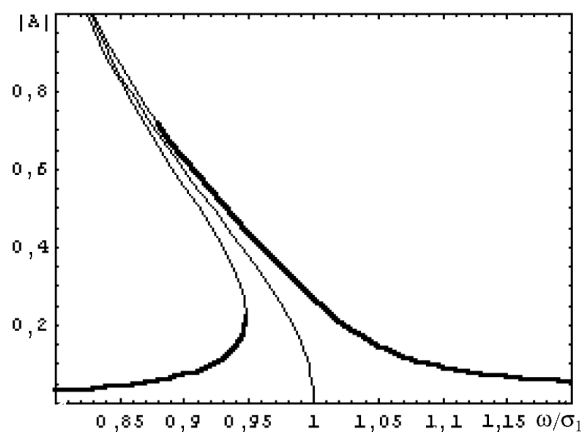


Рис. 2. Стійкі гілки амплітудно-частотних характеристик коливаний рідини.

На рис. 2 за допомогою формул (17) побудовано амплітудно-частотну характеристику коливаний рідини з параметрами R_0 , R , h і H . Жирною лінією зображено амплітуду стійких коливаний, більш тонкою — нестійких. З вигляду наведених кривих видно, що частота нелінійно залежить від амплітуди коливаний. Також тонкою лінією наведено лінію залежності частоти від амплітуди для вільних коливаний рідини.

Отже, задача про дослідження на стійкість періодичних розв'язків (17) системи (11), які описують рухи рідини в даній порожнині, звелася до задачі знаходження коренів характеристичного визначника (27).

Слід також відмітити, що до задачі знаходження наближених виразів для узагальнених координат $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$ можна також застосувати метод амплітуд, що повільно змінюються [23]. Це дасть змогу відслідкувати також і перехідні режими, якщо вони існують.

5. Аналіз амплітудно-частотних характеристик нелінійних коливаний вільної поверхні рідини. Амплітудно-частотні характеристики нелінійних коливаний вільної поверхні ріди-

ни визначаються виразом (18). Для усталених режимів руху можна в кожному конкретному випадку прослідкувати за еволюцією вільної поверхні рідини, скориставшись її зображенням

$$x = p_0(t)Y_0(k_0\xi) - r_1(t)Y_1(k_1\xi) \sin \eta - p_2(t)Y_2(k_2\xi) \cos 2\eta + r_3Y_3(k_3\xi) \cos 3\eta. \quad (28)$$

Для циліндричного сектора з кутом піврозхилу $\alpha = \frac{\pi}{2}$ з параметрами

$$R_0 = 0, \quad R = 1, \quad d = 2R, \quad h = 2, \quad H = 0,01094 \quad (29)$$

на рис. 3 наведено амплітудно-частотні характеристики коливань рідини, отримані за допомогою формул (17), і нанесено експериментальні дані роботи [24]. Через a позначено середню амплітуду (яка дорівнює півсумі амплітуд двох піків, які виміряно біля стінки в площині дії збурюючої сили), g — прискорення сили тяжіння. У розглядуваному випадку середня амплітуда вираховується за формулою

$$a = \frac{d}{2} (|p_0(t) + r_1(t) - p_2(t)| + |p_0(t) - r_1(t) - p_2(t)|).$$

Спостерігається досить хороший збіг теоретичних результатів з експериментальними даними, які на рис. 3 позначено знаком \times .

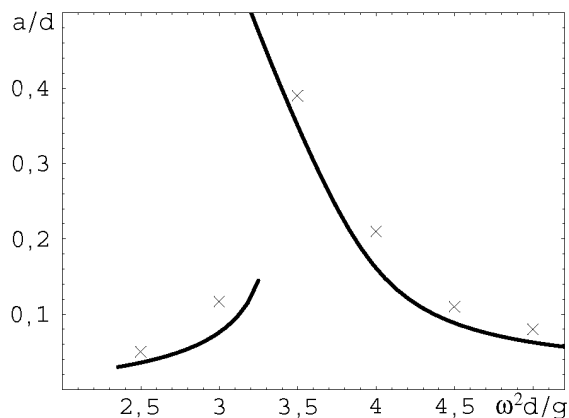


Рис. 3. Величина середньої амплітуди.

Розгляд еволюції вільної поверхні рідини для циліндричного вертикального сектора з параметрами (29), для профілю хвилі (28) (побудованих за допомогою формул (17), з урахуванням (18)), для різних моментів часу t показує, що висота „горба” перевищує глибину „впадини”, тобто спостерігається несиметричність збуреної вільної поверхні рідини. Положення вузлової лінії змінюється з часом, в той час як в лінійній теорії вузлова лінія фіксована.

Особливо це помітно при максимальних значеннях амплітуд, які в розглядуваному випадку досягають величин 0,60476 і 0,29458, тобто відношення висоти „горба” до глибини „впадини” дорівнює 2,0529 (для $t = 0,78$).

З ростом значень амплітуди збурень відмінність між висотою „горба” і глибиною „впадини” стає ще значнішою. Зауважимо, що період коливань для даного випадку дорівнює $T = 2\pi/\omega = 1,08008$.

Таким чином, як видно із наведених вище прикладів, методами даної роботи вдається якісно і кількісно дослідити кінематику нелінійних коливань рідини в баку з перегородкою поблизу основного резонансу. При цьому результати досить добре збігаються з експериментальними [24]. Отже, урахування чотирьох узагальнених координат, що відповідає утриманню у розкладі вільної поверхні чотирьох перших власних форм коливань вільної поверхні рідини (двох симетричних і двох несиметричних), дозволяє досить повно у кількісному і якісному відношенні описати нелінійні ефекти, пов'язані з еволюцією вільної поверхні.

6. Силова взаємодія рідини та ємності. Розглянемо важливе для практики питання про силову взаємодію рідини з частково заповненим баком. Як відомо, головний вектор сил, які діють з боку рідини на резервуар, визначається як

$$\vec{P} = \iint_S p \vec{n} dS, \quad (30)$$

де \vec{n} — орт зовнішньої нормалі до змоченої поверхні S , p — тиск рідини, який визначається із інтеграла Лагранжа – Коші

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{u} - \vec{g} \cdot \vec{r} + \frac{p}{\rho} = 0.$$

Тут $g = (-g, 0, 0)$; $\vec{u} = (0, 0, H \cos \omega t)$ визначає закон руху резервуара.

Безпосереднє використання формули (30) на практиці дуже ускладнене. Для отримання виразу гідродинамічної сили скористаємося результатами §13 роботи [17], що приводить до формули

$$\vec{P} = -m(\ddot{\vec{u}} - \vec{g}) - \frac{d\vec{K}}{dt},$$

де m — маса рідини, \vec{K} — вектор кількості руху маси рідини, який виражається формулою

$$\vec{K} = \rho \iiint_Q (\nabla \Phi) dQ.$$

У загальному випадку, коли рівняння збуреної вільної поверхні Σ має вигляд

$$x = \sum_i \beta_i(t) f_i(y, z),$$

для проєкцій вектора кількості руху \vec{K} на осі декартової системи координат отримуємо вирази

$$K_x = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_{i1} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t),$$

$$K_y = \sum_i \lambda_{i2} \dot{\beta}_i(t), \quad K_z = \sum_i \lambda_{i3} \dot{\beta}_i(t),$$

де

$$\lambda_{i1} = \rho \int_{\Sigma_0} f_i^2(y, z) dS, \quad \lambda_{i2} = \rho \int_{\Sigma_0} y f_i(y, z) dS, \quad \lambda_{i3} = \rho \int_{\Sigma_0} z f_i(y, z) dS.$$

У розглядуваному випадку роль узагальнених координат $\beta_i(t)$ відіграють величини $p_0(t), r_1(t), p_2(t), r_3(t)$. Проекції гідродинамічної сили на осі зв'язаної системи координат з точністю до членів третього порядку малості мають вигляд

$$\begin{aligned} P_x &= -mg - \lambda_{21}(r_1 \ddot{r}_1 + \dot{r}_1^2), \\ P_y &= -\lambda_{12} \ddot{p}_0 - \lambda_{32} \ddot{p}_2, \\ P_z &= -m\ddot{u} - \lambda_{23} \ddot{r}_1, \end{aligned} \tag{31}$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= \frac{\pi}{2} \rho \int_{R_0}^R \xi Y_1^2(k_{11} \xi) d\xi, & \lambda_{12} &= 2\rho \int_{R_0}^R \xi^2 Y_0(k_{01} \xi) d\xi, \\ \lambda_{32} &= \frac{2}{3} \rho \int_{R_0}^R \xi^2 Y_2(k_{21} \xi) d\xi, & \lambda_{23} &= \frac{\pi}{2} \rho \int_{R_0}^R \xi^2 Y_1(k_{11} \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Найбільш важливою з практичної точки зору в розглядуваному випадку є складова сумарної гідродинамічної сили P_z у напрямку осі Oz , вздовж якої сектор здійснює вимушені коливання. Підставляючи вирази для $u(t)$ і $r_1(t)$ в останнє співвідношення системи (31), отримуємо вираз для знаходження амплітуди сили:

$$|P_z| = \frac{\pi}{2} \rho \omega^2 [R^2 h H + A j], \tag{32}$$

де

$$j = \int_{R_0}^R Y_1(k_1 \xi) \xi^2 d\xi.$$

Формула (32) дає можливість оцінити вклад, що вноситься в проекцію сумарної гідродинамічної сили P_z інерційними силами

$$|P_z^{if}| = \frac{\pi}{2} \rho \omega^2 R^2 h H$$

і хвильовими рухами вільної поверхні рідини

$$|P_z^{vm}| = \frac{\pi}{2} \rho \omega^2 A j.$$

Так, для циліндричного сектора з розмірами $R = 1$ і $h = 2$, який здійснює вздовж осі Oz гармонічні коливання з плечем $H = 0,01094$, відносною частотою $\omega/\sigma_1 = 0,949$ і амплітудою основної узагальненої координати $A = 0,22336$, на амплітуду P_z^{vm} приходить приблизно 84% внеску у величину P_z . Це вказує на важливість більш точного визначення амплітудно-частотної характеристики $A(\omega/\sigma_1)$ узагальненої координати $r_1(t)$ при знаходженні проекції (на вісь Oz) амплітуди сумарної гідродинамічної сили.

Розглянемо у рамках викладеної теорії питання впливу вертикальної діаметральної перегородки на характер силової дії рідини на бак. Відомо [24], що переваги баку, розбитого навпіл діаметральною перегородкою, прибирає просторовий рух у вигляді кругової хвилі.

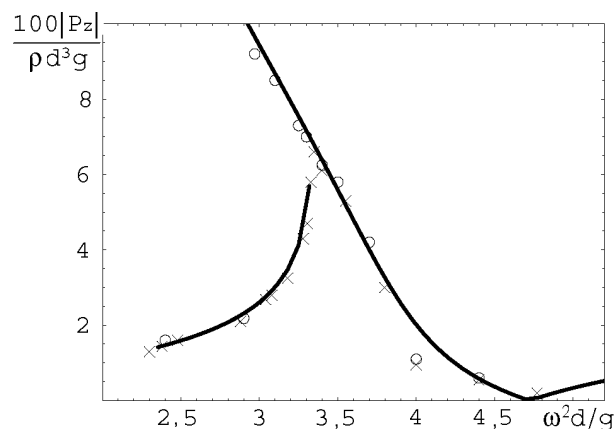


Рис. 4. Амплітуда сили ($H = 0,01094$,
 \times — збільшення, o — зменшення частоти).

На рис. 4 зображено амплітудно-частотні характеристики безрозмірної сили P_z для циліндра, розбитого вертикальною перегородкою навпіл, з параметрами (29) (знаками \times та o відмічено деякі експериментальні дані роботи [24]). Як і у випадку циліндричного баку без перегородки [17], теоретичні та експериментальні результати узгоджуються з точністю до 1,5 – 2%. Окрім того, при розбитті циліндричного баку на два спостерігається зменшення максимального значення проекції амплітуди гідродинамічної сили на вісь Oz приблизно на 23%.

Слід також зазначити, що математична модель (11) приводить до результатів, які краще узгоджуються з експериментальними даними, ніж модель Хаттона [18, 24], побудована на основі теорії збурень.

Із порівняння рис. 3 і 4 видно, що для проекції сумарної гідродинамічної сили (рис. 4) експериментальні дані краще збігаються з теоретичними значеннями, ніж для середньої амплітуди (рис. 3).

Висновки. В роботі розглянуто нелінійні коливання ідеальної нестисливої рідини. Методом Бубнова – Гальоркіна побудовано періодичні розв’язки для розглядуваної чотири-модової системи, що описує нелінійні вимушені коливання рідини у півкруговому циліндричному баку для випадку дії збурюючої сили вздовж перегородки. Побудовано і досліджено області стійкості і нестійкості вимушених коливань. Підтверджено, що в околі

основного резонансу системи амплітуди вимушених коливань рідини та амплітуди сили обмежені, положення вузлової лінії вільної поверхні рідини змінюється з часом, висота „горба” деформованої поверхні перевищує глибину „впадини” та інші нелінійні ефекти. Встановлено, що наявність перегородки покращує стійкість даної системи (окрім того, що таке розбиття прибирає просторові рухи у вигляді кругової хвилі). Наведено аналіз гідродинамічної взаємодії рідини з баком. Результати розрахунків збігаються з даними експериментів. Результати можуть бути використані при проектуванні транспортних засобів, які містять великі маси рідини.

1. *Абрамсон Х.Н., Чу В.Х., Гарца Л.Р.* Движение массы жидкости в цилиндрических баках, разделенных на отсеки// Ракет. техника. — 1962. — №6. — 155 с.
2. *Мoiseev Н.Н.* К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости// Прикл. математика и механика. — 1958. — 22. — С. 612–621.
3. *Abramson Н.Н., Garza L.R.* Some measurement of liquid frequencies and damping in compartment cylindrical tanks// AIAA J. Spacecraft and Rockets. — 1965. — 2, №3. — P. 453–455.
4. *Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N.* Liquid surface oscillation in longitudinally excited rigid cylindrical containers// AIAA J. — 1965. — 3, №4. — P. 685–695.
5. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динимика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
6. *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И. и др.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
7. *Welt F., Modi V.I.* Vibration damping through liquid sloshing. Pt 2. Experimental results// ASME, Trans. J. Vibration and Acoustic. — 1992. — 114. — P. 17–23.
8. *Faltinsen O.M.* A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks// J. Ship Res. — 1974. — 18, №4. — P. 224–241.
9. *Faltinsen O.M., Rongbakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tanks with finite water depth// J. Fluid Mech. — 2000. — 407. — P. 201–234.
10. *Miles J.W.* Internally resonant surface waves in a circular cylinder// Ibid. — 1984. — 149. — P. 1–14.
11. *Miles J.W.* Resonantly forced surface waves in a circular cylinder// Ibid. — P. 15–31.
12. *Solaas F., Faltinsen O.M.* Combined numerical and analytical solution for sloshing in two-dimensional tanks of general shape// J. Ship Res. — 1997. — 41. — P. 118–129.
13. *Welt F., Modi V.I.* Vibration damping through liquid sloshing. Pt 1. A nonlinear analysis// ASME, Trans. J. Vibration and Acoustic. — 1992. — 114. — P. 10–16.
14. *Луковский И.А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью// Колебания упругих конструкций с жидкостью. — М.: Волна, 1976. — С. 260–264.
15. *Miles J.W.* Nonlinear surface waves in closed basins// J. Fluid Mech. — 1976. — 75. — P. 419–448.
16. *Лимарченко О.С.* Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — №10. — С. 904–908.
17. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью. — Киев: Наук. думка, 1990. — 296 с.
18. *Hatton R.E.* An investigating of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical containers// Techn. Note. Washington (NASA; D-1870). — 1963. — P. 145–153.
19. *Нариманов Г.С.* О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней // Прикл. математика и механика. — 1957. — 21, №4. — С. 513–524.
20. *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* Нелинейная теория плесканий в подвижных полостях: классические и неклассические задачи // Вопросы аналитической механики и ее применений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. — С. 169–200.

21. *Луковський І.О., Солодун О.В.* Нелінійна модель руху рідини в циліндричних ємностях, розділених на відсіки// Допов. НАН України. — 2001. — №5. — С. 51–55.
22. *Luce J.C.* A variational principle for a fluid with a free surface// J. Fluid Mech. — 1967. — **27**. — P. 395–397.
23. *Пилькевич А.М.* Анализ вынужденных колебаний жидкости в цилиндрических соосных резервуарах// Прикл. методы исслед. физ.-мех. процессов. — Киев, 1979. — С. 49–63.
24. *Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D.* Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers// J. Appl. Mech. — 1966. — **33**, №4. — P. 66–74.

Одержано 17.11.2001