УДК 517 . 9

# ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ТОРОЇДАЛЬНИМ МНОГОВИДОМ

**О. М. Станжицький**

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка*
*Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64*

*For a nonlinear stochastic Ito type system with an invariant toroidal manifold, we obtain conditions for stability of the manifold and find ergodic properties of solutions in a neighbourhood of the manifold.*

*Для нелінійної стохастичної системи типу Іто з інваріантним тороїдальним многовидом встановлено умови його стійкості та ергодичну властивість його розв'язків в околі многовиду.*

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$d\varphi = a(\varphi)dt,\ dx = (P(\varphi)x + A(\varphi, x))dt + \sum_{i=1}^{r} b_i(\varphi, x)dW_i(t), \tag{1}$$

де $t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^n,\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$, функції $a(\varphi),\ P(\varphi),\ A(\varphi, x),\ b_i(\varphi, x)$ неперервні за сукупністю своїх змінних, $2\pi$-періодичні по $\varphi_i,\ i = \overline{1, m}$, причому $a(\varphi)$ ліпшицева по $\varphi$, а $A,\ b_i$ ліпшицеві по $x \in \mathbf{R}^n$ з константою $L$,

$$A(\varphi, 0) = b_i(\varphi, 0) = 0, \tag{2}$$

$W_i(t),\ i = \overline{1, m}$, — незалежні в сукупності одновимірні вінерові процеси, задані на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathrm{P})$.

При таких припущеннях точку $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ можна інтерпретувати як точку на $m$-вимірному торі $\Im_m$, а перше рівняння з (1) — як динамічну систему на торі $\Im_m$ з потоком траєкторій $\varphi_t(\varphi)$, що є розв'язком першого рівняння з (1) з початковими даними $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, при цьому $\varphi_t(\varphi) + 2\pi = \varphi_t(\varphi)$. З умови (2) випливає, що система (1) має інваріантний тороїдальний многовид

$$x = 0,\ \varphi \in \Im_m.$$

Таким чином, систему (1) можна інтерпретувати як таку, що описує процес, отриманий випадковими збуреннями вздовж нормальної складової детермінованого коливного процесу на торі $\Im_m$.

Поряд з системою (1) розглянемо детерміновану систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x,$$

що називається лінійним розширенням динамічної системи на торі $\Im_m$.

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x. \tag{3}$$

Згідно з [1, с. 121] він задовольняє рівність

$$\Omega_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi).$$

Нехай для $\Omega_0^t(\varphi)$ виконується умова

$$||\Omega_0^t(\varphi)|| \le K \exp\{-\gamma t\} \tag{4}$$

при $t \ge 0, \ \varphi \in \Im_m$ і деяких додатних сталих $K$ і $\gamma$.

Позначимо через $x(t, \varphi, x_0) = \Omega_0^t(\varphi)x_0$ загальний розв'язок системи (3). Тоді маємо оцінки

$$|x(t, \varphi, x_0)| = |\Omega_\tau^t(\varphi)\Omega_0^\tau(\varphi)x_0| = |\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\varphi)x(\tau, \varphi, x_0)| \le$$

$$\le ||\Omega_0^{t-\tau}(\varphi_\tau(\varphi))|||x(\tau, \varphi, x_0)| \le K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}|x(\tau, \varphi, x_0)|,$$

справедливі для всіх $t \ge \tau \ge 0$ і довільного $\varphi \in \Im_m$, з яких для матрицанта $\Omega_\tau^t(\varphi)$ випливає оцінка

$$||\Omega_\tau^t(\varphi)|| \le K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}. \tag{5}$$

Наступна теорема вказує на зв'язок між стійкістю системи (3) та системи (1) і є теоремою про стійкість за першим наближенням для системи (1).

Не втрачаючи загальності, але спрощуючи викладки, в подальшому будемо вважати, що в системі (1) є один скалярний вінерів процес і вона має вигляд

$$d\varphi = a(\varphi)dt, \ dx = (P(\varphi)x + A(\varphi, x))dt + B(\varphi, x)dW(t). \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Якщо матрицант системи (3) задовольняє оцінку (4), а константа $L$ така, що*

$$L < \frac{\gamma}{K(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}},$$

*то розв'язок $x_t(\varphi, x_0)$ системи*

$$dx = (P(\varphi_t(\varphi))x + A(\varphi_t(\varphi), x))dt + B(\varphi_t(\varphi), x)dW(t) \tag{7}$$

*є експоненціально стійким у середньому квадратичному в цілому.*

***Доведення.*** Покажемо, що для $x_t(\varphi, x_0)$ справедливе зображення

$$x_t(\varphi, x_0) = \Omega_0^t(\varphi)x_0 + \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)A(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)B(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, dW(\tau). \tag{8}$$

Дійсно, із [2, с. 264] випливає, що випадковий процес

$$\eta(t) = \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)B(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, dW(\tau)$$

має стохастичний диференціал

$$d\eta(t) = \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Omega_\tau^t(\varphi)B(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, dW(\tau)\right) dt +$$

$$+ \Omega_t^t(\varphi)B(\varphi_t(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))dW(t).$$

Отже, використовуючи властивості фундаментальної матриці та беручи в (8) стохастичний диференціал, отримуємо

$$dx_t(\varphi, x_0) = P(\varphi_t(\varphi))\Omega_0^t x_0 dt +$$

$$+ P(\varphi_t(\varphi)) \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)A(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, d\tau dt +$$

$$+ P(\varphi_t(\varphi)) \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)B(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0))\, dW(\tau)dt +$$

$$+ A(\varphi_t(\varphi), x_t(\varphi, x_0))dt + B(\varphi_t(\varphi), x_t(\varphi, x_0))dW(t),$$

звідки і випливає (8).

Оцінимо $\mathrm{M}\,|x_t(\varphi, x_0)|^2$. Для цього насамперед зауважимо, що з умов на $A$ і $B$ маємо оцінку

$$|A(\varphi, x)| \le L|x|, \ |B(\varphi, x)| \le L|x|$$

для $x \in \mathbf{R}^n,\ \varphi \in \Im_m,\ L$ — стала Ліпшиця. Тоді з (8) одержуємо

$$\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2 \le 3\Bigg(||\Omega_0^t(\varphi)||^2|x_0|^2 + \\ + \mathrm{M}\left(\left|\int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)A(\varphi_\tau(\varphi),x_\tau(\varphi,x_0))\,d\tau\right|\right)^2 + \\ + \int_0^t ||\Omega_\tau^t(\varphi)||^2\mathrm{M}\,|B(\varphi_\tau(\varphi),x_\tau(\varphi,x_0))|^2\,dt\Bigg) \le \\ \le 3\Bigg(K^2\exp\{-2\gamma t\}|x_0|^2 + \\ + \mathrm{M}\left(\left|\int_0^t K\exp\{-2\gamma(t-\tau)\}|A(\varphi_\tau(\varphi),x_\tau(\varphi,x_0))\right|dt\right)^2 + \\ + \int_0^t K^2\exp\{-2\gamma(t-\tau)\}L^2\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2\,d\tau\Bigg). \tag{9}$$

Оцінимо в (9) другий доданок, використавши нерівність Коші – Буняковського:

$$\mathrm{M}\left(\left|\int_0^t K\exp\{-2\gamma(t-\tau)\}|A(\varphi_\tau(\varphi),x_\tau(\varphi,x_0))\right|dt\right)^2 \le \\ \le \mathrm{M}\left(\int_0^t K\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(t-\tau)\right\}L\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(t-\tau)\right\}|x_\tau(\varphi,x_0)|\,d\tau\right)^2 \le \\ \le K^2L^2\int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\}\,d\tau\int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2\,d\tau. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в (9), отримуємо нерівність

$$\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2 \le 3\Bigg(K^2\exp\{-2\gamma t\}|x_0|^2 +$$

$$+\frac{K^2L^2}{\gamma}\int\limits_0^t \exp\{-2\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2\,d\tau+$$

$$\left.+K^2L^2\int\limits_0^t \exp\{-2\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2\,d\tau\right).$$

Домножаючи останню нерівність на $\exp\{\gamma t\}$, маємо

$$\exp\{\gamma t\}\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2\le 3K^2|x_0|^2+$$

$$+\left(\frac{K^2L^2}{\gamma}+K^2L^2\right)\int\limits_0^t \exp\{\gamma\tau\}\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2\,d\tau.$$

Звідси, використовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, отримуємо нерівність

$$\exp\{\gamma t\}\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2\le 3K^2|x_0|^2\exp\left\{\left(\frac{K^2L^2}{\gamma}+K^2L^2\right)t\right\}$$

або остаточно

$$\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2\le C\exp\left\{\left(\frac{K^2L^2}{\gamma}+K^2L^2-\gamma\right)t\right\}|x_0|^2,$$

яка з урахуванням умов теореми приводить до оцінки

$$\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2\le C\exp\{-\gamma_1 t\}|x_0|^2.$$

Проводячи аналогічні міркування на інтервалі $[\tau,\ t]$ при $0\le\tau\le t$ і використовуючи оцінку (5), отримуємо оцінку для довільного розв'язку $x_t(\varphi,x_0)$:

$$\mathrm{M}\,|x_t(\varphi,x_0)|^2\le C\exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}\mathrm{M}\,|x_\tau(\varphi,x_0)|^2$$

для деяких не залежних від $x_0,\ \varphi,\ \tau,\ t$ додатних сталих $C$ і $\gamma_1$. Теорему доведено.

Доведена теорема встановлює, що при виконанні оцінки (4) інваріантний тор $x = 0,\ \varphi\in\Im_m$ системи (6) є експоненціально стійким у середньому квадратичному в цілому.

При виконанні умов теореми 1 із роботи [3] має місце експоненціальна стійкість в цілому з імовірністю 1 розв'язків системи (7). Більш точно справедливий такий наслідок.

***Наслідок 1.*** *В умовах теореми 1 розв'язки $x_t(\varphi,x_0)$ з імовірністю 1 допускають з якогось, взагалі кажучи, випадкового, але скінченного, моменту часу оцінку*

$$|x_t(\varphi,x_0)|\le C\exp\{-\alpha t\}|x_0| \tag{11}$$

*для деякої додатної константи $\alpha$.*

Таким чином, даний наслідок стверджує, що інваріантний тор $x = 0,\ \varphi \in \Im_m$ системи (6) не тільки стійкий у середньому квадратичному, але й усі інші розв'язки з імовірністю 1 притягуються до нього за експоненціальним законом, що свідчить про експоненціальну стійкість з імовірністю 1 тора $x = 0,\ \varphi \in \Im_m$ системи (6).

Нехай тепер обмотка тора $\Im_m$ є квазіперіодичною, тобто перше рівняння в системі (1) має вигляд

$$d\varphi = \nu dt,$$

де $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — вектор частот, тобто сукупність $m$ додатних чисел, що задовольняють умову лінійної незалежності над цілими числами:

$$(k,\nu) = \sum_{i=1}^{m} k_i \nu_i \neq 0 \qquad \forall\, k \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}.$$

За цих умов доведемо теорему ергодичного характеру про поведінку розв'язків системи (1) чи (6).

**Теорема 2.** *При виконанні умов теореми 1 у випадку квазіперіодичної обмотки для довільної функції $F(x,\varphi)$, неперервної при $x \in \mathbf{R}^n,\ \varphi \in \Im_m$ і періодичної по $\varphi_i$ з періодом $2\pi$, і довільного розв'язку $(x_t(\varphi,x),\ \varphi_t(\varphi))$ системи (6) з імовірністю 1 має місце граничне співвідношення*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(x_t(\varphi,x_0), \varphi_t(\varphi))\, dt = F_0 =$$

$$= (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(0,\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m. \tag{12}$$

***Доведення.*** Візьмемо довільний розв'язок системи (6) і розглянемо його траєкторію $(x_t(\varphi,x_0,\omega), \varphi_t(\varphi))$. На підставі наслідку 1 можна стверджувати, що існує $T_0(\omega)$ такий, починаючи з якого $x_t(\varphi,x_0,\omega)$ задовольняє оцінку (11) при $t \geq T_0(\omega)$ і нерівність $|x_t(\varphi,x_0,\omega)| \leq \delta$ для деякого фіксованого $\delta > 0$ і майже всіх $\omega \in \Omega$. Проапроксимуємо функцію $F$ при $|x| \leq \delta$ многочленом по $x$ так, що

$$|F(x,\varphi) - P(x,\varphi,\varepsilon)| \leq \varepsilon$$

для довільного $x:\ |x| \leq \delta,\ \varphi \in \Im_m$ і довільного $\varepsilon > 0$. Звідси випливає оцінка

$$\frac{1}{T}\left| \int_{T_0(\omega)}^{T} \big[F(x_t(\varphi,x_0,\omega), \varphi_t(\varphi)) - P(x_t(\varphi,x_0,\omega), \varphi_t(\varphi), \varepsilon)\big]\, dt \right| \leq \varepsilon \tag{13}$$

для довільного $T \geq T_0(\omega)$.

Але оскільки похідна по $x$ від $P(x,\varphi,\varepsilon)$ також є поліномом по $x$, то

$$\max_{|x|\le\delta,\varphi\in\Im_m}\left|\frac{\partial P(x,\varphi,\varepsilon)}{\partial x}\right| = L(\varepsilon) < \infty.$$

Тому із нерівності (11) отримуємо

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T}\left[P(x_t(\varphi,x_0,\omega),\varphi_t(\varphi),\varepsilon) - P(0,\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\right]dt \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} L(\varepsilon)|x_t(\varphi,x_0,\omega)|\,dt \le$$

$$\le \frac{L(\varepsilon)}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} C\exp\{\alpha t\}|x_0|\,dt \le \frac{L(\varepsilon)C|x_0|}{\alpha T}. \tag{14}$$

Проапроксимуємо функцію $P(0,\varphi,\varepsilon)$ тригонометричним поліномом $Q(\varphi,\varepsilon)$ так, що

$$|P(0,\varphi,\varepsilon) - Q(\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon$$

для довільного $\varphi\in\Im_m$. Звідси маємо

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T}|P(0,\varphi_t(\varphi),\varepsilon) - Q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)|\,dt \le \varepsilon, \tag{15}$$

але

$$Q(\varphi,\varepsilon) = \sum_{||k||\le N} Q_k(\varepsilon)\exp\{i(k,\nu)\},$$

де $N = N(\varepsilon)$ — досить велике додатне число, $Q_k(\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є функції $Q(\varphi,\varepsilon)$. І оскільки обмотка тора квазіперіодична, то $\varphi_t(\varphi) = \nu t + \varphi$, а тому

$$\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} Q(\nu t+\varphi,\varepsilon)\,dt = Q_0^{\varepsilon} + \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\sum_{1\le||k||\le N} Q_k(\varepsilon)\exp\{i(k,\nu)t\}\exp\{i(k,\varphi)\}\,dt,$$

де

$$Q_0(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} Q(\varphi,\varepsilon)\,d\varphi_1\dots d\varphi_m$$

— середнє значення $Q(\varphi,\varepsilon)$.

Оцінимо останній доданок:

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T \sum_{1\le ||k||\le N} Q_k(\varepsilon)\exp\{i(k,\nu)t\}\exp\{i(k,\varphi)\}\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{T}R(\varepsilon)\sum_{1\le ||k||\le N}\left|\int_0^T \exp\{i(k,\nu)t\}\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{T}R(\varepsilon)\sum_{1\le ||k||\le N}\left|\frac{\exp\{i(k,\nu)T\}-1}{i(k,\nu)}\right|.$$

Згідно з умовою $(k,\nu)\ne 0 \pmod{2\pi}$, тому з останньої оцінки маємо

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T Q(\nu t+\varphi,\varepsilon)\,dt - Q_0(\varepsilon)\right| \le \frac{1}{T}R_1(\varepsilon). \tag{16}$$

Очевидне також виконання нерівностей

$$|F_0 - Q_0| \le |F_0 - P_0| + |P_0 - Q_0| \le 2\varepsilon, \tag{17}$$

де $P_0$ — середнє значення полінома $P(0,\varphi)$. Але

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T F(x_t(\varphi,x_0,\omega),\varphi_t(\varphi))\,dt - F_0\right| \le$$

$$\le \frac{1}{T}\left|\int_0^{T_0(\omega)} F(x_t(\varphi,x_0,\omega),\varphi_t(\varphi)\,dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{T}\int_{T_0(\omega)}^T F(x_t(\varphi,x_0,\omega),\varphi_t(\varphi)\,dt - F_0\right|. \tag{18}$$

Перший доданок у (18) прямує до нуля при $T\to\infty$, оскільки інтеграл в силу неперервності $F,\ x_t(\varphi,x_0,\omega),\ \varphi_t(\varphi)$ є обмеженим, а тому при досить великих $T$

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^{T_0(\omega)} F(x_t(\varphi,x_0,\omega),\varphi_t(\varphi))\,dt\right| \le \varepsilon. \tag{19}$$

Із нерівностей (13) – (17) для другого доданка в (18) випливає оцінка

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} F(x_t(\varphi, x_0, \omega), \varphi_t(\varphi))\,dt - F_0\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{T}\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} [F(x_t(\varphi, x_0, \omega), \varphi_t(\varphi)) - P(x_t(\varphi, x_0, \omega), \varphi_t(\varphi), \varepsilon)]\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{T}\left|\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} [P(x_t(\varphi, x_0, \omega), \varphi_t(\varphi), \varepsilon) - P(0, \varphi_t(\varphi), \varepsilon)]\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{T}\left|\int\limits_{T_0(\omega)}^{T} [P(0, \varphi_t(\varphi), \varepsilon) - Q(\varphi_t(\varphi), \varepsilon)]\right| dt +$$

$$+\frac{1}{T}\left|\int\limits_{0}^{T} Q(\nu t + \varphi, \varepsilon)\,dt - Q_0(\varepsilon)\right| + \frac{1}{T}\left|\int\limits_{0}^{T_0(\omega)} Q(\nu t + \varphi, \varepsilon)\,dt\right| +$$

$$+|Q_0(\varepsilon) - F_0| \le \varepsilon + \frac{L(\varepsilon)C|x_0|}{\alpha T} + \varepsilon + \frac{1}{T}R_1(\varepsilon) + 2\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{T}\left|\int\limits_{0}^{T_0(\omega)} Q(\nu t + \varphi, \varepsilon)\,dt\right|.$$

Виберемо $T$ настільки великим, щоб виконувалась оцінка (19) і оцінка

$$\frac{L(\varepsilon C|x_0|)}{\alpha T} + \frac{1}{T}R_1(\varepsilon) + \frac{1}{T}\left|\int\limits_{0}^{T_0(\omega)} Q(\nu t + \varphi, \varepsilon)\,dt\right| \le \varepsilon.$$

Тоді при $T \ge T_1 \ge T_0(\omega)$ маємо оцінку ( $T_1$ вибрано з наведеної вище умови)

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} F(x_t(\varphi, x_0, \omega), \varphi_t(\varphi))\,dt - F_0\right| \le 5\varepsilon.$$

Остання нерівність і доводить теорему.

У випадку довільної обмотки тора, тобто, коли система має вигляд (6), можна отримати як очевидний наслідок з даної теореми такий результат.

***Наслідок 2.*** *При виконанні умов теореми 1 для довільної неперервної на $\mathbf{R}^n$ функції $F(x)$ і довільного розв'язку $x_t(\varphi, x_0)$ системи (7) з імовірністю 1 має місце граничне співвідношення*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(x_t(\varphi, x_0))\,dt = F(0).$$

Теорему 2 можна переформулювати в термінах ергодичної міри.

Дійсно, на торі $\Im_m$ розглянемо міру $\mu(d\varphi) = d\varphi_1\dots d\varphi_m,\ \varphi_i \in [0,\ 2\pi],\ i = \overline{1, m}$, за якою побудуємо ймовірнісну міру $\sigma(A) = \mu(A)/(2\pi)^m$, де $A$ — борелева множина з тору $\Im_m$. Дану міру можна розглядати як міру в декартовому добутку $\mathbf{R}^n\times\Im_m$, зосереджену на торі $\Im_m$. Вона, звичайно, є сингулярною відносно міри Лебега в просторі $\mathbf{R}^n\times\Im_m$. Тоді для довільної неперервної на $\mathbf{R}^n\times\Im_m$ і періодичної по $\varphi$ функції $F(x,\varphi)$ маємо

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n\times\Im_m} F(x,\varphi)\,\sigma(dxd\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\Im_m} F(0,\varphi)\,d\varphi_1\dots d\varphi_m.$$

Із останньої формули випливає, що рівність (12) можна переписати у вигляді

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(x_t(\varphi, x_0,), \varphi_t(\varphi_0))\,dt = \int\limits_{\mathbf{R}^n\times\Im_m} F(x,\varphi)\,\sigma(dxd\varphi)$$

з імовірністю 1, де $\sigma$ — ергодична міра, зосереджена на торі $\Im_m$.

Питанням ергодичних властивостей розв'язків стохастичних рівнянь Іто присвячено багато робіт (див., наприклад, монографії [4, 5]). Однак у цих роботах суттєвим є невиродженість матриці дифузії в деякій обмеженій області і скінченність середнього часу повернення розв'язку в цю область (умова В в [4, с. 153]), або те, що розв'язок не має інваріантних замкнених множин, відмінних від усього простору (незвідність процесу [5, с. 153]).

У розглядуваній ситуації ці умови, очевидно, не виконуються, оскільки система (1) має інваріантний многовид $x = 0,\ \varphi \in \Im_m$, на якому дифузія вироджена ( на многовиді система перетворюється в детерміновану).


1. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 302 с.
2. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 441 с.
3. *Kozin F.* On almost sure asymptotic sample properties of diffusion processes defined by stochastic differential equations //J. Math. Kyoto Univ. — 1965.— **4**, № 3. — P. 515–528.
4. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
5. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 328 с.


*Одержано 27.06.2001*