УДК 531 . 36 : 534 . 1

ТЕХНІЧНА СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВИХ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ КОНТИНУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ З ПОТОКОМ РІДИНИ

К. С. Матвійчук

Ін-т механіки НАН України
Україна, 02057, Київ, вул. Нестерова, 3

Using the nonlinear theory of elasticity in the space, together with the comparison method and the direct Lyapunov method, we elaborate an approach for studying nonlinear many-dimensional dynamical processes when moving prolate continuum systems interact with a fluid flow. On the basis of this approach, we derive some generalized nonlinear systems, wich differ in the assumptions, describing the motion of the given continuum systems. We find sufficient conditions for technical stability of the corresponding not self-adjoint boundary-value problem in the space and use it to characterize the dynamical behavior of the studied system in the fluid flow.

Розроблено підхід до дослідження нелінійних багатовимірних динамічних процесів взаємодії з потоком рідини рухомих видовжених континуальних систем на базі нелінійної просторової теорії пружності в поєднанні з методом порівняння та з прямим методом Ляпунова. На цій основі виведено різні за внутрішнім змістом узагальнені системи нелінійних рівнянь руху заданих континуальних процесів. Встановлено достатні умови технічної стійкості відповідної просторової несамоспряженої крайової задачі, за допомогою якої характеризується динамічна поведінка досліджуваних систем у потоці рідини.

У даній роботі розвинуто метод дослідження умов технічної стійкості [1 – 29] багатовимірних динамічних процесів з розподіленими параметрами, що описуються нелінійними несамоспряженими крайовими задачами, в яких рівняння руху є нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Зокрема, на практиці до таких задач приводить широке застосування сильно видовжених пружних циліндричних систем, як суцільних, так і порожнистих, зі змінним поперечним перетином, що взаємодіють із зовнішніми або внутрішніми потоками рідин або газів [1 – 11].

1. Нелінійна крайова задача, що характеризує взаємодію з потоком рідини рухомої видовженої пружної системи. Розглянемо довге пружне циліндричне тіло зі змінним поперечним перетином, поздовжня вісь якого в початковому стані є прямолінійною. Нехай таке тіло поздовжньо транспортується в ідеальній нестисливій рідині протягом заданого проміжку часу $I_1 = [t_0, K] \subset I \equiv [t_0, +\infty),\ t_0 \geq 0,\ K = \mathrm{const} > 0$, вздовж горизонтальної прямолінійної траєкторії з заданою швидкістю $\vec{v}, v$ — її абсолютне значення. Для зручності позначимо задану пружну систему символом AB.

Вважаємо, що AB є однорідним ізотропним тілом, деформується геометрично нелінійно, а деформації, за припущенням, вважаються малими [2 – 4, 6].

Розглянемо випадок обтікання рідиною заданої системи в русі, розміщеної несиметрично відносно потоку рідини. У цьому випадку результуюча гідродинамічна сила F складається з двох складових: $F_c = (F_{1c}, F_{2c}, F_{3c})$ — динамічна сила лобового опору, яка направлена вздовж потоку, і $F_p = (F_{1p}, F_{2p}, F_{3p})$ — підйомна сила, що направлена перпендикулярно потоку. Введемо позначення: $m(s)$ — маса одиниці довжини тіла AB, залежна від змінної s, s — безрозмірна скалярна координата довільної точки недеформованої осьової лінії тіла AB: $s \in D \equiv [0,1]$; ρ — густина матеріалу, $S(s)$ — площа довільного поперечного перетину, l — довжина, h — усереднена товщина тіла AB; $q = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор зовнішніх розподілених сил, прикладених до системи; $u(t,s) = [u_1(t,s), u_2(t,s), u_3(t,s)]$ — вектор переміщень будь-якої точки осьової лінії системи з безрозмірними компонентами; $\varepsilon = sl$ — розмірна скалярна координата точок недеформованої осьової лінії системи; t — безрозмірна часова змінна; τ — розмірний час; ν — коефіцієнт Пуассона; E — модуль Юнга; G — модуль зсуву; P_m — сила ваги, що віднесена до одиниці довжини системи AB; P_A — підйомна сила Архімеда для тіла AB; Ω — сила тяги рушійної системи, що транспортує систему AB у рідині. Вважаємо, що передня основа A тіла має шарнірний тип закріплення з рушійною системою, а у хвостовій основі B на систему зрівноважуючим чином відносно горизонталі діє деяке тіло П. Для П позначимо: $q_\pi, \rho_ж, \tilde{h}, V_\pi, F_A = g\rho_ж V_\pi, \xi_C$ — відповідно його вага, густина матеріалу, деякий характерний лінійний параметр, об'єм, сила Архімеда, віддаль між центром мас C тіла П і точкою B, g — прискорення вільного падіння.

Для тіла AB введемо позначення: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — ортогональна система одиничних векторів локальної системи координат поточної конфігурації тіла; $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$ — головний вектор всіх зовнішніх сил, що діють на задане тіло; $\vec{Q}$ — вектор внутрішніх зусиль стержньового елемента $d\varepsilon$ тіла:

$$\vec{Q} = Q_1\vec{e}_1 + Q_2\vec{e}_2 + Q_3\vec{e}_3,$$

Q_1 — осьове зусилля (розтягуюче або стискуюче);Q_2, Q_3 — перерізуючі зусилля. Вектор внутрішніх моментів

$$\vec{M} = M_1\vec{e}_1 + M_2\vec{e}_2 + M_3\vec{e}_3,$$

де M_1 — крутильний момент; M_2, M_3 — згинальні моменти. Вектори $\vec{Q}, \vec{M}$ статично еквівалентні вектору відповідних напружень [6, 8]. Для системи AB змінного поперечного перетину, оскільки $m(\varepsilon) = m(ls)$, будемо вважати, що параметр m є функцією безрозмірної змінної s : $m(s)$. Крім того, $m(s) = m_0(0)n_0(s)$, де $n_0(s)$ — безрозмірна функція змінної s, $m_0(0) = \rho S_0, S_0$ — площа фіксованого поперечного перетину, наприклад, у початку відліку координати ε. Звідси площа довільного поперечного перетину тіла AB $S(s) = S_0 n_0(s)$.

У випадку, коли $\vec{v}$ — задана постійна швидкість транспортування системи в рідині, а її рух поздовжній, виберемо для AB вектор переміщень $\vec{U}$ у вигляді [2, 5, 6, 11, 12]

$$U_1 = W_1 + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta,\ U_2 = W_2 + \beta_2\eta + \beta_3\zeta,\ U_3 = W_3 - \beta_3\eta + \beta_2\zeta, \tag{1}$$

де $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3$ — дійсні коефіцієнти, що характеризують малі кути поворотів і в загальному випадку залежні від змінної ε. Зображення вектора переміщень $\vec{U}$ у вигляді (1) відповідає гіпотезі плоских перетинів, а саме: перетини, які є перпендикулярними до осі заданого тіла до деформації, залишаються плоскими, але вже не обов'язково перпендикулярними до осі пружного тіла. Це випливає з того, що при апроксимації (1) одержуємо афінне перетворення точок площини перетину, перпендикулярного до осі пружного тіла до деформування, які в результаті такого перетворення в поточній конфігурації знову належать одній площині, а відрізки прямих при цьому відображаються у відрізки прямих відповідно. У вказаному випадку можна вважати, що для форми поперечного перетину її зміни є несуттєвими, отже, дотичними напруженнями на відповідних поверхнях можна знехтувати. Вибором апроксимації (1) для тензора деформації забезпечується виконання деформаційних умов [2, 4, 6]: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23} = 0$. Умова $\varepsilon_{23} = 0$ відповідає тому факту, що в поточній конфігурації система ортів $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, є ортогональною. Використовуючи перетворення (1) і нехтуючи величинами високого порядку малості, знаходимо матрицю переходу від базису $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, до базису $\vec{e}_{i0}, i = 1, 2, 3$, незбуреного стану системи:

$\bar{P}_1 =$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_{10}$	$1 + \dfrac{\partial W_1}{\partial \varepsilon}$	α_2	α_3
$\vec{e}_{20}$	$\dfrac{\partial W_2}{\partial \varepsilon}$	$1 + \beta_2$	β_3
$\vec{e}_{30}$	$\dfrac{\partial W_3}{\partial \varepsilon}$	$-\beta_3$	$1 + \beta_2$

За допомогою матриці $\bar{P}_1$ при заданій швидкості $\vec{v}$ отримуємо узагальнену систему шести нелінійних диференціальних рівнянь відносно внутрішніх зусиль і відповідно внутрішніх моментів, що характеризують заданий процес, яка містить у собі певну внутрішню симетрію:

$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon}\right) Q_1\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\alpha_2 Q_2) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\alpha_3 Q_3) + \left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon}\right) R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3,$$

$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_2}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[(1 + \beta_2) Q_2] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} Q_1\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\beta_3 Q_3) + \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} R_1 + (1 + \beta_2) R_2 + \beta_3 R_3, \qquad (2)$$

$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[(1 + \beta_2) Q_3] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} Q_1\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\beta_3 Q_2) + \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} R_1 - \beta_3 R_2 + (1 + \beta_2) R_3;$$

$$\rho\frac{\partial l_1^0}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)M_1\right] + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\alpha_2 M_2\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\alpha_3 M_3\right) +$$

$$+ \alpha_3 Q_2 - \alpha_2 Q_3 + \left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3,$$

$$\rho\frac{\partial l_2^0}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1+\beta_2\right)M_2\right] + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}M_1\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 M_3) + \beta_3 Q_2 -$$

$$- (1+\beta_2)Q_3 + \frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}\mu_1 + (1+\beta_2)\mu_2 + \beta_3\mu_3, \tag{3}$$

$$\rho\frac{\partial l_3^0}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1+\beta_2\right)M_3\right] + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}M_1\right) - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 M_2) +$$

$$+ (1+\beta_2)Q_2 + \beta_3 Q_3 + \frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}\mu_1 - \beta_3\mu_2 + (1+\beta_2)\mu_3,$$

$$l_i^0 = J_i\omega_i, \quad i = 1,2,3, \quad \vec{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

З використанням необхідних припущень і співвідношень рівняння (2), (3) дають можливість отримати різноманітні спрощені математичні моделі заданого динамічного процесу. У випадку змінної швидкості $\vec{v}$ транспортування системи в рідині отримуємо подібно до (2), (3) більш складну систему рівнянь, яка містить суттєві вирази, залежні від вектора $\vec{v}$ та його похідних [2, 4, 6]. Відповідні викладки не будемо наводити. Проте нижче виконаємо необхідні перетворення над системою (2), (3) для отримання нелінійної несамоспряженої крайової задачі заданого процесу, поданої у переміщеннях. У зв'язку з цим для компонент векторів $\vec{Q}, \vec{M}$ одержимо їхні вирази через переміщення точок поперечних перетинів заданої системи.

Скориставшись співвідношеннями зв'язку в загальному вигляді, запишемо співвідношення для зусиль $Q_i, i = 1,2,3$, через переміщення точок осьової лінії системи AB [1–8]:

$$Q_1 = \frac{ES(\varepsilon)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\left\{\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}\right)^2\right]\right\} + \beta_2 + \frac{1}{2}(\beta_2^2+\beta_3^2)\right],$$

$$Q_2 = S(\varepsilon)G\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)\alpha_2 + (1+\beta_2)\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon} - \beta_3\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}\right], \tag{4}$$

$$Q_3 = S(\varepsilon)G\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)\alpha_3 + (1+\beta_2)\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon} + \beta_3\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}\right].$$

Моменти обчислюються за формулами [1 – 7, 11]:

$$M_1 = -GI_p\left[(1+\beta_2)\frac{\partial \beta_3}{\partial \varepsilon} - \beta_3\frac{\partial \beta_2}{\partial \varepsilon}\right],$$

$$M_2 = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}EI_2\left[(1+\beta_2)\frac{\partial^2 W_3}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_3\frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + \beta_3\frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2}\right], \tag{5}$$

$$M_3 = -\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}EI_3\left[(1+\beta_2)\frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} - \beta_3\frac{\partial^2 W_3}{\partial \varepsilon^2}\right],$$

I_p — полярний момент інерції: $I_p = \int\limits_s (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta; I_2$ — момент інерції поперечного перетину тіла AB відносно осі $\vec{e}_2 : I_2 = \int\limits_s \zeta^2 d\eta d\zeta$; I_3 — момент інерції поперечного перетину тіла AB відносно осі $\vec{e}_3 : I_3 = \int\limits_s \eta^2 d\eta d\zeta$. Виконаємо необхідні спрощення. Далі інерцію обертальних рухів вважаємо незначною. Тоді лівими частинами рівнянь (3) нехтуємо і відповідно до цього покладаємо $\vec{\mu}_\alpha = 0, \mu_{10} = 0$; вважаємо, що μ_{20}, μ_{30} — сталі величини, маючи на увазі, що вектор $\vec{\mu} = \vec{\mu}_\alpha + \vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0 = (\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30})$) задано аналогічно [6]. Припускаючи, що в довільному перетині заданої системи AB зміщення у всіх трьох просторових напрямках однакові, покладаємо

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0. \tag{6}$$

Умова (6) означає перехід до відповідних співвідношень внутрішніх зусиль і моментів пружного тіла, поданих через переміщення точок його осьової лінії. Крім того, за необхідністю з першої умови (5) для внутрішнього крутильного моменту системи випливає умова $M_1 = 0$.

Позначимо через P_H тиск рідини на систему AB на глибині H. При дії зовнішнього потоку із-за змінності поперечного перетину S заданого тіла та внаслідок його деформації з'являються кривизна і додаткові розподілені сили [2, 4 – 6, 8]. Тому в рівняннях руху в базисі $\vec{e}_{i0}, i = 1, 2, 3$, враховуючи змінність перетину $S(\varepsilon)$, при спрощеннях залишаємо доданок $-P_H \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \varepsilon^2}$, пов'язаний з внутрішніми зусиллями пружного тіла AB. У скалярних рівняннях руху, записаних в одержаних із (2) шляхом спрощень переміщеннях, доданками високого порядку малості нехтуємо. При цьому із (3) знаходимо співвідношення зв'язку між Q_i і $M_i, i = 1, 2, 3$. В результаті замість шести рівнянь типу (2), (3) отримуємо три рівняння руху в переміщеннях точок осьової лінії заданої системи. Одночасно враховано припущення, що поперечні рухи тут слабко впливають на поздовжні зміщення в системі. Переходячи до безрозмірних змінних, отримуємо крайову задачу в переміщеннях, яка описує заданий динамічний процес поздовжнього транспортування в рідині на заданій глибині довгого пружного тіла зі змінним поперечним перетином:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - P_H^{(1)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial s^2} \frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - P_H^{(2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) + a_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3 \frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - P_H^{(3)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) + b_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3$$

з граничними

$$u_i(t,s)\Big|_{s=0} = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\Big|_{s=1} = -c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\Big|_{s=1} + c_2, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\Big|_{s=1} = 0, \qquad \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3}\Big|_{s=1} = n \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\Big|_{s=1}, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\Big|_{s=1} = n_1 (g \rho_{ж} V_{\pi} - q_{\pi}), \qquad \frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3}\Big|_{s=1} = n_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\Big|_{s=1} - n_3 (g \rho_{ж} V_{\pi} - q_{\pi})$$

і початковими

$$u_i(t,s)\Big|_{t=t_0} = k_i(s), \quad \frac{\partial u_i(t,s)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = g_i(s), \quad i = 1,2,3, \qquad (9)$$

умовами, де безрозмірний час у першому рівнянні $t = \tau l \sqrt{m/TS\delta}$, у другому $t = \tau l^2 \sqrt{m/EI_3\delta}$, у третьому $t = \tau l^2 \sqrt{m/EI_2\delta}$; коефіцієнти системи рівнянь мають вигляд

$$P_H^{(1)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{1}{E n_0}, \qquad P_H^{(2)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{S_0 l^2}{EI_3 \delta}, \qquad P_H^{(3)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{S_0 l^2}{EI_2 \delta},$$

$$a_1 = \frac{S_0 n_0 l h}{I_3}, \quad a_2 = \frac{S_0 l h}{I_3}, \quad a_3 = \frac{l^3}{EI_3 \delta} R_1, \quad b_1 = \frac{S_0 n_0 l h}{I_2},$$

$$b_2 = \frac{S_0 l h}{I_2}, \quad b_3 = \frac{l^3}{EI_2 \delta} R_1, \quad f_1 = \frac{l^2}{ES_0 n_0 h \delta} R_1, \quad f_2 = \frac{l^4}{EI_3 h \delta} R_2, \qquad (10)$$

$$f_3 = \frac{l^4}{EI_2 h\delta} R_3, \quad R_1 = \Omega - q_1 - F_1, \quad R_2 = q_2 + F_2, \quad R_3 = P_A - P_m + q_3 + F_3,$$

$$\delta = (1-\nu)[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}, \quad F_i = F_{ic} + F_{ip}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Коефіцієнти для граничних умов такі:

$$c_1 = \frac{q_\pi l}{\delta g T^2 E S_B}, \quad c_2 = \frac{R_1 l}{\delta E h S_B}, \quad n = \frac{q_\pi l^3}{\delta g T^2 I_{3B}}, \quad n_1 = \frac{l^2 \tilde{h} \xi_C}{\delta E I_{2B} h},$$
$$n_2 = \frac{q_\pi l^3}{\delta g T^2 I_{2B}}, \quad n_3 = \frac{l^3}{\delta E I_{2B} h}, \tag{11}$$

T — деякий характерний проміжок часу для тіла П. Величини з індексом B відповідають поперечному перетину заданого тіла в точці B.

Припускаємо, що при заданих функціях $g_i(s), k_i(s), i = 1, 2, 3$, які задовольняють необхідні умови узгодженості на границі тіла AB, для крайової задачі (7) – (9) існує однозначний розв'язок у класі неперервних по t, s функцій, що мають неперервні похідні по t, s необхідного порядку [1, 3, 5, 9 – 11, 13].

Граничні умови (8) отримано таким чином. У місці переднього поперечного перетину A відносно напрямку руху пружного тіла AB граничні умови відповідають шарнірному закріпленню тіла з рушійною системою в точці A. У перетині B з системою AB тіло-стабілізатор П має з'єднання по площині, перпендикулярній до осі заданої системи. Припускаємо, що П має дві площини симетрії, які проходять через орти $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ і $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, або через орти $(\vec{e}_{10}, \vec{e}_{30})$ і $(\vec{e}_{10}, \vec{e}_{20})$, оскільки тіло П вважається жорстким. Крім цього, припускаємо, що його центр мас C знаходиться на лінії перетину цих площин. Позначимо цю лінію BK, при цьому координата $\xi_c = BC$. Закон руху точки C набирає вигляду

$$\vec{x}_C(t) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_{10})\xi_C + \vec{W}(l, t).$$

Звідси сила інерції поступального руху тіла П

$$\vec{J}_\pi = -\frac{q_\pi}{g} \frac{d^2 \vec{x}_C}{dt^2} = -\frac{q_\pi}{g} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \Big|_{s=1}.$$

Силами інерції обертальних рухів і кутами повороту для П нехтуємо. Виходячи із умов задачі для П, після відповідного зображення в системі координат $\vec{e}_{i0}, i = 1, 2, 3$, можливих моментних навантажень робимо висновок про можливість покласти рівними нулю крутильний $M_{1\pi}$ і згинальний $M_{3\pi}$ моменти для тіла П. Отже, застосовуючи принцип Даламбера для тіла П, проектуючи одержані граничні рівняння для зусиль і моментів на базис $\vec{e}_{i0}, i = 1, 2, 3$, і переходячи до безрозмірних величин, отримуємо граничні умови (8). Проте через громіздкість відповідні математичні викладки пропускаємо. Граничні умови (8) виявились неоднорідними, зі складною структурою. Це пов'язано з неконсервативністю заданої системи. Вони відображають суть того, що у хвостовому граничному перетині заданої системи зрівноважуючим чином діє тіло-стабілізатор під час транспортування системи в рідині. Крайова задача (7) – (9) є нелінійною і несамоспряженою.

У випадку розгляду в'язкого середовища, в якому рухається задана система AB, у рівняннях руху системи суттевими є і ті доданки, які залежать від швидкості $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ руху в'язкої рідини [2 – 7]. Після належних перетворень у такому випадку отримуємо крайову задачу, де рівняння руху мають вигляд

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - (P_H^{(1)} + \tilde{w}_1^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - (P_H^{(2)} + \tilde{w}_2^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) +$$

$$+ a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3\frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - (P_H^{(3)} + \tilde{w}_3^2)\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right) +$$

$$+ b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3\frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3,$$

з граничними умовами вигляду (8) і початковими умовами (9). Тут поряд із заданими вище позначеннями

$$\tilde{w}_1 = w_1\frac{1}{\sqrt{ES_0 n_0 \delta}}, \quad \tilde{w}_2 = w_2\frac{l}{\sqrt{EI_3\delta}}, \quad \tilde{w}_3 = w_3\frac{l}{\sqrt{EI_2\delta}}.$$

У випадку, коли задане тіло зі змінним поперечним перетином рухається у в'язкій рідині на такій глибині H, впливом якої можна знехтувати, в рівняннях руху (12) пропустимо члени типу — $P_H^{(i)}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}, i = 1, 2, 3,$ як такі, що не є суттєвими для даного динамічного процесу.

Оскільки сформульовані крайові задачі виявились несамоспряженими, то в явному вигляді точний розв'язок таких задач знайти надто проблематично. Тому в подальшому розгляді для дослідження поведінки систем, що описуються заданими крайовими задачами, застосуємо такі методи, що не потребують визначення роз'язків цих задач в явному вигляді.

2. Умови технічної стійкості динамічних станів взаємодіючого з потоком рідини рухомого видовженого тіла. Системи рівнянь вказаних процесів є суттєво нелінійними та містять залежні від аргументів t, s коефіцієнти. Для визначення умов технічної стійкості таких процесів ефективним є застосування методу диференціальних нерівностей на базі прямого методу Ляпунова [8 – 28].

Розглянемо той рух заданої пружної системи в потоці рідини, що характеризується безрозмірною крайовою задачею (7) – (9) при заданих співвідношеннях (10), (11). Для дослідження властивостей технічної стійкості вказаної системи задамо векторний функціонал вигляду [8 – 13, 15, 19 – 28]

$$V[u_1, u_2, u_3, t] = \{V_1[u_1, t], V_2[u_2, t], V_3[u_3, t]\},$$

$$V_1[u_1, t] = \int_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 - (\tilde{v}_1 + \tilde{F}_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 \right],$$

$$V_2[u_2, t] = \int_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}\right)^2 - (\tilde{v}_2 + \tilde{F}_2)\left(\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 \right], \qquad (13)$$

$$V_3[u_3, t] = \int_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s}\right)^2 - (\tilde{v}_3 + \tilde{F}_3)\left(\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2 \right],$$

де при змінних основних параметрах процесу позначено

$$\tilde{v}_1 = \sup_{t,s} \frac{mvl^2}{\delta ESh}, \quad \tilde{v}_2 = \sup_{t,s} \frac{mvl^3}{\delta EI_3}, \quad \tilde{v}_3 = \sup_{t,s} \frac{mvl^3}{\delta EI_2}, \quad \tilde{F}_k = \sup_{t,s}(P_H^{(k)} + f_k). \qquad (14)$$

Введемо до розгляду відповідну векторну міру [11,15]

$$\rho(u) = \{\rho_1(u_1), \rho_2(u_2), \rho_3(u_3)\}, \; \rho_1(u_1) = \sup_s (u_1)^2 + \int_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 \right],$$

$$\rho_j(u_j) = \sup_s (u_j)^2 + \sup_s \left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2 + \int_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^2 \right], \quad j = 2, 3. \qquad (15)$$

Для компонент вектор-функції (13) при невід'ємних величинах $(1 - (\tilde{v}_k + \tilde{F}_k)), k = 1, 2, 3,$ справедливими є оцінки знизу

$$V_1[u_1, t] \geq \frac{1}{2}[1 - (\tilde{v}_1 + \tilde{F}_1)]\rho_1(u_1), V_i[u_i, t] \geq \frac{1}{3}[1 - (\tilde{v}_i + \tilde{F}_i)]\rho_i(u_i), \quad i = 2, 3. \qquad (16)$$

Функціонали $V_k[u_k, t]$ (13), згідно з (16), є додатно означеними відносно міри $\rho(u)$ при виконанні умов

$$0 < \tilde{v}_k + \tilde{F}_k < 1, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (17)$$

Величини $\mu_k = 1 - (\tilde{v}_k + \tilde{F}_k), k = 1, 2, 3,$ мають зміст малого додатного параметра: $\mu_k \in (0, 1]$. Задамо з їхньою допомогою скінченний проміжок часу I_1, протягом якого розглянемо динамічну поведінку вихідного процесу, що характеризується системою рівнянь (7) – (9):

$$I_1 = [t_0, L\bar{\mu}^{-1}], \quad \bar{\mu}^{-1} = \max\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1}\}, \quad K = L\bar{\mu}^{-1}, \tag{18}$$

$L = \text{const} > 0$ — наперед задана стала величина, пов'язана з характеристикою надійності системи.

Означення 1. *Динамічний процес, який описується крайовою задачею (7) – (9), називається технічно стійким на обмеженому проміжку часу I_1 за заданою векторною мірою $\rho(u)$ (15), якщо вздовж збуреного розв'язку $u(t,s)$ задачі (7) – (9) для вектора $V[u,t]$ з заданими згідно з (13) додатно означеними відносно міри $\rho(u)$ компонентами $V_k[u_k,t], k = 1,2,3$, справджуються умови*

$$V_k[u_k(t,s),t] \leq P_k(t), \quad t \in I_1, \quad k = 1,2,3,$$

як тільки в початковий момент $t_0 \in I_1$ справедливі нерівності

$$V_k[u_k^0(s), t_0] \leq b_k, \quad t_0 \in I_1, \quad k = 1,2,3, \tag{19}$$

для величин

$$\begin{gathered} V_1[u_1^0(s), t_0] = \int\limits_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial k_1(s)}{\partial s} \right)^2 - (\tilde{v}_1 + \tilde{F}_1) \left(\frac{\partial k_1(s)}{\partial s} \right)^2 + (g_1(s))^2 \right], \\ V_i[u_i^0(s), t_0] = \int\limits_0^1 ds \left[\left(\frac{\partial^2 k_i(s)}{\partial s^2} \right)^2 - (\tilde{v}_i + \tilde{F}_i) \left(\frac{\partial k_i(s)}{\partial s} \right)^2 + (g_i(s))^2 \right], \quad i = 2,3, \end{gathered} \tag{20}$$

де означені в області I_1 обмежені функції $P_k(t), k = 1,2,3$, задовольняють умови

$$0 < P_k(t) \leq C_k, C_k = \text{const} > 0, P_k(t_0) \geq b_k, \, b_k = \text{const} > 0, \, k = 1,2,3,$$

і при цьому функції $P_k(t), k = 1,2,3$, та сталі $C_k, b_k, k = 1,2,3$, I_1 наперед задані.

Означення 2. *Динамічний процес (7) – (9) називається технічно стійким відносно векторної міри $\rho(u)$ на нескінченному проміжку часу I, якщо умови означення 1 справедливі у випадку будь-якого значення $K \leq +\infty$.*

Якщо при цьому вздовж розв'язку задачі (7) – (9) справедливі умови

$$\lim_{t \to +\infty} V_k[u_k(t,s),t] = 0, \quad k = 1,2,3,$$

то динамічний процес (7) – (9) називається асимптотично технічно стійким відносно векторної міри $\rho(u)$.

Означення 3. *Динамічний процес (7) – (9) називається технічно нестійким на обмеженому або нескінченному проміжку часу при заданих сталих b_k і функціях $P_k(t)$, якщо при виконанні умов (19) для розв'язку $u(t,s)$ задачі (7) – (9) знайдеться момент часу $t_1 \in I_1$ або $t_1 \in I, t_1 > t_0$, такий, для якого виконується хоча б одна із нерівностей*

$$V_k[u_k(t_1,s),t_1] > C_k, \quad k = 1,2,3.$$

Обчислимо покомпонентно повну похідну по t вектор-функції (13) в силу системи (7) – (9):

$$\frac{dV_1[u_1,t]}{dt} = 2\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,1)\left[c_2 - c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(t,1)\right] - \int\limits_0^1 ds\left[(\tilde{v}_1+\tilde{F}_1)\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t\partial s} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(P_H^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - n_0^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial n_0}{\partial s} - f_1\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]\right\},$$

$$\frac{dV_2[u_2,t]}{dt} = -2n\frac{\partial u_2}{\partial t}(t,1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(t,1) + 2\int\limits_0^1 ds\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}\left[a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - P_H^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3\frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2\right] - (\tilde{v}_2+\tilde{F}_2)\frac{\partial u_2}{\partial s}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial s}\right\}, \qquad (21)$$

$$\frac{dV_3[u_3,t]}{dt} = -2\left[\left(n_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial s}(t,1) + n_3\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,1)\right)(g\rho_{ж}V_\pi - q_\pi) - n_2\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,1)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t,1)\right] +$$

$$+ 2\int\limits_0^1 ds\left\{\frac{\partial u_3}{\partial t}\left[b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right) - P_H^3\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3\frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3\right] - (\tilde{v}_3+\tilde{F}_3)\frac{\partial u_3}{\partial s}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial s}\right\}.$$

Праві частини виразів (21) для зручності позначимо відповідно через $M_1(t,\lambda_1)$, $M_2(t,\lambda_2)$, $M_3(t,\lambda_3)$, де параметри

$$\lambda_1 = (c_1,c_2,\tilde{v}_1,\tilde{F}_1,P_H^{(1)},f_1),\ \lambda_2 = (n,a_1,a_2,a_3,\tilde{v}_2,\tilde{F}_2,P_H^{(2)},f_2),$$

$$\lambda_3 = (n_1,n_2,n_3,b_1,b_2,b_3,\tilde{v}_3,\tilde{F}_3,P_H^{(3)},f_3)$$

характеризують досліджувану систему, що описується крайовою задачею (7) – (9). Розглянемо вздовж розв'язку $u_i(t,s), i = 1,2,3$, задачі (7) – (9) функції

$$\bar{\Phi}_1(t,\lambda_1) = M_1(t,\lambda_1) - \frac{\mu_1}{2(\mu_1+t)^2}\rho_1(u_1(t,s)),$$

$$\bar{\Phi}_i(t,\lambda_i) = M_1(t,\lambda_i) - \frac{\mu_i}{3(\mu+t)^2}\rho_i(u_i(t,s)), \quad i = 2,3.$$

Теорема 1. *Нехай справджуються такі умови:*

1) крайова задача (7) – (9) в скінченному проміжку часу I_1, наперед заданому згідно з (18), має однозначний розв'язок з зазначеними вище властивостями;

2) для заданих у відповідності з (13), (14) функціоналів $V_i[u_i(t,s),t], i = 1,2,3$, справедливі умови

$$0 < \tilde{v}_i + \tilde{F}_i < 1, \quad i = 1,2,3;$$

3) в області I_1 задані і існують невід'ємні інтегровні функції $\Phi_i(t), i = 1,2,3$, змінної t, для яких вздовж розв'язку $u_i(t,s), i = 1,2,3$, системи (7) – (9) справджуються нерівності

$$\mid \bar{\Phi}_i(t,\lambda_i) \mid \leq \Phi_i(t), \quad i = 1,2,3, \quad t \in I_1;$$

4) в області $G = \{t, y_i, \mu_i : t \in I_1, \mid y_i \mid < +\infty, \mu_i \in (0,1), \quad i = 1,2,3\}$ для тривимірної задачі Коші порівняння

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{(\mu_i+t)^2}[y_i + \sigma_i(t)], \quad \sigma_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_i(\tau)d\tau, \quad i = 1,2,3, \quad t \in I_1, \tag{22}$$

$$y_i(t) = y_i^0 \geq V_i[u_i^0(s),t_0], \quad i = 1,2,3, \quad t_0 \in I_1, \tag{23}$$

де величини $V_i[u_i^0(s),t_0], \quad i = 1,2,3$, задані рівностями (20), існує єдиний неперервний розв'язок

$$y(t) = \{y_1(t,t_0,y_1^0), y_2(t,t_0,y_2^0), y_3(t,t_0,y_3^0)\},$$

$$y_i(t,t_0,y_i^0) = \exp\left[-\frac{1}{\mu_i+t}\right]\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu_i+\tau}\right]\Phi_i(\tau)d(\tau) +$$

$$+ y_i^0 \exp\left[\frac{1}{\mu_i+t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu_i+t}\right] - \sigma_i(t), \quad i = 1,2,3; \tag{24}$$

5) справджується система нерівностей

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_i(\tau)\exp\Big[\frac{1}{\mu_i+\tau}\Big]d(\tau) \le M_i(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1})^2\Big\{\exp\Big[\frac{1}{\mu_i+t_0}\Big]-$$

$$-\exp\Big[\frac{1}{\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}}\Big]\Big\},\quad t_0,t\in I_1,\quad i=1,2,3, \tag{25}$$

де M_i — наперед задані додатні сталі величини.

Тоді динамічні процеси, що характеризуються крайовою задачею (7) – (9), є технічно стійкими відносно векторної міри $\rho(u)$ при всіх значеннях $t\in I_1$.

Доведення. Використовуючи умови 1 – 3 теореми 1, вздовж розв'язку крайової задачі (7) – (9) для (21) одержуємо систему нерівностей

$$\frac{dV_i[u_i(t,s),t]}{dt} \le \frac{1}{(\mu_i+t)^2}V_i[u_i(t,s),t]+\bar{\Phi}_i(t,\lambda_i),\quad i=1,2,3. \tag{26}$$

Вздовж розв'язку задачі (7) – (9) розглядаємо систему функцій

$$z_i(t)=V_i[u_i(t,s),t]-\sigma_i(t),\quad i=1,2,3.$$

Оцінки (26) породжують систему нерівностей

$$\frac{dz_i(t)}{dt} \le \frac{1}{(\mu_i+t)^2}[z_i(t)+\sigma_i(t)],\quad i=1,2,3. \tag{27}$$

Із (27) випливає задача Коші порівняння вигляду (22), (23), яка, за припущенням, підпорядкована умові 4 теореми 1. За теоремою про диференціальні нерівності із (27), (22), (23) для функцій $z_i(t)$ і розв'язків (24) одержуємо систему нерівностей [12, 18]

$$z_i(t)\le y_i(t,t_0,y_i^0),\quad i=1,2,3,\quad t\in I_1.$$

Звідси для компонент $V_i, i=1,2,3$ (13), знаходимо оцінки

$$V_i[u_i(t,s),t]\le y_i(t,t_0,y_i^0)+\sigma_i(t),\quad i=1,2,3,\quad t\in I_1.$$

Враховуючи вигляд розв'язку (24) задачі (22), (23), остаточно вздовж розв'язку крайової задачі (7) – (9) отримуємо систему нерівностей [12, 18 – 26]

$$V_i[u_i(t,s),t]\le P_i(t),$$

$$P_i(t)\equiv \exp\left[-\frac{1}{\mu_i+t}\right]\int_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu_i+t}\right]\Phi_i(\tau)d\tau+y_i^0\exp\left[\frac{1}{\mu_i+t_0}\right], \tag{28}$$

$$t_0,t\in I_1,\quad i=1,2,3,$$

оскільки маємо $y_i(t,t_0,y_i^0)+\sigma(t)\le P_i(t), \quad i=1,2,3, \quad t_0,t\in I_1.$ Із умови 5 теореми 1 знаходимо систему оцінок

$$P_i(t)\le C_i, \quad C_i\equiv\left\{M_i\left(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}\right)^2+y_i^0\right\}\exp\left[\frac{1}{\mu_i+t_0}\right]. \tag{29}$$

Зауважимо при цьому, що один із можливих виборів констант M_i може бути обумовлений виконанням умов $\mid M_i(t,\lambda_i)\mid\le M_i, \quad i=1,2,3.$

Таким чином, із нерівностей (23), (28), (29) випливає справедливість теореми 1.

Теорема 2. *Нехай умови 1 – 4 теореми 1 справедливі на будь-якому проміжку $I_1\subseteq I$ і виконуються умови*

$$\exp\left[-\frac{1}{\mu_i+t}\right]\ge\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu_i+t}\right]\Phi_i(\tau)d\tau \quad \forall I_i\subseteq I,$$

$$\left(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}\right)^2\ge 1, \quad i=1,2,3.$$

Тоді динамічні процеси, які характеризуються крайовою задачею (7) – (9), є технічно стійкими відносно векторної міри $\rho(u)$ на нескінченному проміжку часу I.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1 з незначними відмінностями, оскільки в цьому випадку в області I виконуються нерівності

$$P_i(t)\le y_i^0\exp\left[\frac{1}{\mu_i+t_0}\right]+1\le C_i, \quad t_0,t\in I, \quad i=1,2,3.$$

Теорема 3. *Нехай додатково до умов теореми 2 в області I виконується умова збіжності*

$$y_i(t,t_0,y_i^0)+\sigma_i(t)\to 0 \ \ \textit{при}\ t\to+\infty, \quad i=1,2,3.$$

Тоді вихідні динамічні процеси (7) – (9) відносно векторної мірі $\rho(u)$ є асимптотично технічно стійкими.

Справді, в цьому випадку разом з аргументацією, наведеною при доведенні теорем 1 і 2,

$$V_i(t)\to 0, \qquad t\to+\infty, \quad i=1,2,3.$$

Одержані достатні умови технічної стійкості заданих динамічних процесів характеризують залежність просторового руху в потоці рідини довгого пружного тіла від основних параметрів процесів, а саме, таких, як швидкість поздовжнього транспортування видовженої системи в рідині, тиск у рідині на фіксованій глибині, розподілені і гідродинамічні сили.

Знайдені умови технічної стійкості вихідних динамічних процесів (7) – (9) порушуються, якщо швидкість руху заданої системи, зовнішні сили, що діють на систему, будуть задовольняти систему нерівностей

$$\tilde{v}_i + \tilde{F}_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{30}$$

оскільки в цьому випадку умова додатної означеності (17) для функціонала (13) не виконується. Але цього недостатньо для нестійкості процесу. Вихідний процес буде технічно нестійким на скінченному або нескінченному інтервалі часу, якщо відповідно в цих областях мажоранти $P_i(t)$ в оцінках (28) задовольняють умови

$$P_i(t) \to +\infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Зокрема, умова (31) виконується при $t_0 = 0$ і довільних $t \geq 0$, коли $\mu_i \to 0, i = 1, 2, 3$. Як випливає із означення величин $\mu_i, i = 1, 2, 3$, це можливо при прямуванні швидкості v руху пружного тіла AB у рідині до деякого свого критичного значення $v_{\text{кр}}$; аналогічне має місце для швидкості руху рідини і зовнішніх сил, що діють на задане пружне тіло; або всі названі величини зростають одночасно. У даному випадку критична швидкість $v_{\text{кр}}$ руху пружного тіла в ідеальній рідині визначається за допомогою нерівностей (30):

$$\begin{aligned} v_{\text{кр}} = \Bigg[& 3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \\ & - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + P_H S_0 l^2 h \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \\ & - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + P_H S_0 l^2 h \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \Bigg] [m l^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Легко переконатись, що теореми 1 – 3 справедливі у випадку динамічних процесів, які характеризуються крайовими задачами типу (12), (8), (9) при врахуванні взаємодії заданої пружної системи змінного перетину з в'язкою рідиною.

У випадку руху заданого тіла в потоці в'язкої рідини для $v_{\text{кр}}$ маємо

$$\begin{aligned} v_{\text{кр}} = \Bigg[& 3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + w_1^2 h + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \\ & - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + w_2^2 l^2 h + P_H S_0 l^2 h \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \\ & - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + w_3^2 l^2 h + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \Bigg] [m l^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Із (32), (33) випливає явна залежність критичної шквидкості $v_{кр}$ руху пружного тіла AB у потоці рідини від інших основних параметрів вихідного процесу. Зміна останніх приводить до певних змін критичної швидкості руху системи в рухомій рідині. Аналогічно знаходимо критичні значення інших параметрів, які характеризують досліджуваний процес.

Таким чином, при русі довгого пружного тіла змінного перетину в потоці рідини зі швидкістю, яка не перевищує критичного значення $v_{кр}$, що визначається у відповідності з (32) або (33), динамічний процес (7)–(9) або (12), (8), (9) є технічно стійким згідно з наведеними означеннями.

1. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1935.— 364 с.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
3. *Савін Г.М., Парасюк О.С.* Пружно-пластичні задачі з бігармонічним пластичним станом //Допов. АН УРСР. — 1947. — №4. — С. 53–56.
4. *Гузь А.Н.* Устойчивость трехмерных деформированных тел. — Киев: Наук. думка, 1971. — 276 с.
5. *Вознюк А.В., Коломиец В.Г.* Применение асимптотических методов нелинейной механики для исследования одночастотных колебаний стержней переменного сечения // Мат. физика. — 1969. — Вып. 6. — С. 66–72.
6. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. — М.: Машиностроение, 1982. — 280 с.
7. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — Киев: Наук. думка, 1990. — 296 с.
8. *Leipholz H.* Stability of elastic systems. — The Netherlands: Sijhoff et Noordhoff, 1980. — 475 p.
9. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. — М.: Высш. шк., 1973. — 271 с.
10. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 147 с.
11. *Мовчан А.А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем //Прикл. математика и механика. — 1959. — **23**, №3. — С. 483–494.
12. *Szarski J.* Differential inequalities. — Warszawa: PWN, 1967. — 256 p.
13. *Байрамов Ф.Д.* О технической устойчивости систем с распределенными и сосредоточенными параметрами //Изв. вузов. Авиац. техника. — 1975. — №2. — С. 19–24.
14. *Кириченко Н.Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. — 212 с.
15. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 232 с.
16. *Гаращенко Ф.Г, Кириченко Н.Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения //Механика твердого тела. — 1975. — №6. — С. 15–24.
17. *Каменков Г.И.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. — 1953. — **17**, вып. 5. — С. 529–540.
18. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, 1980. — 481 с.
19. *Матвийчук К.С.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим //Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, №11. — С. 2009–2011.
20. *Матвийчук К.С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов //Прикл. математика и механика. — 1986. — **50**, вып. 2. — С. 210–218.
21. *Матвийчук К.С.* Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов //Дифференц. уравнения. — 1986. — **22**, №11. — С. 2001–2004.

22. *Матвийчук К.С.* О технической устойчивости движения панелей в газовом потоке //Прикл. механика и техническая физика. — 1988. — №6. — С. 93–99.

23. *Матвийчук К.С.* Об условиях технической устойчивости динамического процесса, характеризующего вращение твердого тела на вертикальном упругом стержне //Прикл. механика. — 1990. — **26**, №5. — С. 96–102.

24. *Матвийчук К.С.* Техническая теория устойчивости параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1990. — №4. — С. 122–131.

25. *Матвийчук К.С.* Техническая устойчивость процесса движения двух связанных платформ, несущих перемещающиеся маховики //Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1993. — №6. — С. 3–10.

26. *Матвийчук К.С.* Об условиях технической устойчивости управляемых процессов с распределенными параметрами //Укр. мат. журн. —1997. — **49**, №10. — С. 1337–1344.

27. *Пустовойтов Н.А.* О приближенных методах построения функций Ляпунова //Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. — Новосибирск: Наука, 1991. — С. 99–104.

28. *Валеев К.Г., Финин Г.С.* Построение функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1981. — 412 с.

29. *Матвийчук К.С.* Исследование технической устойчивости нелинейных параметрически возбуждаемых систем с распределенными параметрами // Сиб. мат. журн. — 1999. — **40**, №6. — С. 1289–1301.

Одержано 06.01.2000