

# Нелинейные явления при колебаниях кварцевого камертона, погруженного в сверхтекучий гелий

И.А. Гриценко, Т.А. Дубчак, К.А. Михайленко, С.С. Соколов, Г.А. Шешин

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: sheshin@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 12 июля 2017 г., опубликована онлайн 28 ноября 2017 г.

Проведены эксперименты по возбуждению гидродинамических потоков в сверхтекучем гелии при вынужденных колебаниях кварцевого камертона, погруженного в жидкость. Исследованы нелинейные колебания, которые возникают при увеличении вынуждающей силы и проявляются искажением формы резонансной амплитудно-частотной характеристики по сравнению с лоренцевыми кривыми, типичными для предельно малой силы. Нелинейные резонансные кривые описаны с использованием уравнения Дуффинга, параметры которого установлены при сравнении теоретического расчета с экспериментальными данными. Зависимость скорости колебаний ножек камертона от вынуждающей силы, установленная на основании уравнения Дуффинга, оказывается близкой к зависимости, ранее полученной для квазиламинарного течения He II и содержащей кубический по скорости вклад в силу взаимного трения, обусловленную рассеянием фононов на квантованных вихрях в турбулентном потоке.

Проведено експерименти по збудженню гідродинамічних потоків у надплинному гелії при вимушених коливаннях кварцевого камертона, який занурено у рідину. Досліджено нелінійні коливання, які виникають при збільшенні збуджуючої сили та проявляються спотворенням форми резонансної амплітудно-частотної характеристики у порівнянні з лоренцевими кривими, типовими для гранично малої сили. Нелінійні резонансні криві описано з використанням рівняння Дуффінга, параметри якого встановлено при порівнянні теоретичного розрахунку з експериментальними даними. Залежність швидкості коливань ніжок камертона від збуджуючої сили, яку встановлено на підставі рівняння Дуффінга, виявляється близькою до залежності, раніше отриманої для квазіламинарної течії He II, та містить кубічний по швидкості внесок в силу взаємного тертя, яка обумовлена розсіюванням фононів на квантованих вихорах у турбулентному потоці.

PACS: 67.25.dk Вихри и турбулентность;  
67.25.dg Транспорт, гидродинамика и сверхтекучесть;  
67.25.dm Двухжидкостная модель, феноменология.

Ключевые слова: кварцевый камертон, турбулентность в жидком гелии, рассеяние фононов на квантованных вихрях.

## 1. Введение

В последние десятилетия основным методом исследования зарождения и развития турбулентности в сверхтекучем гелии является метод пробного колеблющегося тела, причем наиболее широко в качестве такого тела используется кварцевый камертон [1]. Основным достоинством камертона является высокая добротность  $\sim 10^6$ , прочность и возможность промышленного изготовления. Для повышения предела чувствительности стараются избегать акустического излучения камертоном путем уменьшения отношения размера ячейки к

длине излучаемой акустической волны [2,3], снижения резонансной частоты и геометрических размеров ножек камертона.

С помощью миниатюрных кварцевых камертонов [4] оказалось возможным проводить исследования зарождения и развития сверхтекучей турбулентности в He II вплоть до температур  $\sim 20$  мК [5]. Оказалось, что при таких температурах и амплитуде скорости движения ножек камертона более чем 0,02 м/с колебания ножек становятся нелинейными, что проявляется в искажении формы амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), которое можно описать в модели нелинейного осцил-

лятора Дуффинга. В работе [5] были приведены аргументы в пользу того, что нелинейный режим колебаний обусловлен влиянием присоединенной массы, увлекаемой квантованными вихрями, которые находятся в тонком пристеночном слое поверхности камертона.

В работе [6] с помощью миниатюрных камертонов исследовались турбулентные течения He II при температурах 140 и 150 мК. Оказалось, что при скоростях колебания больше 0,04 м/с наблюдается отклонение от линейной зависимости скорости колебаний камертона от возбуждающей силы. Было выдвинуто предположение, что такое отклонение обусловлено появлением дополнительной, нелинейной по скорости силы трения — силы взаимного трения, обусловленной рассеянием тепловых возбуждений на корах квантованных вихревых линий.

Интересным и принципиальным представляется вопрос о связи между нелинейным режимом колебаний ножек камертона и изменением вида зависимости скорости колебания от возбуждающей силы при увеличении этой силы. Установление и исследование такой связи является целью настоящей работы, которая является продолжением исследований, проведенных в [6].

## 2. Методика проведения измерений

Эксперименты проводились с использованием миниатюрного кварцевого камертона, любезно предоставленного нам лабораторией университета Ланкастера. Этот камертон использовали в работе [6] (камертон K28), его резонансная частота в вакууме составляет 24983,72 Гц. Длина ножки камертона ( $L$ ) составляла около  $1,8 \cdot 10^{-3}$  м, толщина ( $M$ ) и ширина ( $H$ ) ножки были 75 и 90 мкм соответственно. Ячейка и методика измерений были подробно описаны в работах [6,7]. Исследования проводились с помощью рефрижератора растворения в двух рабочих режимах.

1. При откачке  $^4\text{He}$  из одноградусной ванны и сконденсированном рабочем растворе рефрижератора растворения. В этом режиме, который использовался для определения постоянной камертона, ячейка охлаждалась до  $T = 1,4$  К.

2. При работающем рефрижераторе растворения, когда температура ячейки и исследуемой жидкости в разных экспериментах составляла 140 мК.

Температура измерялась термометрами сопротивления  $\text{RuO}_2$ , расположенными на плите камеры растворения рефрижератора и непосредственно в исследуемой жидкости. Термометры калибровались с помощью кристаллизационного термометра, основанного на измерении давления на кривой плавления  $^3\text{He}$ . Точность измерения и стабилизации температуры была  $\pm 1$  мК. Стабилизация температуры осуществлялась с помощью нагревателя, соединенного обратной связью с измерителем сопротивления CryoBridge S72A.

## 3. Экспериментальные результаты

В начале эксперимента проводились измерения АЧХ кварцевого камертона в вакууме при различных возбуждающих силах и  $T = 1,4$  К. Ввиду высокой добротности камертона производили сканирование по частоте с шагом  $10^{-4}$  Гц и с временем выжидания каждого шага 2–3 с. Синусоидальный сигнал постоянной амплитуды  $U$ , подаваемый с генератора на один из электродов ножек камертона, задавал величину возбуждающей силы, которая определялась с помощью выражения  $F_0 = aU/2$ . На другом электроде измерялась частотная зависимость амплитуды колебаний тока  $I$ , связанная со скоростью колебаний ножек камертона  $v = I/a$ . Пьезоэлектрическую постоянную камертона  $a$  определяли из АЧХ, измеренной в вакууме, с помощью соотношения

$$a = \sqrt{4\pi m_q \frac{I_0 \Delta f}{U}},$$

где  $I_0$  — амплитуда тока на резонансной частоте,  $m_q = 0,24267\rho_q(LWT)$ ,  $\rho_q = 2659$  кг/м<sup>3</sup> — плотность кварца, а  $\Delta f$  — ширина резонанса [5,6]. Значение пьезоэлектрической постоянной камертона изменялось от эксперимента к эксперименту в пределах  $\pm 5\%$ , ее среднее значение составляло  $8,77 \cdot 10^{-7}$  Кл/м.

На рис. 1 показаны АЧХ для камертона в вакууме, полученные при различных возбуждающих силах.

На рис. 1 хорошо видно, что при больших возбуждающих силах и, соответственно, больших амплитудах напряжения  $U$  наблюдается нелинейный режим колебаний, проявляющийся в искажении формы АЧХ, причем резонансная частота уменьшается с увеличением возбуждающей силы. Максимальная возбуждающая

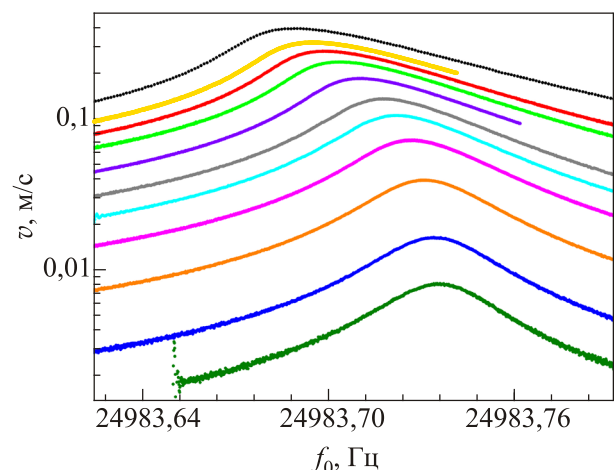


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Амплитуды скорости колебаний ножек камертона в вакууме при различных возбуждающих силах. Снизу вверх:  $1,51 \cdot 10^{-11}$ ,  $3,02 \cdot 10^{-11}$ ,  $7,56 \cdot 10^{-11}$ ,  $1,51 \cdot 10^{-10}$ ,  $2,27 \cdot 10^{-10}$ ,  $3,02 \cdot 10^{-10}$ ,  $4,54 \cdot 10^{-10}$ ,  $6,05 \cdot 10^{-10}$ ,  $7,56 \cdot 10^{-10}$ ,  $9,07 \cdot 10^{-10}$ ,  $1,21 \cdot 10^{-9}$  Н.

сила составляла  $1,21 \cdot 10^{-9}$  Н, при этом скорость колебаний в резонансе была 0,4 м/с, а резонансная частота уменьшилась на 0,048 Гц по сравнению со значением при минимальной возбуждающей силе. После измерений в вакууме рефрижератор растворения охлаждался до  $T < 1$  К, и исследуемый  $^4\text{He}$  через азотную, гелиевую ловушки и капилляр заполнения конденсировался в ячейку. Методика проведения измерений в гелии подробно описана в работе [6].

Экспериментальные зависимости скорости колебаний ножек камертона от возбуждающей силы при температуре 140 мК, полученные в разных экспериментах, приведены на рис. 2. Как видно на рис. 2, при скоростях колебаний  $v \geq 0,046$  м/с начинается заметное отклонение  $v(F_0)$  от линейной зависимости, показанной сплошной линией. Как предполагалось в работе [6], это отклонение обусловлено появлением дополнительной силы трения, возникающей вследствие роста плотности квантованных вихрей и рассеяния тепловых возбуждений — фононов — на их корках (взаимное трение) [7]. Течение гелия с таким отклонением  $v(F_0)$  от линейной зависимости в работе [6] было названо квазиламинарным, течением с новым диссипативным механизмом, появившимся за счет рассеяния тепловых возбуждений квантованными вихрями.

Сила взаимного трения оказывается пропорциональной кубу скорости ножек:  $F_0 \sim v^3$ , что характерно для турбулентного течения (пунктирная линия на рис. 2). В результате общая сила трения имеет вид [6,8]:  $F_0 = \lambda_q v + n v^3$  (сплошная и штрихпунктирная линии), где  $\lambda_q = 1,32 \cdot 10^{-9}$  кг/с и  $n = 4,62 \cdot 10^{-8}$  кг·с/м<sup>2</sup> и хорошо описывает экспериментальные данные. При температуре эксперимента 140 мК первое слагаемое, как было показано в [8], полностью определяется силой трения в

материале камертона и обусловлено изгибными колебаниями его ножек.

Следует также отметить, что при переходе от линейной к кубической зависимости экспериментальные данные свидетельствуют о возникновении спонтанных многочисленных скачков между ламинарным и турбулентным режимами течения.

Все амплитуды скорости колебаний были измерены в максимуме резонансных кривых. В то же время сами резонансные кривые с увеличением возбуждающей силы искажаются при наличии нелинейной дополнительной силы трения. В этой связи целесообразно проанализировать вид АЧХ кривых при квазиламинарном режиме течения.

Для такого анализа зависимость  $v(F_0)$  на рис. 2 оказывается удобным условно разделить на пять областей, характеризующихся специфическим видом АЧХ: I — область ламинарного потенциального течения He II; характерная для этой области АЧХ приведена на рис. 1 работы [6] и описывается лоренцианом. АЧХ для области II приведена на рис. 2(a) работы [6]. Как уже отмечалось, эта область характеризуется спонтанными скачками между ламинарным потенциальным и турбулентным течениями. Область III ранее, в том числе в работе [6], не анализировалась. Соответствующая этой области АЧХ приведена на рис. 3 для частот в районе максимума резонансной кривой. Сканирование по частоте проводилось с шагом 0,01 Гц, время ожидания после каждого шага составляло 200 с. На рис. 3 видно, что АЧХ несимметрична относительно максимума резонансной кривой, причем наблюдается «завал» в сторону более низких частот. Несимметричность кривой АЧХ увеличивается с возрастанием прикладываемой возбуждающей силы до тех пор, пока на резонансной

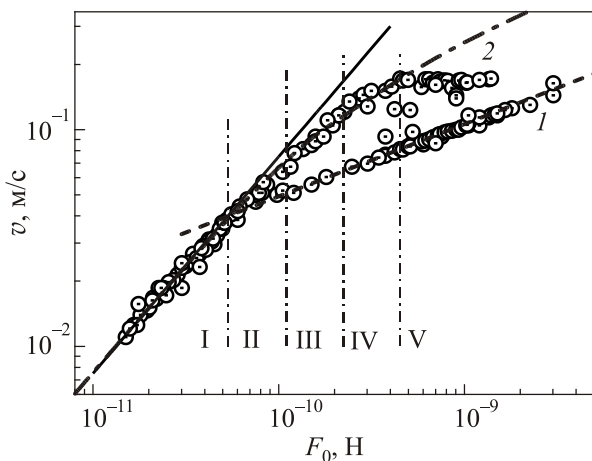


Рис. 2. Зависимость скорости колебаний ножек камертона от возбуждающей силы при  $T = 140$  мК. Сплошная линия — линейная зависимость  $v \sim F_0$ . Турбулентный режим течения ( $v^3 \sim F_0$ ) (1), расчет с учетом силы взаимного трения [6] (2).

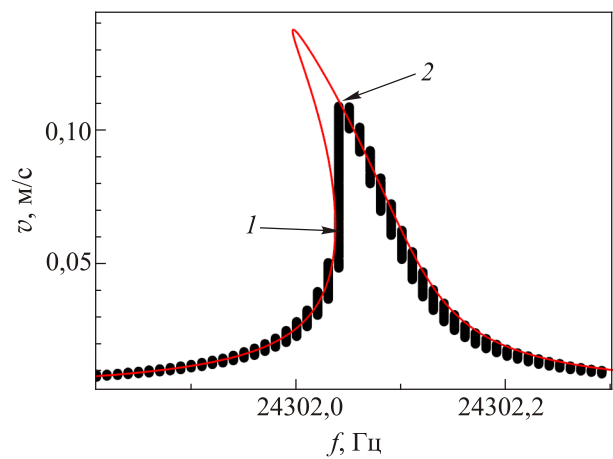


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Амплитудно-частотная характеристика камертона для области III при возбуждающей силе  $F_0 = 1,87 \cdot 10^{-10}$  Н. Сплошная кривая — расчет с использованием нелинейного уравнения Дуффинга. 1 и 2 — точки начала и конца неустойчивости резонансной кривой.

кривой не появляется неустойчивость, соответствующая скачку между точками 1 (начало неустойчивости) и 2 (ее конец) на рис. 3. Необходимо подчеркнуть, что в областях II и III «срыв» квазиламинарного течения в турбулентный режим течения, наблюдаемый в виде резкого уменьшения скорости колебаний, происходит не всегда. Так, на рис. 3 показана АЧХ, измеренная при устойчивом квазиламинарном режиме течения без перехода к турбулентности.

В областях IV и V вид резонансных кривых качественно одинаков, и в этих областях срыв в турбулентное течение наблюдался в каждом из проведенных экспериментов. Для области IV кривая приведена на рис. 2(б) работы [6], а для области V — на рис. 4 настоящей работы.

Как показано на рис. 4, в области V форма резонансной кривой сильно искажается по сравнению с лоренцианом, а на рис. 2 видно, что в максимуме АЧХ скорость колебаний ножек камертона перестает зависеть от прикладываемой силы.

О том, что нелинейность колебаний ножек камертона в областях II–V возникает, по-видимому, из-за появления дополнительной нелинейной силы взаимного трения в He II, в отличие от измерений в вакууме. При измерениях в вакууме амплитуда скорости была почти в три раза больше, чем максимальная амплитуда колебаний в He II (см. рис. 1), но при этом не наблюдалось столь заметно выраженной нелинейности колебаний (искажения формы АЧХ). Таким образом, можно утверждать, что нелинейность колебаний ножек камертона, наблюдаемая в He II, обусловлена нелинейной силой трения в жидкости, в которой колеблется камертон. Аналогичный вывод был сделан в работе [5].

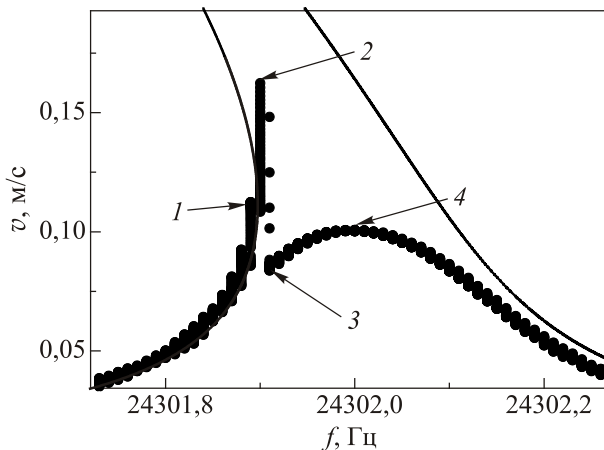


Рис. 4. Характерная АЧХ для области V при возбуждающей силе  $F_0 = 1,07 \cdot 10^{-9}$  Н. Сплошная кривая — расчет с использованием нелинейного уравнения Дуффинга. 1 — начало неустойчивости колебаний камертона, 2 — «срыв» в турбулентный режим, показанный точкой 3, и 4 — максимум скорости колебаний ножек камертона при турбулентном течении соответствует экспериментальным данным рис. 2.

#### 4. Результаты и обсуждение

Как отмечалось выше и как видно на рис. 2 работы [6], а также на рис. 3 и 4 настоящей работы, увеличение возбуждающей силы, вызывающей колебания ножек камертона, приводит к нелинейности колебаний, что проявляется в искажении формы АЧХ вплоть до появления неустойчивости колебаний и уменьшении их резонансной частоты. Для описания указанных эффектов используем нелинейное уравнение Дуффинга [9], которое при наличии возбуждающей силы записывается в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) + \mu x^3 = \frac{F(t)}{m}, \quad (1)$$

где  $x$  — отклонение положения ножки камертона от равновесия под действием возбуждающей силы  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ ,  $\omega_0$  — резонансная частота камертона,  $\gamma = 2\pi\Delta f$  — затухание и  $\Delta f$  — ширина резонансной линии,  $m$  — эффективная масса ножки камертона и  $\mu x^3$  — слагаемое, ответственное за нелинейное поведение осциллятора,  $\mu$  — коэффициент нелинейности. Данное слагаемое приводит к сдвигу резонансной частоты по сравнению с  $\omega_0$ . Причем, в зависимости от знака  $\mu$  резонансная частота колебаний смещается в сторону или больших, или меньших частот. В настоящих экспериментах резонансная частота колебаний уменьшается, что соответствует  $\mu < 0$ .

Решая (1), получаем следующее уравнение для модуля амплитуды скорости колебаний:

$$v = \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_V^2 - \omega^2 - \omega b v^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}, \quad (2)$$

где  $\omega_V$  и  $\omega$  — резонансная частота колебаний камертона в вакууме и текущая частота, а  $b v^2$  — множитель, согласно [10], зависящий от квадрата амплитуды колебаний, коэффициент  $b$  связан с коэффициентом нелинейности в (1) соотношением  $\mu = \frac{2}{3} \omega_0^3 b$ .

Зависимость скорости  $v$  от частоты нелинейных колебаний АЧХ, рассчитанная с использованием (2), приведена на рис. 5 при постоянном значении  $b = 40$  с/см<sup>2</sup>, которое, как будет видно в дальнейшем, близко к среднему значению в данных экспериментах. Видно, что уже при малых возбуждающих силах АЧХ имеет легкую несимметричность, обусловленную нелинейностью колебаний (пунктирная линия,  $F_0 = 1,5 \cdot 10^{-10}$  Н). С увеличением возбуждающей силы скорость увеличивается, и нелинейность колебаний проявляется все сильнее (штрихпунктирная кривая, которая проведена для  $F_0 = 3 \cdot 10^{-10}$  Н), что приводит к уменьшению резонансной частоты и появлению неустойчивостей (точки 1 и 3). Неустойчивость появляется в точке 1, если дви-

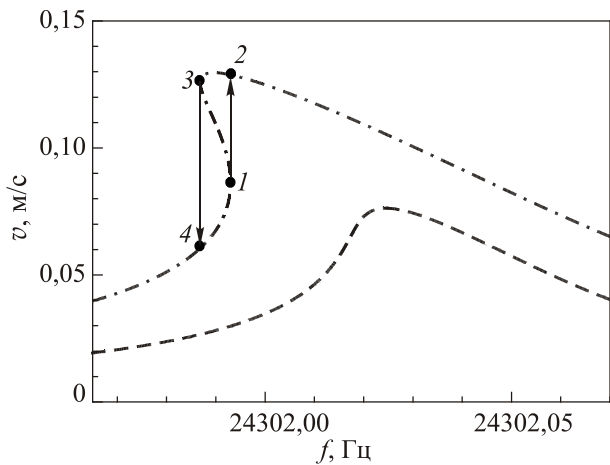


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики, рассчитанные с использованием (2): пунктирная линия — расчет для  $F_0 = 1,5 \cdot 10^{-10}$  Н и  $b = 40$  с/см<sup>2</sup>; штрихпунктирная линия — для  $F_0 = 3 \cdot 10^{-10}$  Н и  $b = 40$  с/см<sup>2</sup>. Стрелками показаны скачки амплитуды колебаний при появлении неустойчивости.

гаться по частоте слева направо к точке 1, дальнейшее движение по частоте происходит вправо от точки 2. При движении по частоте в обратном направлении (справа налево) неустойчивость, как можно было бы ожидать, должна наступить в точке 3, причем дальнейшее движение по кривой в сторону меньших частот продолжится от точки 4 (гистерезис). Но, как было показано в [5], измерения АЧХ при движении от больших частот к меньшим и обратно дают практически один и тот же результат. Причина этого непонятна и для ее выяснения требуются дополнительные исследования. Можно предположить, что нелинейное поведение системы камертон–сверхтекучая жидкость, описываемое с помощью нелинейного члена в (2), связано, главным образом, с наличием жидкости и процессами в ней, а если бы нелинейное поведение было связано со свойствами самого камертона, то неустойчивость в точке 3 на рис. 5 при уменьшении частоты наблюдалась бы.

Необходимо также отметить, что величина  $b$  в (2) оказывает сильное влияние на вид АЧХ, определяемой с помощью этого уравнения. Значение  $b$  устанавливали путем сравнения расчетной АЧХ с экспериментальными данными для АЧХ, измеренными при различных возбуждающих напряжениях при соответствующих экспериментальным данным  $\omega_V$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $m$  и  $F_0$ . При этом  $b$  является единственным подгоночным параметром. Таким образом, подбирая значение коэффициента  $b$ , можно было получить согласие с экспериментально полученными резонансными кривыми. Сплошные линии на рис. 3 и 4 являются результатом подобных расчетов.

Оказывается, что при возбуждающих силах, соответствующих областям II, III, и IV, резонансные кривые хорошо описываются целиком, а при возбуждаю-

щих силах, соответствующих области V, коэффициент  $b$  определяется по данным левее точки 1. В этой области при завершении неустойчивости (точка 2 на рис. 5) величина скорости была всегда ниже значения в точке 2 и не совпадала со значениями, соответствующими правой части расчетной резонансной кривой. Напомним, что, как видно на рис. 2, скорость в точке 2 области V практически постоянна и не зависит от силы.

Полученные значения  $b$  показаны на рис. 6 для АЧХ, явившихся результатом всех измерений. Интервал изменения возбуждающей силы на рис. 6 соответствует области значений возбуждающих сил на рис. 2. На рисунке хорошо видно, что имеется большой разброс значений  $b$ . Сплошная линия отвечает среднему значению  $b = 35,5$  с/м<sup>2</sup>, соответствующее среднее значение коэффициента нелинейности  $\mu$  составляет  $9,2 \cdot 10^{16}$  с<sup>-2</sup>·м<sup>-2</sup>. При этом на значение  $b$  сильное влияние оказывает точность измерения частоты. Коэффициент нелинейности можно определить также из данных [6], где он представлен в виде  $\mu = n (\omega_0^3/m)$ . В этом случае  $\mu = 2,5 \cdot 10^{16}$  с<sup>-2</sup>·м<sup>-2</sup>, что более чем в три раза меньше вышеприведенного значения, полученного в настоящей работе. Столь заметное различие между значениями  $\mu$  в настоящей работе и в [6] может быть связано с тем, что не учитывалась зависимость коэффициента затухания  $\gamma$  от геометрии колеблющегося в жидкости тела [9].

Для определения влияния возбуждающей силы на амплитуду скорости ножек камертона в нелинейном режиме с помощью уравнения (2) были рассчитаны АЧХ для разных возбуждающих напряжений и сил. Определялось значение скорости, соответствующее окончанию неустойчивости — точка 2 на рис. 5, отвечающая максимуму скорости. Если неустойчивость отсутствовала, то скорость бралась в максимуме на резонансной частоте АЧХ. Таким образом, была получена зависимость  $v(F_0)$ , позволяющая проводить сравнение с экспериментальными данными. Наилучшее согласие между расчет-

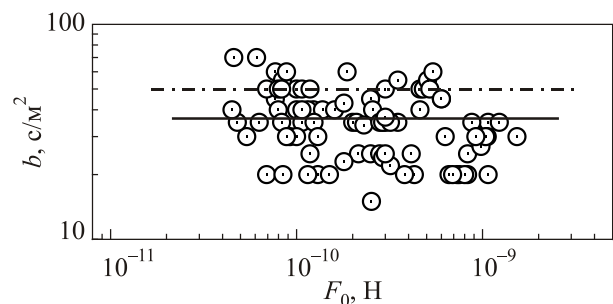


Рис. 6. Множитель  $b$ , определенный из экспериментальных данных по зависимости скорости колебаний от возбуждающей силы с использованием нелинейного уравнения Дuffинга. Сплошная линия — среднее значение во всем интервале возбуждающих сил. Штрихпунктирная линия проведена для  $b = 50$  с/м<sup>2</sup>.

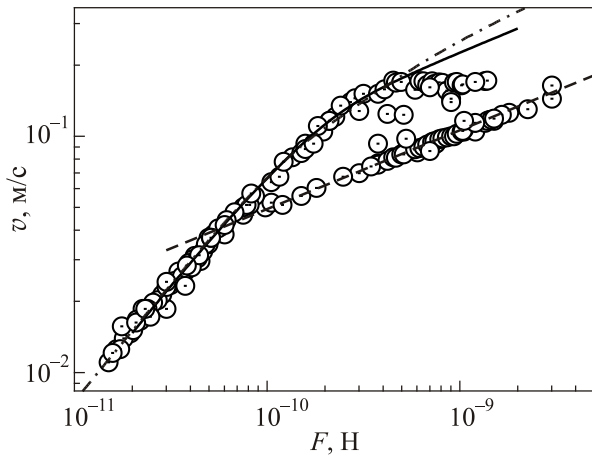


Рис. 7. Зависимость скорости колебаний ножек камертона от возбуждающей силы.

ными и экспериментальными данными достигалось при  $b = 50 \text{ с/м}^2$ , расчет приведен на рис. 7 сплошной линией. Штрихпунктирной линией на рис. 7 показана зависимость, учитывающая вклад взаимного трения, кубического по скорости, в диссипативные процессы в дополнение к линейному вкладу [6], пунктирная линия соответствует турбулентному течению, когда  $F_0 \sim v^3$ . Как видно на рисунке, при учете нелинейности колебаний (искажение формы резонансной кривой) амплитуда скорости в зависимости от прикладываемой силы является нелинейной функцией. Также имеется хорошее согласие экспериментальных данных и расчета, проведенного с использованием уравнения Дуффинга (сплошная линия на рис. 7). Линия проведена с использованием коэффициента пропорциональности  $b$ , на 30% большего его среднего значения на рис. 6. Заметим, что это значение находится в пределах разброса значений  $b$ . Таким образом, оказывается, что экспериментальные данные на рис. 7 могут быть описаны как с использованием решения уравнения Дуффинга, так и при учете кубического члена в выражении для силы взаимного трения.

В области V при относительно больших возбуждающих силах экспериментальные данные свидетельствуют, что скорость не зависит от возбуждающей силы (см. рис. 2). Этот тип АЧХ с помощью уравнения Дуффинга можно описать только левее точки I.

### Выводы

Проведены исследования нелинейных явлений, сопровождающих колебания кварцевого камертона, погруженного в сверхтекучий гелий. Нелинейность колебаний ножек камертона проявляется в искажении формы резонансной кривой для амплитудно-частотной характеристики камертона. Показано, что нелинейная АЧХ хорошо описывается с помощью уравнения Дуффинга

для нелинейного осциллятора, с помощью которого установлена зависимость скорости колебаний ножек от возбуждающей силы. Оказалось, что эта же зависимость может быть получена, если добавить слагаемое, кубическое по скорости, в выражение для силы взаимного трения при квазиламинарном режиме течения жидкости. Это слагаемое обусловлено рассеянием фононов на квантованных вихрях с He II, чья плотность возрастает с увеличением частоты колебаний. Кроме того, такое поведение также может свидетельствовать об увеличении присоединенной массы или уменьшении пластичности колеблющегося камертона из-за появления квантованных вихрей, закрепленных на поверхности квантового камертона.

Таким образом, результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что нелинейность колебаний камертона связана, главным образом, с диссипативными процессами в сверхтекучей жидкости, в которой камертон колеблется, что сопровождается появлением нелинейного слагаемого в зависимости скорости колебаний его ножек от величины вынуждающей силы.

Авторы благодарят Э.Я. Рудаковского за полезные дискуссии. Мы также признательны группе сверхнизких температур из университета Ланкастер (Великобритания) за предоставленные кварцевые камертоны. Исследования были частично поддержаны научно-исследовательским проектом молодых ученых НАН Украины (№ 2/Н-2017).

1. D.O. Clubb, O.V.L. Buu, R.M. Bowley, R. Nyman, and J.R. Owers-Bradley, *J. Low Temp. Phys.* **136**, 1 (2004)
2. D. Schmoranzner, M. La Mantia, G. Sheshin, I. Gritsenko, A. Zadorozhko, M. Rotter, and L. Skrbek, *J. Low Temp. Phys.* **163**, 317 (2011).
3. И.А. Гриценко, Г.А. Шешин, *ФНТ* **40**, 1028 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 802 (2014)].
4. D. Bradley, M. Človečko, S.N. Fisher, D. Garg, E. Guise, R.P. Haley, O. Kolosov, G.R. Pickett, and V. Tsepelin, *Phys. Rev. B* **85**, 014501-1 (2012).
5. D. Schmoranzner, M.J. Jackson, V. Tsepelin, M. Poole, A.J. Woods, M. Človečko, and L. Skrbek, *Phys. Rev. B* **94**, 214503 (2016).
6. И.А. Гриценко, К.А. Клокол, С.С. Соколов, Г.А. Шешин, *ФНТ* **42**, 211 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 163 (2016)].
7. E.B. Sonin, *Phys. Rev. B* **55**, 485 (1997).
8. И.А. Гриценко, К.А. Клокол, С.С. Соколов, Г.А. Шешин, *ФНТ* **42**, 28 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 21 (2016)].
9. В.В. Астахов, С.А. Коблянский, А.В. Шабунин, *Осциллятор Дуффинга, Учебное пособие для студентов вузов*, Изд.-во Саратовского университета (2007), с. 52.
10. И.А. Гриценко, А.А. Задорожко, А.С. Неонета В.К. Чаговец, Г.А. Шешин, *ФНТ* **37**, 695 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 551 (2011)].

**Nonlinear phenomena in the vibrations of a quartz tuning fork immersed in superfluid helium**

**I.A. Gritsenko, T.A. Dubchak, K.A. Mykhailenko, S.S. Sokolov, and G.A. Sheshin**

Experiments have been carried out on the excitation of hydrodynamic flows in superfluid helium under forced vibrations of a quartz tuning fork immersed in a liquid. Nonlinear oscillations that arise with an increase in the driving force are investigated and are manifested by distortion of the shape of the resonant amplitude-frequency characteristic in comparison with Lorentz curves typical for an extremely small force. Nonlinear resonance curves are described using the Duffing equation, the parameters of which are es-

tablished by comparing the theoretical calculation with the experimental data. Dependence of the velocity of vibrations of the tuning fork legs on the driving force established with the use of the Duffing equation is close to the dependence previously obtained for the quasi-laminar flow of He II and containing a cubic velocity contribution due to the mutual friction caused by scattering of phonons by quantized vortices in a turbulent flow.

PACS: 67.25.dk Vortices and turbulence;  
67.25.dg Transport, hydrodynamics,  
and superflow;  
67.325.dm Two-fluid model; phenomenology.

Keywords: quartz tuning fork, turbulence in liquid helium, scattering of phonons by quantized vortices.