

# Динамика плотности вихревых линий и процессы теплопередачи в сверхтекучем гелии

Л.П. Кондаурова

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, пр. Ак. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,*

*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия*

E-mail: louisa@ngs.ru

Статья поступила в редакцию 24 августа 2017 г., опубликована онлайн 28 ноября 2017 г.

Проанализированы три уравнения динамики плотности вихревых линий. Показано, что уравнение Вайнена дает значения времени развития вихревого клубка в случае постоянного противотока более корректно, чем другие альтернативные уравнения. В рамках системы уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности, полученной при феноменологическом подходе, найдены времена вскипания гелия от плотности теплового потока при использовании альтернативных уравнений динамики плотности вихревого клубка. В отличие от экспериментов, в которых наблюдаются различные зависимости времени вскипания  $t_{\text{boil}}$  от плотности теплового потока  $Q$  ( $t_{\text{boil}} \propto Q^n$ ,  $-4 \leq n \leq -2$ ), в данном случае получается только степенная зависимость с показателем степени  $n = -4$ . Получено распределение скорости нормальной компоненты вдоль канала, зависимость температуры от времени вблизи нагревателя. Проведено сравнение с численными и экспериментальными результатами, ранее полученными в литературе.

Проаналізовано три рівняння динаміки щільності вихрових ліній. Показано, що рівняння Вайнена дає значення часу розвитку вихрового клубка у разі постійної протитечі коректніше, ніж інші альтернативні рівняння. У рамках системи рівнянь гідродинаміки надплинної турбулентності, яку отримано при феноменологічному підході, знайдено часи скипання гелію від щільності теплового потоку при використанні альтернативних рівнянь динаміки щільності вихрового клубка. На відміну від експериментів, в яких спостерігаються різні залежності часу скипання  $t_{\text{boil}}$  від щільності теплового потоку  $Q$  ( $t_{\text{boil}} \propto Q^n$ ,  $-4 \leq n \leq -2$ ), в даному випадку виходить тільки степеневе залежність з показником степені  $n = -4$ . Отримано розподіл швидкості нормальної компоненти уздовж каналу, залежність температури від часу поблизу нагрівача. Проведено порівняння з чисельними і експериментальними результатами, які раніше отримані у літературі.

PACS: 67.25.dk Вихри и турбулентность;

47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести; квантовые жидкости;

03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, сверхтекучий поток.

Ключевые слова: сверхтекучесть, вихревая структура, квантовая турбулентность.

## 1. Введение

При температуре ниже точки фазового перехода  $T_\lambda$  поведение жидкого гелия становится необычным, с уникальными свойствами переноса тепла [1–9]. Существование квантовой турбулентности (вихревой клубок, состоящий из квантованных вихревых нитей с радиусом ядра  $a_0 \approx 10^{-8}$  см и с циркуляцией скорости сверхтекучей компоненты  $\kappa = h/m_4\text{He} = 9,997 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ , где  $h$  — постоянная Планка,  $m_4\text{He}$  — масса атома гелия)

является одним из любопытных проявлений квантовых эффектов. Развитие вихревого клубка в сверхтекучем гелии приводит к разнообразным экзотическим явлениям. При исследовании квантовой турбулентности можно грубо выделить два направления. В первом случае изучаются структура, статистические микроскопические и макроскопические свойства вихревого клубка при заданных внешних физических условиях. В другом случае структура вихревого клубка не рассматривается, а вводится новая гидродинамическая переменная: плотность вихревого клубка  $\mathcal{L}(t)$  (длина вихревых нитей в единичном объеме), которая является одной из

главных характеристик квантовой турбулентности. В этом случае изучаются макроскопические свойства квантовой турбулентности на масштабах  $d \gg l$ , где  $l \simeq 1/\mathcal{L}^{1/2}(t)$  — характерное межвихревое расстояние. Оба подхода при изучении квантовой турбулентности, несомненно, дополняют друг друга. Кроме актуальности чисто теоретического изучения свойств вихревой системы, также на сегодняшний день остаются актуальными исследования и прикладных задач, например исследование теплопереноса в сверхтекучем гелии. Так, в криогенной системе коллайдера LHC в ЦЕРНе охлаждают дипольные и квадрупольные магниты до температуры 1,9 К (температура сверхтекучего гелия). Кроме того, сверхмощные магниты и СКВИДы (сверхпроводящие квантовые интерферометры) нашли широкое применение. При создании сверхпроводящих устройств, для обеспечения безаварийной их работы, необходимо знать динамические характеристики, которые определяют скорость перехода к аварийному режиму, которая, в свою очередь, во многом определяется характером развития квантовой турбулентности, как это показано в работе [10].

Изучению динамики вихревого клубка посвящено множество экспериментальных и теоретических работ, часть из которых будет описана ниже. Недавно в работе [11] предложено еще одно уравнение для  $\mathcal{L}(t)$ . В итоге на сегодняшний день для зависимости роста плотности вихревого клубка от скорости противотока  $v_{ns} = v_n - v_s$  ( $v_n, v_s$  — скорости нормальной и сверхтекучей компонент соответственно) существует три типа зависимостей:  $\mathcal{L}(t) \sim |v_{ns}^3|$ ,  $\mathcal{L}(t) \sim |v_{ns}^2|$ ,  $\mathcal{L}(t) \sim |v_{ns}|$ . Целью данной работы является попытка разобраться в том, а какая из них наиболее адекватно описывает динамику вихревого клубка. Во-первых, как согласуются между собой времена развития вихревой системы от некоторого фонового значения  $\mathcal{L}_{\text{фон}}$  до значения плотности вихревого клубка в стационарном состоянии  $\mathcal{L}_{\text{ст}}$ , согласно уравнениям, содержащим упомянутые выше зависимости. Далее, полученные значения этих времен сравнить с результатами, полученными в работе [12], в которой была исследована динамика вихревых петель, а также различные свойства вихревого клубка в стационарном состоянии в рамках метода вихревой нити с использованием полного уравнения Био–Савара. Во-вторых, в рамках системы уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности, полученной при феноменологическом подходе [13], определить зависимости времени вскипания гелия от подаваемой на нагреватель плотности теплового потока  $Q = \rho_s \sigma T v_{ns}$  ( $\rho_s$  — плотность сверхтекучей компоненты,  $T$  — температура гелия,  $\sigma$  — удельная теплоемкость) при использовании различных уравнений динамики плотности вихревого клубка. Затем определить, насколько эти полученные зависимости соотносятся с экспериментальными данными. Дело в том, что в различных экспериментах (см., например, [14–18]) наблюдаются различные зависимости времени вскипания  $t_{\text{boil}}$  от плотности теплового потока  $Q$  ( $t_{\text{boil}} \propto Q^n$ ,  $-4 \leq n \leq -2$ ).

## 2. Гидродинамика сверхтекучего гелия и уравнения динамики плотности вихревого клубка

Гидродинамика сверхтекучего гелия построена в терминах двухжидкостной модели [19,20], суть которой состоит в том, что в сверхтекучем гелии могут существовать одновременно два движения: нормальное и сверхтекучее. Каждое из этих движений связано со своей эффективной массой. Сумма этих масс равна полной истинной массе жидкости. Сверхтекучее движение — это потенциальное, безэнтропийное движение, в нем отсутствует сдвиговая вязкость, движущей силой для него является градиент химического потенциала. При подведении к нагревателю постоянного теплового потока в объеме жидкого гелия возникает встречное движение нормальной и сверхтекучей компонент гелия. При этом нормальная компонента движется от нагревателя, унося с собой энергию, т.е. возникает противоток, развивается внутренняя конвекция. Отметим еще раз, что тепло переносится только нормальной компонентой, при этом полный поток массы  $\mathbf{j} = \rho_n v_n + \rho_s v_s \equiv 0$  ( $\rho_n$  — плотность нормальной компоненты). Сопротивлением нормальному движению является сдвиговая вязкость, которая очень мала. В жидкости устанавливается разность температур, которая пропорциональна тепловому потоку. В эксперименте Гортера–Меллинка [21] было обнаружено, что при превышении некоторого значения теплового потока линейная зависимость градиента температуры сменяется кубической зависимостью. Понятно, что резкое повышение градиента температуры связано с появлением дополнительного сопротивления нормальному движению. Сейчас известно, что это сопротивление связано с развитием хаотического клубка квантованных вихревых нитей (квантовой турбулентности). Согласно теории Фейнмана и Онзагера [22], условие незавихренности может нарушаться на очень тонких трубках, вокруг которых происходит циркуляционное движение сверхтекучей компоненты. Очевидно, что по мере развития вихревого клубка сопротивление нормальному движению увеличивается, соответственно теплоотвод ухудшается, что может привести к перегреву жидкости и к дальнейшему ее вскипанию (см., например, монографию [16]).

При наличии вихревого клубка модель Ландау–Тисса [19,20] была расширена многими исследователями [13,23–26]. В полученные уравнения гидродинамики инкорпорировано уравнение динамики вихревых нитей. Очевидно, что это динамическое уравнение для плотности вихревых нитей является очень важным для понимания и описания турбулентных процессов в сверхтекучем гелии. Впервые уравнение для эволюции плотности вихревого клубка было получено Вайненом [27] в соответствии с процессом, описанным Фейнманом [22]. Фейнман предположил, что кинетическая энергия основного потока передается в увеличение энергии вих-

ревых нитей. Участки вихревой нити, двигаясь со скоростью, отличной от локальной скорости движения сверхтекучей компоненты, испытывают силу Магнуса, направленную перпендикулярно тангенциальному вектору скорости. Вследствие этого изменяется кривизна и, следовательно, длина рассматриваемого участка. В зависимости от ориентации нити, ее кривизны, а также скорости противотока  $v_{ns}$  возможно как растяжение данного элемента, так и его сокращение. Фейнман предположил, что тенденция к росту длины преобладает, т.е. в среднем происходит увеличение длины вихрей. По мере роста длины вихревые нити все плотнее заполняют объем жидкости, и в игру вступают процессы, связанные с их взаимодействием. Взаимодействие вихрей, возникающее в результате пересечения нитей, Фейнман предложил описать моментальной реконнекцией (перезамыканием). В результате реконнекций возможны как слияние мелких петель в большие, так и, напротив, дробление больших вихрей на более меньшие вихри. Далее Фейнманом было сделано следующее предположение, что в среднем осуществляется дробление вихревых петель, т.е. процессы перезамыканий приводят к таким же каскадным процессам, которые наблюдаются в классической турбулентности. Когда масштаб малых колец становится порядка межатомных расстояний, что является конечной стадией каскада, энергия вихрей (первоначально почерпнутой из основного движения) вырождается в тепловое возбуждение. В результате Вайненом было получено следующее выражение для динамики плотности вихревых линий:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right]_{\text{gen}} - \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right]_{\text{dec}} = \alpha_V |v_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения описывает увеличение плотности вихревых нитей, второе описывает ее уменьшение. Понимая важность полученного выражения в связи с использованием его для будущих приложений, а также в связи с неопределенностью относительно строгости теоретического подхода, который привел его к этому уравнению, Вайнен провел ряд экспериментов, чтобы поддержать свою феноменологическую модель и определил коэффициенты  $\alpha_V = \chi_1 B \rho_n / 2\rho$ ;  $\beta_V = \chi_2 \kappa / 2\pi$ . Здесь  $\chi_1, \chi_2$  — безразмерные феноменологические параметры,  $B$  — коэффициент Холла–Вайнена,  $\rho = \rho_n + \rho_s$  — плотность жидкости.

Первая попытка получить количественное описание вихревого клубка в противотоке гелия II принадлежит Шварцу [28]. Шварц ввел функцию распределения полной длины линии  $\lambda(R, \theta, t)$  и получил кинетическое уравнение для  $\lambda$ . Здесь  $R$  — локальный радиус кривизны,  $\theta$  — угол между локальным касательным вектором и скоростью противотока  $v_{ns}$ . Шварц в рамках метода вихревой нити использовал так называемое локально-индуцированное приближение, когда индуцированная

скорость вихревой точки от вихревого клубка определяется только прилегающими сегментами линии, и получил макроскопическое уравнение для  $\mathcal{L}(t)$ , исходя из первых принципов, т.е. из динамических уравнений движения:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \alpha I_l |v_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \alpha c_2^2 \mathcal{L}^2, \quad (2)$$

где  $I_l = l / \mathcal{L}_{\text{tot}} \int_c \hat{r}_{II} (\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') d\xi$ ,  $l = 1 / \mathcal{L}^{1/2}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{tot}}$  — полная длина нитей,  $\hat{r}_{II}$  — единичный вектор, параллельный  $v_{ns}$ ,  $c_2 = \tilde{S} / \mathcal{L}^{1/2}$ ,  $\tilde{S}^2 = \langle |\mathbf{s}''|^2 \rangle = 1 / \mathcal{L}_{\text{tot}} \int_c |\mathbf{s}''|^2 d\xi$ ,  $\mathbf{s}', \mathbf{s}''$  — локальный тангенциальный вектор и вектор локальной кривизны соответственно, параметр  $\xi$  (длина дуги) пробегает значения от 0 до полной длины вихревых нитей.

Уравнения (1) и (2) имеют одинаковую форму. Заметим, что в соответствии с теорией Шварца уменьшение длины вихревых нитей обусловлено силой трения. Уменьшение длины вихревых нитей в соответствии с теорией Фейнмана–Вайнена обусловлено дроблением большого вихря на меньшие вихри, т.е. такими же каскадными процессами, как в классической турбулентности. В реальности, естественно, присутствуют оба процесса.

Многими авторами были получены модернизированные уравнения динамики плотности вихревых нитей (см., например, [11, 29–31]). Все уравнения в случае однородной гомогенной турбулентности и постоянной скорости противотока имеют один из следующих возможных видов:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \alpha |v_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta \mathcal{L}^2, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \alpha_{\text{alt}}^1 |v_{ns}^2| \mathcal{L} - \beta \mathcal{L}^2, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \alpha_{\text{alt}}^2 |v_{ns}^3| \mathcal{L}^{1/2} - \beta \mathcal{L}^2. \quad (5)$$

Напомним, уравнения (3), (4) впервые предложены были Вайненом [27], уравнение (5) — в работе [11]. В стационарной ситуации все эти уравнения имеют один и тот же вид

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{st}}^{1/2} = \gamma |v_{ns}|, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \left( \frac{\alpha_{\text{alt}}^1}{\beta} \right)^{1/2} = \left( \frac{\alpha_{\text{alt}}^2}{\beta} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) получаем следующие связи между коэффициентами:

$$\alpha = \gamma\beta, \quad (8)$$

$$\alpha_{\text{alt}}^1 = \gamma^2\beta, \quad (9)$$

$$\alpha_{\text{alt}}^2 = \gamma^3\beta. \quad (10)$$

Из уравнения (1) получаем, что  $\gamma_v = \pi B \rho_n \chi_1 / \kappa \chi_2$ , из уравнения (2)  $\gamma_s = I_l / c_2^2$ .

Зависимость  $\mathcal{L}_{\text{st}}^{1/2}$  от  $|v_{ns}|$  (см. уравнение (6)) подтверждена в многочисленных экспериментах и теоретических работах. Результаты были получены при различных значениях температуры невозмущенного гелия и скорости противотока. Эксперименты были проведены в трубках, которые имели различные геометрические размеры, форму и были изготовлены из разных материалов: металлические круглые [32–34], стеклянные круглые [35–38], металлические прямоугольные [39–44], стеклянные прямоугольные [45–47]. Полученные значения  $\gamma$  в этих экспериментах отличаются друг от друга. Впервые систематизация экспериментов приведена в [48], где было определено, что существует несколько турбулентных состояний. Два состояния турбулентности Т-I, Т-II наблюдаются в узких трубках малого диаметра (круглые или квадратные). Только одно состояние турбулентности Т-III наблюдается в широких

трубках, а также в трубках, у которых отношение поперечных размеров очень большое (близко к геометрии двух параллельных пластин). В таких трубках плотность нитей имеет, по существу, то же значение, что и в состоянии Т-II. Причины различия значений  $\gamma$  анализируются в работе [49]. В этой работе делается вывод, что состояние Т-I соответствует случаю, когда сверхтекучая компонента жидкости является турбулентной, а течение нормальной компоненты жидкости является ламинарным. В состоянии Т-II движения сверхтекучей и нормальной компонент являются турбулентными.

В расчетных работах, например [12, 50–54], можно найти подтверждение зависимости (6). Численные исследования проводились в рамках метода вихревой нити с использованием полного уравнения Био–Савара и в локально-индуцированном приближении.

### 3. Оценка времени развития вихревого клубка

В прикладных задачах очень важно знать, как быстро вихревой клубок развивается, поскольку с увеличением плотности клубка ухудшается теплопередача. Оценим это время. Проинтегрируем уравнения (3), (4), (5), соответственно получаем следующие значения этих интегралов:

$$t = \frac{\beta}{\alpha v_{ns}} \left( \frac{\ln(\mathcal{L})}{\alpha v_{ns}} - \frac{2}{\beta \mathcal{L}^{1/2}} - \frac{2 \ln(\beta \mathcal{L}^{1/2} - \alpha v_{ns})}{\alpha v_{ns}} \right) \Bigg|_{\mathcal{L}_{\text{ini}}}^{\mathcal{L}_{\text{end}}}, \quad (11)$$

$$t_{\text{alt}}^1 = \frac{\ln(\mathcal{L} / (\gamma^2 v_{ns}^2 - \mathcal{L}))}{\beta \gamma^2 v_{ns}^2} \Bigg|_{\mathcal{L}_{\text{ini}}}^{\mathcal{L}_{\text{end}}}, \quad (12)$$

$$t_{\text{alt}}^2 = \frac{2}{\beta \gamma^2 v_{ns}^2} \left[ \frac{\ln(\mathcal{L} + \gamma v_{ns} \mathcal{L}^{1/2} + \gamma^2 v_{ns}^2)}{6} + \arctg \left( \frac{2 \mathcal{L}^{1/2} + \gamma v_{ns}}{3^{1/2} \gamma v_{ns}} \right) - \frac{\ln(|\mathcal{L}^{1/2} - \gamma v_{ns}|)}{3} \right] \Bigg|_{\mathcal{L}_{\text{ini}}}^{\mathcal{L}_{\text{end}}}. \quad (13)$$

Интегралы (11), (12), (13) расходятся в верхнем пределе при  $\mathcal{L}_{\text{end}} = \mathcal{L}_{\text{st}}$ , т.е.  $t, t_{\text{alt}}^1, t_{\text{alt}}^2 \rightarrow \infty$ . Вблизи  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  увеличение плотности вихревого клубка  $\mathcal{L}$  происходит значительно медленнее. Кроме того, в работе [12] получено, что в стационарном состоянии плотность вихревого клубка флуктуирует возле некоторого среднего значения  $\mathcal{L}_{\text{ave}}$ , соответствующего  $\mathcal{L}_{\text{st}} = \mathcal{L}_{\text{ave}}$ . Поэтому, не теряя общности, будем определять время развития вихревого клубка до своего стационарного значения как время достижения  $\mathcal{L}_{\text{end}} = 0,99 \mathcal{L}_{\text{st}}$  от некоторого фонового значения  $\mathcal{L}_{\text{ini}} = \mathcal{L}_{\text{fon}}$ .

Вайненом [39] была найдена также эмпирическая зависимость для времени развития вихревого клубка до равновесного значения:

$$\tau_v = a_v(T) Q^{-3/2}, \quad (14)$$

значения параметра  $a_v(T)$  были определены в зависимости от температуры  $T$ .

В работе [12] было показано, что значение  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  не зависит от начального значения фоновой плотности вихревого клубка. Для этой цели в данной работе были проведены расчеты динамики  $\mathcal{L}$  при температуре  $T = 1,6$  К и скорости противотока  $v_{ns} = 1,0$  см/с, но при различных начальных условиях. Один из расчетов проведен при значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 1131$  см<sup>-2</sup>, что соответствует конфигурации вихревого клубка, состоящего из 20 колец одинакового радиуса, хаотично расположенных в пространстве. В другом случае вычисления были проведены при значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 4,2 \cdot 10^3$  см<sup>-2</sup>, что соответствуют одной из конфигураций вихревого клубка, полученной в стационарном режиме при  $T = 1,3$  К и  $v_{ns} = 1,0$  см/с. При температуре  $T = 1,6$  К, согласно полученным результатам в [12],  $\mathcal{L}_{\text{st}} = 1,3 \cdot 10^4$  см<sup>-2</sup>,  $\gamma \approx 114,09$  с/см<sup>2</sup>. При данной температуре  $\alpha = 5,36 \cdot 10^{-2}$  (термодинамические данные брались из работы [55]),  $\beta = 4,69$  см<sup>2</sup>/с. Определим при этих па-

раметрах времена развития вихревого клубка из выражений (11)–(14):

при значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 1131 \text{ см}^{-2}$

$$t = 2,75 \text{ с}, t_{\text{alt}}^1 = 1,11 \text{ с}, t_{\text{alt}}^2 = 0,62 \text{ с}, 2,60 \text{ с} \leq \tau_v \leq 11,14 \text{ с}; \quad (15)$$

при значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$

$$t = 1,98 \text{ с}, t_{\text{alt}}^1 = 0,96 \text{ с}, t_{\text{alt}}^2 = 0,60 \text{ с}. \quad (16)$$

Для наглядного сравнения полученных времен с расчетными данными [12] на рис. 1 концы синих длинных стрелок показывают на горизонтальной оси полученные значения времен (15), концы зеленых коротких стрелок — (16). На этом же рисунке приведены временные зависимости плотности вихревого клубка из [12]. Очевидно, что значения времен  $t$  и  $\tau_v$  наиболее адекватно согласуются с результатами работы [12] (см. рис. 1).

Аналогичные вычисления проведены были нами и при температуре  $T = 1,3 \text{ К}$  ( $\gamma \approx 72,0 \text{ с/см}^2$ ) и скорости противотока  $v_{ns} = 1 \text{ см/с}$ . Были получены следующие значения времен развития вихревого клубка из выражений (11)–(14) при значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 1131 \text{ см}^{-2}$ :

$$t = 10,09 \text{ с}, t_{\text{alt}}^1 = 4,51 \text{ с}, t_{\text{alt}}^2 = 2,72 \text{ с}. \quad (17)$$

На рис. 2, как и на рис. 1, концы стрелок показывают на горизонтальной оси полученные значения времен (17). На этом же рисунке для наглядности сравнения приведена временная зависимость плотности вихревого клубка из [12]. Очевидно, что значение времени  $t$  и в этом случае наиболее адекватно согласуется с результатами работы [12] (см. рис. 2). Заметим, что выражение (13) дает сильно заниженные времена развития вихревого клубка.

Согласно полученным выражениям (11)–(13), мы определили времена развития квантовой турбулентности при температурах 1,3, 1,6, 1,9 К и скоростях противотока  $0,4 \text{ см/с} < v_{ns} < 1,2 \text{ см/с}$ . Полученные результаты представлены на рис. 3 в зависимости от плотности теплового потока  $Q$ .

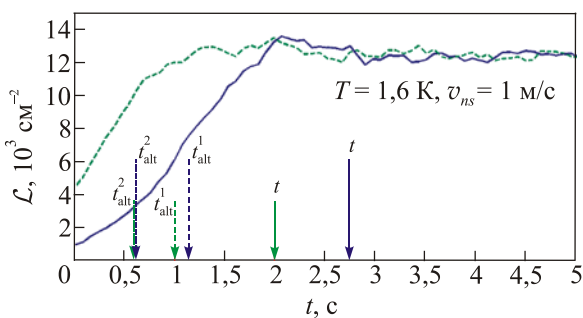


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Эволюция плотности вихревого клубка. Концы синих длинных стрелок показывают на горизонтальной оси полученные значения времен (15), концы зеленых коротких стрелок — (16). Синяя сплошная линия и зеленая штриховая линия — расчетные кривые из [12].

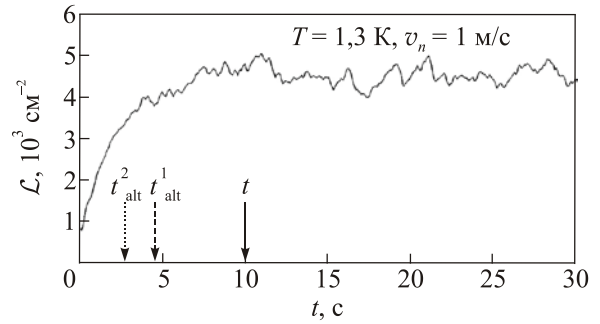


Рис. 2. Эволюция плотности вихревого клубка при  $T = 1,3 \text{ К}$ , скорости противотока  $1,0 \text{ см/с}$  и значении  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 1131 \text{ см}^{-2}$ . Концы стрелок показывают на горизонтальной оси полученные значения времен (17). Линия — расчетная кривая из [12].

Видно, что при различных значениях температуры одна и та же скорость противотока реализуется при различных значениях плотности теплового потока. На рис. 4 полностью приведены зависимости для  $t$  и  $t_{\text{alt}}^2$  от  $Q$  ( $t_{\text{alt}}^1$  от  $Q$  не приведена, чтобы не загромождать рисунок). Видно, что значения  $t$  и  $t_{\text{alt}}^2$  при одной и той же плотности теплового потока и температуре жидкости сильно отличаются друг от друга. Напомним, что чем быстрее развивается клубок, тем быстрее тормозится нормальное движение, что может привести к более быстрому вскипанию жидкости. Определим зависимость отношения этих времен от температуры и скорости противотока. На рис. 5 приведены эти зависимости. Заметим (см. рис. 5), что при повышении температуры отношения уменьшаются, при повышении  $Q$  ( $v_{ns}$ ) — увеличиваются. Как можно видеть на рисунке, эти времена могут отличаться на порядок.

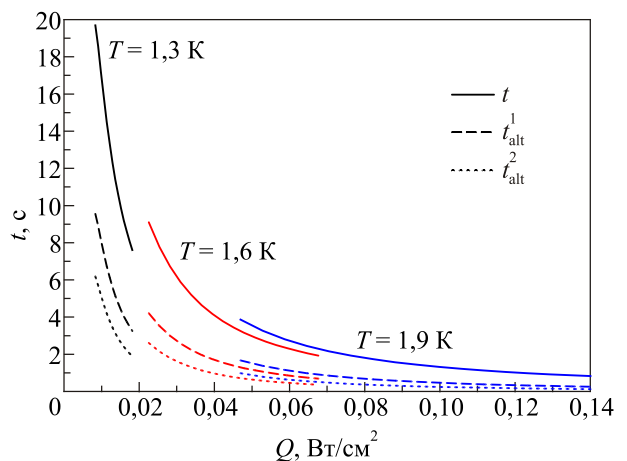


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Зависимости времени развития квантовой турбулентности при температурах жидкости 1,3 К (линии черного цвета), 1,6 К (линии красного цвета), 1,9 К (линии синего цвета) от значений плотности теплового потока, соответствующих скоростям противотока  $0,4 \text{ см/с} < v_{ns} < 1,2 \text{ см/с}$ .

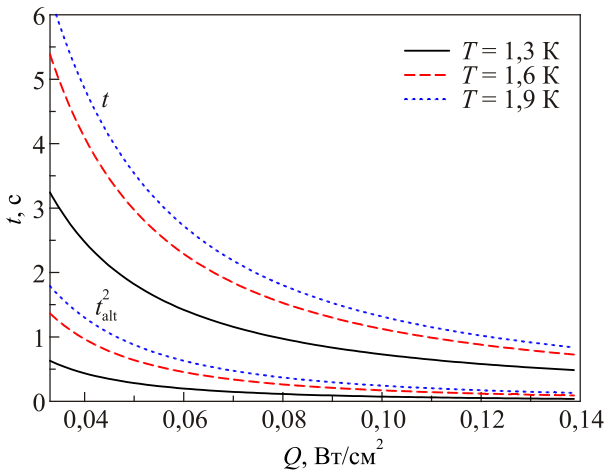


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Зависимости времени развития квантовой турбулентности от плотности теплового потока при различных значениях температуры жидкости.

#### 4. Оценка времени вскипания сверхтекучего гелия

В работе [10] исследовалось влияние квантовой турбулентности на процессы теплопередачи и времена вскипания в сверхтекучем гелии при ступенчатом тепловыделении на плоском нагревателе, расположенном на одном из торцов длинного канала. В экспериментах получены различные степенные зависимости времени вскипания от теплового потока  $t_{\text{boil}} = aQ^n$ , где показатель степени изменяется от  $-2$  до  $-4$ . Значения же  $t_{\text{boil}}$  в различных экспериментах отличаются на порядок (см., например, [17, 56–63]). В работе [10] показано, что показатель степени может изменяться в зависимости от значения остаточной турбулентности в объеме жидкости (см. рис. 1 в [10]). У нас есть три динамических уравнения для плотности вихревых линий (3)–(5). Возможно ли

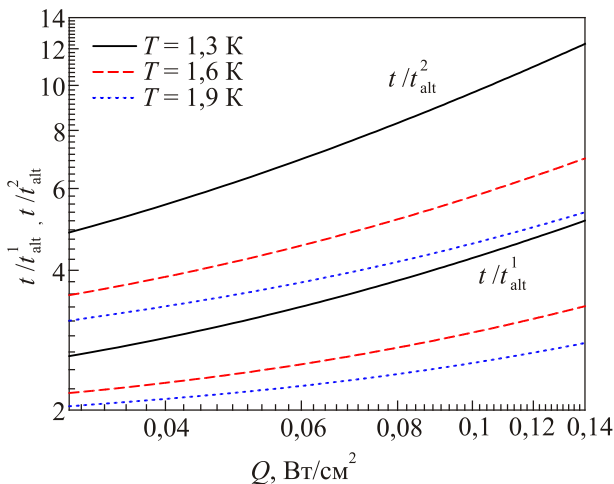


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Зависимости отношений времен развития квантовой турбулентности  $t/t_{alt}^1$  и  $t/t_{alt}^2$  от плотности теплового потока при различных значения температуры жидкости.

получить аналогичные зависимости времени вскипания от плотности теплового потока, подаваемого на нагреватель, при различных значениях остаточной (фоновой) плотности вихревого клубка, используя, например, уравнение (5).

В работе [10] численное исследование было проведено в рамках гидродинамики сверхтекучей турбулентности (ГСТ) [13], которая объединяет «обычную» двухскоростную гидродинамику сверхтекучего гелия и макроскопическую теорию вихревого клубка. Напомним, что при построении гидродинамики возникают вопросы, касающиеся возможности описания гидродинамических явлений в присутствии вихревого клубка, при попытке выйти за рамки однородной и стационарной ситуации. Действительно, при построении ГСТ плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}(t)$  придают полевой смысл, т.е. вводят зависимость от координаты:  $\mathcal{L}(t) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ . При этом скорость изменения  $\mathcal{L}(t)$  должна меняться по правилу

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \text{div}(\mathcal{L}v_L), \quad (18)$$

где  $v_L$  — дрейфовая скорость клубка. Таким образом, уже в стационарном, но неоднородном случае, в теории появляется некая новая переменная, связанная со структурой вихревого клубка. Очевидно, в рамках феноменологической теории Вайнена невозможно определить  $v_L$ , если только не прибегать к некоторым дополнительным предположениям. Итак, уравнение Вайнена с учетом (18) приобретает следующий вид:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} + \text{div}(\mathcal{L}v_L) = a_v |v_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_v \mathcal{L}^2. \quad (19)$$

Система уравнений ГСТ является достаточно громоздкой. Даже в простых случаях не удается найти аналитические решения. Единственная возможность ее разрешения — это проведение численных моделирований. Для этого исходные уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности были упрощены. Были получены уравнения ГСТ с точностью до членов второго порядка малости по отклонениям от равновесных значений. Эти уравнения учитывают нелинейные эффекты. Полагая  $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$ ,  $T = T_0 + T'$  ( $T_0$  — температура невозмущенного жидкого гелия;  $\sigma_0$  — энтропия на единицу массы при температуре  $T_0$ ;  $T'$ ,  $\sigma'$  — отклонения от равновесных значений), используя известные соотношения

$$\sigma(p, T, v_{ns}) = \sigma(p, T) + 1/2 v_{ns}^2 \partial(\rho_n / \rho) / \partial T,$$

$$d\mu = -\sigma dT + dp / \rho - (\rho_n / \rho) v_{ns} dv_{ns},$$

получаем систему уравнений в предположении отсутствия потока массы ( $\mathbf{j} = \rho_n v_n + \rho_s v_s = 0$ , что выполнялось при проведении большинства экспериментов):

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \left[ \frac{\rho_{s0}}{\rho} - \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \frac{(\rho + \rho_n)}{\rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] v_{ns} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\rho_{s0}}{\rho} \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_T} + \left( 1 - \frac{\sigma_{TT} \sigma_0}{\sigma_T^2} - \frac{\sigma_0}{\rho_{s0} \sigma_T} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) T' \right] \frac{\partial v_{ns}}{\partial x} = - \frac{i \sigma_0 \rho_{s0}}{\rho \sigma_T x} v_{ns} - \frac{i}{\rho \sigma_T x} \left[ \sigma_T \rho_{s0} - \frac{\sigma_0 \sigma_{TT} \rho_{s0}}{\sigma_T} - \sigma_0 \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] T' v_{ns} + \frac{1}{\rho \sigma_T T_0} (\alpha_1 \mathcal{L} v_{ns}^2 + \varepsilon_\beta \beta \mathcal{L}^2), \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_{ns}}{\partial t} + \left( \frac{3 \rho_{s0}}{\rho} - \frac{\sigma_0 \rho_s}{\sigma_T \rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) v_{ns} \frac{\partial v_{ns}}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_n} \left[ \sigma_0 + \left( \sigma_T - \frac{\sigma_0}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) T' \right] \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\rho \alpha_1}{\rho_s \rho_n} \mathcal{L} v_{ns} - \frac{\rho \varepsilon_\beta \alpha}{\rho_s} \mathcal{L}^{3/2} \frac{v_{ns}}{|v_{ns}|}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\rho_n}{\rho} \mathcal{L} \frac{\partial v_{ns}}{\partial x} - \frac{\rho_n}{\rho} v_{ns} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = - \frac{i \rho_n v_{ns} \mathcal{L}}{\rho x} + \chi_1 \frac{B \rho_n}{2 \rho} |v_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \frac{\chi_2 \kappa \mathcal{L}^2}{2 \pi}. \quad (22)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:

$$\sigma_T = \partial \sigma / \partial T, \quad \sigma_{TT} = \partial^2 \sigma / \partial T^2, \\ \beta = \kappa \chi_2 / 2 \pi, \quad \varepsilon_\beta = \rho_s \kappa^2, \quad \alpha_1 = A \rho_n \rho_s \beta^2 / \alpha,$$

$t$  — время,  $x$  — координата вдоль канала,  $\mu$  — химический потенциал,  $A$  — константа Гортера–Меллинка;  $i = 0, 1, 2$  соответственно для случаев плоской, цилиндрической и сферической геометрий нагревателя, когда изучаются одномерные случаи. В уравнении (22) учтено, согласно измерениям Вайнена [39] и полученным результатам в работе [12], что дрейфовая скорость вихревого клубка мала, т.е. скорость вихревой нити близка к скорости жидкости:  $v_L = v_s$ . Система уравнений (20)–(22) численно решалась методом распада разрыва [64], второго порядка точности.

В данной работе мы используем эту систему уравнений, заменив в ней уравнение (22) на альтернативные уравнения динамики плотности вихревых линий (4), (5), придав при этом  $\mathcal{L}(t)$  полевой смысл, как это описано выше (см. уравнение (19)), а именно в одномерном случае и плоского нагревателя:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\rho_n}{\rho} \mathcal{L} \frac{\partial v_{ns}}{\partial x} - \frac{\rho_n}{\rho} v_{ns} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha_{alt}^1 |v_{ns}|^2 \mathcal{L} - \beta \mathcal{L}^2, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\rho_n}{\rho} \mathcal{L} \frac{\partial v_{ns}}{\partial x} - \frac{\rho_n}{\rho} v_{ns} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha_{alt}^2 |v_{ns}|^3 \mathcal{L}^{1/2} - \beta \mathcal{L}^2. \quad (24)$$

Расчеты были проведены при следующих начальных и граничных условиях: в невозмущенный гелий при заданной температуре жидкости  $T_0 = 1,4$  К на нагреватель, расположенный на одном из торцов длинного канала, подается тепловой поток в виде ступенчатого импульса бесконечной длительности. В результате были получены значения времени вскипания в зависимости от плотности теплового потока. При этой температуре и остаточной плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_{fon} = 100 \text{ см}^{-2}$  в работе [10] было получено, что начальная часть кривой описывается следующей зависимостью:  $t_{boil} = aQ^{-2,1}$ . Сравнение этой кривой с полученными результатами

при использовании уравнений (23), (24), которые описываются зависимостью  $t_{boil} = bQ^{-3,9}$  (эти кривые неразличимы), приведено на рис. 6. Здесь  $a$  и  $b$  — некоторые коэффициенты пропорциональности. Как видно на рис. 6, полученные значения времени вскипания существенно меньше по сравнению с результатами работы [10].

В этом случае, естественно, следует ожидать большее торможение нормального движения, что приводит к более раннему нагреву жидкости в канале. На рис. 7 приведены полученные значения скорости нормальной компоненты  $v_n = v_{ns} \rho_s / \rho$  вдоль канала. На рис. 8 приведены зависимости температуры вблизи нагревателя от времени.

Понятно, что при увеличении остаточной плотности вихревых нитей зависимость времени вскипания от плотности теплового потока будет такой же (см. также работу [10]), т.е. мы не получим зависимости, наблюдаемые в экспериментах. Нет возможности сравнить полученные результаты с экспериментальными данными, так как в них не измерялась остаточная плотность вихревых нитей. Однако можно утверждать, что различные полученные зависимости времени вскипания от плотности теплового потока (см. [10]) обязаны

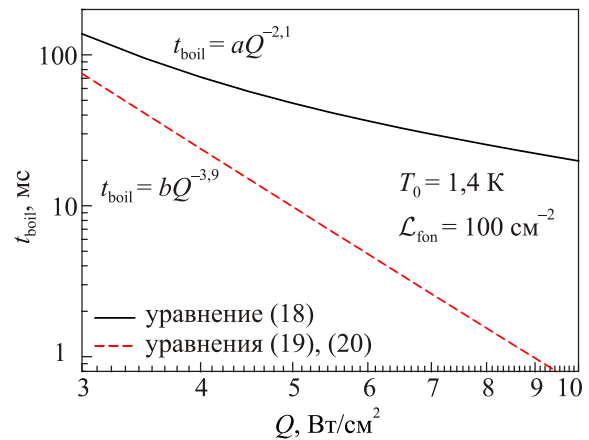


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Зависимость времени вскипания от плотности теплового потока.

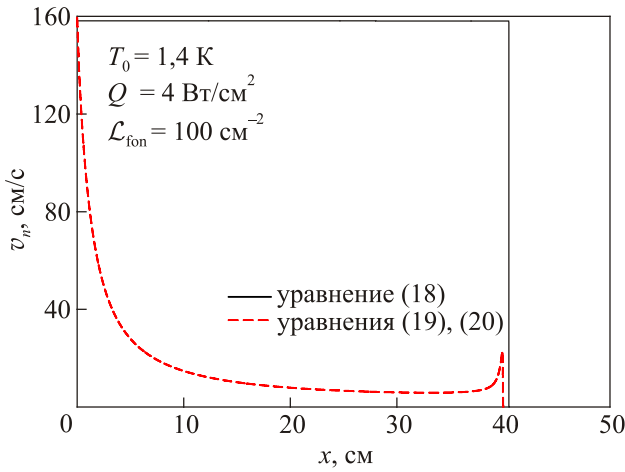


Рис. 7. (Онлайн в цвете) Распределение скорости нормальной компоненты  $v_n = v_{ns}\rho_s / (\rho_s + \rho_n)$  вдоль канала при температуре невозмущенной жидкости  $T_0 = 1,4$  К, мощности теплового потока  $Q = 4$  Вт/см<sup>2</sup>, значении остаточной плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 100$  см<sup>-2</sup>.

также различным значениям  $\mathcal{L}_{\text{fon}}$ . И мы видим, что использование уравнений (23), (24) не приводит к подобным результатам.

### 5. Заключение

В данной работе рассмотрены три уравнения для динамики плотности вихревых линий (3), (4), (5), которые на сегодняшний день представлены в литературе, в случае однородной гомогенной турбулентности и постоянной скорости противотока. Из полученных выражений (11), (12), (13) для значения интегралов определены зависимости времени развития квантовой турбулентности  $t$ ,  $t_{\text{alt}}^1$ ,  $t_{\text{alt}}^2$  от остаточной плотности вихревого клубка  $\mathcal{L}_{\text{fon}}$  до  $\mathcal{L}_{\text{st}}$ . Вычисления были проведены для значений температур невозмущенного гелия 1,3, 1,6, 1,9 К и для различных значений скоростей противотока  $v_{ns}$  (плотности теплового потока  $Q$ ). Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [12], в которой в рамках метода вихревой линии получена динамика плотности вихревых линий. Полученные результаты показали, что уравнение (3) дает близкие значения времен развития квантовой турбулентности к полученным в работе [12]. Альтернативные уравнения (4), (5) дают существенно заниженные значения.

Уравнение динамики плотности вихревых линий очень важно при решении прикладных задач. В рамках системы уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности, полученной при феноменологическом подходе, в работе [10], проведено численное моделирование теплопереноса в канале при подаче постоянного значения плотности теплового потока  $Q$  на плоский нагреватель, расположенный на одном из торцов

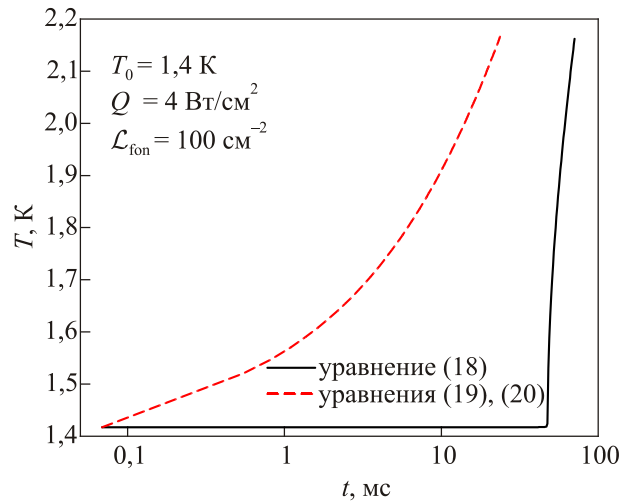


Рис. 8. (Онлайн в цвете) Зависимости температуры вблизи нагревателя от времени при температуре невозмущенной жидкости  $T_0 = 1,4$  К, мощности теплового потока  $Q = 4$  Вт/см<sup>2</sup> и значении остаточной плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_{\text{fon}} = 100$  см<sup>-2</sup>.

канала. В этой работе было показано, что при использовании уравнения (22) получаются различные зависимости времени вскипания гелия  $t_{\text{boil}}$  от  $Q$  при различных значениях остаточной плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_{\text{fon}}$ . Подобные зависимости наблюдаются в экспериментах:  $t_{\text{boil}} \propto Q^n$ , где показатель степени изменяется от  $n = -2$  до  $n = -4$ . Проведены расчеты с использованием уравнений (23), (24). Полученные результаты описываются только зависимостью с  $n = -4$ , т.е. в этих случаях плотность вихревого клубка быстро развивается, достигая своего стационарного значения. Проведено сравнение полученных результатов с данными работы [10]. Показано, что в случае применения уравнений (23), (24) скорость нормальной компоненты существенно заторможена (см. рис. 7), что приводит к более быстрому росту температуры вблизи нагревателя (см. рис. 8), а следовательно, к более быстрому вскипанию жидкости.

Отметим, уравнение (22) получено при малых, но закритических плотностях теплового потока. Каким оно должно быть при больших значениях  $Q$ , вопрос на сегодняшний день остается открытым. Технические возможности очень быстро развиваются, естественно, можно ожидать, что в обозримом будущем этот вопрос будет решен.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 14-29-00093.

1. W.H. Keesom and A.P. Keesom, *Physica* **3**, 359 (1936).
2. W.H. Keesom, A.P. Keesom, and B.F. Saris, *Physica* **5**, 281 (1938).
3. П.Л. Капица, *ДАН СССР* **18**, 21 (1938).
4. П.Л. Капица, *ЖЭТФ* **11**, 1 (1941).



5. J. Wilks and D.S. Betts, *An Introduction to Liquid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1987).
6. F. London, *Nature* **141**, 643 (1938).
7. R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
8. *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, C.F. Barenghi *et al.* (eds.), *Lecture Notes in Physics*, No. 571, Springer, Berlin (2001).
9. A.F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, Oxford (2004).
10. L. Kondaurova, V. Efimov, and A. Tsoi, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 80 (2017).
11. D. Khomenko, L. Kondaurova, V.S. L'vov, P. Mishra, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **91**, 180504 (2015).
12. L. Kondaurova, V. L'vov, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **89**, 014502 (2014).
13. S. Nemirovskii and V. Lebedev, *Sov. Phys. JETP* **4**, 1729 (1983); *J. Low Temp. Phys.* **113**, 591 (1998).
14. Ruzhu Wang, *Adv. Cryog. Eng.* **41**, 233 (1996).
15. S.W. Van Sciver, *Cryogenics* **19**, 385 (1979).
16. Steven W. Van Sciver, *Helium Cryogenics*, International Cryogenics Monograph Series (2012).
17. S.K. Nemirovskii and A.N. Tsoi, *Cryogenics* **29**, 985 (1989).
18. M.V. Schwerdtner, G. Stamm, A.N. Tsoi, and D.W. Schmidt, *Cryogenics* **32**, 775 (1992).
19. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **14**, 112 (1944).
20. L. Tisza, *J. Phys. Radium* **1**, 164 (1940); *ibid.* **1**, 350 (1940); *Phys. Rev.* **72**, 838 (1947).
21. C.J. Gorter and L.H. Mellink, *Physica* **15**, 285 (1949).
22. R.P. Feynman, *Progr. Low Temp. Phys.* **I**, 17 (1955).
23. H.E. Hall and W.F. Vinen, *Proc. R. Soc. London A Math Phys. Sci.* **238**, 215 (1956).
24. I.L. Bekarevich and I.M. Khalatnikov, *Sov. Phys. JETP* **13**, 643 (1961).
25. K. Yamada, S. Kashiwamura, and K. Miyake, *Physica B* **154**, 318 (1989).
26. J. Gerst, *Physica A* **183**, 279 (1992).
27. W.F. Vinen, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **240**, 128 (1957); *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **242**, 493 (1957).
28. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 551 (1977); *Phys. Rev. B* **18**, 245 (1978); *Phys. Rev. Lett.* **49**, 283 (1982); *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
29. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. B* **57**, 5972 (1998).
30. T. Lipniacki, *Phys. Rev. B* **64**, 214516 (2001).
31. D. Jou, M.S. Mongioli, and M. Sciacca, *Phys. D* **240**, 249 (2011).
32. V.P. Peshkov and V.J. Tkachenko, *Sov. Phys. JETP* **14**, 1019 (1962).
33. C.E. Chase, *Phys. Rev.* **127**, 361 (1962).
34. R.K. Childers and J.T. Tough, *Phys. Rev. B* **13**, 1040 (1976).
35. P.E. Demotakis and J.E. Broadwell, *Phys. Fluids* **16**, 1787 (1973).
36. D.F. Brevier and D.O. Edwards, *J. Low Temp. Phys.* **43**, 327 (1981).
37. R.A. Ashton, L.B. Opatowsky, and J.T. Tough, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 658 (1981).
38. K.P. Martin and J.T. Tough, *Phys. Rev. B* **27**, 1788 (1983).
39. W.F. Vinen, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **240**, 114 (1957).
40. C.F. Barenghi, K. Park, and R.J. Donnelly, *Phys. Lett. A* **84**, 435 (1981).
41. D.D. Awschalom, F. P. Milliken, and K. W. Schwarz, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1372 (1984).
42. T.V. Chagovets and L. Skrbek, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 215302 (2008); *J. Low Temp. Phys.* **153**, 162 (2008).
43. S. Babuin, M. Stammeier, E. Varga, M. Rotter, and L. Skrbek, *Phys. Rev. B* **86**, 134515 (2012).
44. A. Marakov, J. Gao, W. Guo, S.W. Van Sciver, G.G. Ihas, D.N. McKinsey, and W.F. Vinen, *Phys. Rev. B* **91**, 94503 (2015).
45. D.R. Ladner and J.T. Tough, *Phys. Rev. B* **17**, 1455 (1978).
46. L.B. Opatowsky and J.T. Tough, *Phys. Rev. B* **24**, 5420 (1981).
47. J.D. Henberger and J.T. Tough, *Phys. Rev. B* **25**, 3123 (1982).
48. J.T. Tough, *Superfluid turbulence*, *Progress in Low Temperature Physics*, North-Holland Publ. Co., (1982), Vol. VIII.
49. D.J. Melotte and C.F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4181 (1998).
50. A.T.M. de Waele and R.G.K.M. Aarts, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 482 (1994); *Phys. Rev. Lett.* **72**, 482 (1994).
51. R.G.K.M. Aarts and A.T.A.M. de Waele, *Phys. Rev. B* **50**, 510069 (1994).
52. Luiza P. Kondaurova, Vladimir A. Andryuschenko, and Sergey K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 415 (2008).
53. H. Adachi, S. Fujiyama, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **81**, 104511 (2010).
54. A. Baggaley, *J. Low Temp. Phys.* **168**, 18 (2012); *ibid.* **168**, 18 (2012).
55. J. Maynard, *Phys. Rev. B* **14**, 3869 (1976).
56. Y. Katsuka, M. Murakami, T. Iida, and T. Shimazaki, *Cryogenics* **38**, 631 (1995).
57. Iida, M. Muralami, T. Shimazaki, and H. Nagai, *Cryogenics* **36**, 943 (1996).
58. Y. Katsuki, M. Murakami, T. Iida, and T. Shamazaki, *Cryogenics* **35**, 631 (1995).
59. G. Stamm, M.V. Schwerdtner, and A.N. Tsoi, *Cryogenics* **32**, 304 (1992).
60. P. Zhang, M. Murakami, and R.Z. Wang, *Phys. Lett. A* **264**, 492 (2000).
61. Yu. Phillipov, V. Miklyaev, and I. Sergeev, *J. Eng. Phys. Thermophys.* **54**, 950 (1988).
62. S.R. Breon, and Van Sciver, *Cryogenics* **26**, 682 (1986).
63. B. Danilchenko, and V. Poroshin, *Cryogenics* **23**, 546 (1983).
64. Численное решение многомерных задач газовой динамики С.К. Годунова (ред.), Наука, Москва (1976).

#### Dynamics of vortex lines density and heat transfer processes in superfluid helium

L.P. Kondaurova

In this paper we analyze three types of equations for dynamics of vortex lines density. It is shown that the Vinen equation is more correct gives the values of the vortex tangle development time in the case of con-

stant counterflow than other alternative equations. In the framework of the system of equations of hydrodynamics superfluid turbulence obtained at the phenomenological approach, it was obtained the boiling times of helium as function from the density of the heat flux by using alternative equations of dynamics for vortex lines density. Unlike experiments in which different dependences of boiling time  $t_{\text{boil}}$  from density of the heat flux  $Q$  ( $t_{\text{boil}} \propto Q^n, -4 \leq n \leq -2$ ) are observed, in this case we get only a power dependence with the order  $n = -4$ . It is obtained the distribution of velocity of the normal component along the channel, the time dependence temperature near the heater. A com-

parison is made with the numerical results obtained earlier in the literature.

PACS: 67.25.dk Vortices and turbulence;  
47.37.+q Q Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids;  
03.75.Kk Dynamic properties of condensates; Collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow.

Keywords: superfluidity, vortex structure, quantum turbulence.