

## Моделирование резистивного состояния гранулярного сверхпроводника

В. К. Игнатьев

*Волгоградский государственный университет, Россия, 400062, г. Волгоград, ул. 2-я Продольная, 30  
E-mail: ivanov@physic.vgu.tsaritsyn.su*

Статья поступила в редакцию 30 октября 1996 г.

Получено уравнение, описывающее гипервихрь в слабогранулярном сверхпроводнике, проведено численное моделирование вихревой решетки. Рассмотрены потери, возникающие при зарождении, исчезновении и движении гипервихрей. Получены уравнения, описывающие динамику распределения магнитного поля, нелинейную восприимчивость и вольт-амперные характеристики в резистивном режиме. Численное моделирование уравнений хорошо согласуется с результатами эксперимента.

Одержано рівняння, яке описує гіпервихор в слабогранульованому надпровіднику, проведено чисельне моделювання вихревої ґратки. Розглянуто утрати, які виникають при зародженні, зникненні і русі гіпервихорів. Одержано рівняння, які описують динаміку розподілу магнітного поля, нелінійну сприйнятливість і вольт-амперні характеристики в резистивному режимі. Чисельне моделювання рівнянь добре узгоджується з результатами експерименту.

PACS: 74.60.-w

### Введение

Различные модели высокотемпературных сверхпроводников (Бина, спинового стекла, джозефсоновской среды, перколяционная и т.д.) рассматривают сверхпроводящую керамику как нелинейную среду (систему с распределенными параметрами) с существенной временной и пространственной дисперсией. Общего подхода к моделированию и исследованию подобных систем не существует, что не позволяет сопоставлять результаты теоретических расчетов с экспериментом, анализировать работу электро- и радиотехнических изделий из высокотемпературных сверхпроводников и оптимизировать их характеристики.

Построение последовательной феноменологической модели электродинамики среды включает три задачи: анализ, т.е. построение отклика среды на произвольное внешнее воздействие с помощью системной функции среды, зависящей только от ее параметров, но не от воздействия; синтез, т.е. построение по экспериментальным данным системной функции произвольной среды, удовлетворяющей требованиям задачи анализа; моделирование, т.е.

связь интегральных параметров системной функции среды с происходящими в ней процессами для сопоставления теоретических результатов с экспериментом. В современной теоретической электротехнике полностью решены задачи анализа и синтеза линейных цепей с помощью однозначно связанных импульсной, передаточной и частотной характеристик. Для нелинейных цепей задача решается только в некоторых частных случаях, обычно приближенно, для квазистационарных процессов разложением в ряд вольт-амперной характеристики, для гармонического и узкополосного воздействия — методом гармонического баланса и медленно меняющейся амплитуды. В исследуемой системе, как правило, можно выделить замкнутую подсистему, содержащую сверхпроводящий образец и имеющую две пары зажимов — входные и выходные. Такая подсистема рассматривается как пассивный нелинейный четырехполюсник, для которого работа источника внешнего воздействия равна изменению внутренней энергии среды и потерям в ней. В свою очередь, внутренняя энергия и потери в пассивной среде являются нелинейными запаздывающими потенциалами

внешнего воздействия и однозначно определяют реакцию среды на него, т.е. описывают системную функцию среды. Такой подход позволяет характеризовать электромагнитные процессы в сверхпроводнике через интегральные электрически измеряемые величины (полное сопротивление, поверхностный импеданс, нелинейную восприимчивость) и экспериментально проверять результаты теоретического анализа.

Важную роль в построении феноменологической модели квазистационарной нелинейной электродинамики высокотемпературных сверхпроводников играет анализ динамики вихрей в гранулярном сверхпроводнике. Введенное Сониным [1] понятие джозефсоновских гипервихрей оказалось весьма плодотворным для описания смешанного состояния в сверхпроводящих керамиках [2,3]. Однако рассмотренные в работах [1–3] модели не позволяют получить аналитическое описание кривых намагничивания и комплексной восприимчивости, в частности, в работе [3] предполагается отсутствие абрикосовских и джозефсоновских вихрей. Анализ движения одиночного плоского вихря в работе [4] выполнен для регулярной джозефсоновской среды с одинаковыми критическими токами контактов и в отсутствие проникновения вихрей в гранулы, что не позволяет описать критическое состояние реальных керамических сверхпроводников. В работе [5] получена достаточно сложная система уравнений, описывающая гипервихри в гранулярном сверхпроводнике в общем случае с учетом сильной стохастичности и нелокальности среды.

Следует отметить, что керамические сверхпроводники с большой токнесущей способностью, появившиеся в последнее время, имеют сравнительно большой критический ток межгранулярных джозефсоновских контактов и, следовательно, джозефсоновская глубина проникновения оказывается сравнимой с размерами гранул и даже меньшей. Такие сверхпроводники можно назвать слабогранулярными. Как показывает численное моделирование уравнений [5], для слабогранулярного сверхпроводника уже во внешнем магнитном поле порядка 10 Э межгранулярное магнитное поле в центре гипервихря становится больше первого критического поля гранул. В более сильных внешних магнитных полях абрикосовские вихри

проникают в гранулы практически во всем объеме сверхпроводника.

## 1. Материальное уравнение

Для того чтобы обобщить полученные в [5] материальные уравнения на случай слабогранулярного сверхпроводника с учетом проникновения в гранулы абрикосовских вихрей, положим, что сверхпроводник находится в однородном по оси  $z$  внешнем магнитном поле и обозначим  $n(x, y)$  усредненную по  $z$  концентрацию абрикосовских вихрей в гранулах. В не слишком больших внешних полях вихри находятся вблизи поверхности гранул и центр гранулы можно считать свободным от вихрей. Построим, следуя [5], гладкую функцию  $\chi(\mathbf{r})$ , значение которой в центре каждой гранулы совпадает с фазой параметра порядка. Тогда для любого замкнутого контура  $C$ , проходящего через центры гранул и джозефсоновские контакты, выполняется условие

$$\oint \nabla \chi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2\pi \left( m + \oint_S n(\mathbf{r}) \mathbf{e} dS \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}$  — орт вдоль оси  $z$ ;  $S$  — поверхность, стянутая контуром  $C$ ;  $m$  — целое.

Это уравнение можно переписать в виде

$$\text{rot} (\nabla \chi(\mathbf{r})) = 2\pi (n(\mathbf{r}) + m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)), \quad (2)$$

здесь  $\mathbf{r}_i$  — координата оси гипервихря;  $m_i$  — число квантов магнитного потока в межгранулярном пространстве гипервихря;  $\delta(\mathbf{r})$  — двумерная дельта-функция. Введем обозначения:  $\mu_1$  — средняя доля нормальной фазы в сверхпроводнике или магнитная проницаемость сверхпроводника в отсутствие межгранулярных токов и абрикосовских вихрей;  $\mu_2(B_1)$  — магнитная проницаемость гранулы, обусловленная проникновением абрикосовских вихрей;  $\mathbf{B}$  — средняя индукция магнитного поля в сверхпроводнике;  $\mathbf{B}_1$  — индукция в межгранулярном пространстве;  $\mu_3$  — усредненная магнитная проницаемость сверхпроводника в отсутствие межгранулярных токов, когда  $\mathbf{B}_1$  равна внешнему полю  $\mathbf{H}$ . Тогда

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\mu_3, \quad \mathbf{e}\Phi_0 n = \mu_2 \mathbf{B}/\mu_3, \quad \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2. \quad (3)$$

Введем усредненный по статистическому ансамблю безразмерный градиентно инвариантный вектор

$\mathbf{g} = a\pi\sqrt{\pi} \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Phi_0 \nabla \chi(\mathbf{r})/2\pi \rangle / 2\Phi_0$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  – вектор-потенциал магнитного поля;  $a$  – среднее расстояние между центрами гранул. С учетом соотношения (2)

$$\mathbf{B} = \Phi_0 \left( 2 \operatorname{rot} \mathbf{g} / (a\pi\sqrt{\pi}) + m_i \mathbf{e}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \mathbf{en} \right), \quad (4)$$

Полная свободная энергия сверхпроводника, отсчитанная от уровня без магнитного поля и токов, принимает вид

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \left[ \mu_1 V_k B_1^2(\mathbf{r}_k) + (1 - \mu_1) V_k \Phi_0^2 n^2(\mathbf{r}_k) / \mu_2 + 4\Phi_0 I_k (1 - \cos(\varphi_k)) \right] / c,$$

где  $\mathbf{r}_k$  – координата  $k$ -го джозефсоновского контакта;  $V_k$  – объем области, содержащей части гранул и межгранульного пространства, прилегающие к контакту;  $I_k$  – критический ток контакта;  $\varphi_k$  – разность фаз на контакте.

Выполняя усреднение по описанной в [5] процедуре, получаем

$$\langle W \rangle = F_J \iiint \left( \lambda^2 |\operatorname{rot} \mathbf{g} + \mathbf{em}_i a\pi\sqrt{\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) / 2|^2 + 1 - D \exp(-D^2 g^2) \right) dV, \quad (5)$$

где  $F_J = \Phi_0 \rho I_J / 2\pi c$ ;  $D = (1 + a^2 |\nabla g|^2 / 40)^{-1}$ ;  $\lambda = \lambda_J (\mu_3)^{1/2} / (\mu_1 - \mu_1 \mu_2)$ ,  $\lambda_J = (c\Phi_0 / \pi^3 a^2 \rho I_J)^{1/2}$  – джозефсоновская глубина проникновения;  $\rho$  – плотность джозефсоновских межгранульных контактов;  $I_J$  – средний критический ток контактов. В выражении (3), в отличие от точного соотношения, полученного в [5], для упрощения анализа не учтены флуктуации вектор-потенциала магнитного поля, как показывает численное моделирование, вклад соответствующих слагаемых мал.

Стационарное материальное уравнение для слабогранулярного сверхпроводника может быть получено стандартным образом путем минимизации свободной энергии (5), с учетом резистивной модели джозефсоновского контакта [6] получим полное нестационарное уравнение

$$\lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{g} = -\mathbf{g} D^3 \exp(-D^2 g^2) - \tau \mathbf{g}' - \tau RC \mathbf{g}'' + \beta m_i \operatorname{rot}(\mathbf{e}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)), \quad (6)$$

где  $\tau = \Phi_0 / (2\pi I_J R c)$ ;  $R$  – среднее нормальное сопротивление контактов;  $C$  – средняя емкость контактов;  $\beta = a\lambda^2 \pi \sqrt{\pi} / 2$ ; штрихом обозначена производная по времени. Уравнение (6) совместно с уравнением (4), позволяющим найти магнитную индукцию  $B$  в сверхпроводнике по известному вектору  $\mathbf{g}$ , и уравнением (3), выражающим через  $B$  межгранульное магнитное поле  $B_1$  и, следовательно, магнитную проницаемость гранул  $\mu_2(B_1)$  и параметр  $\lambda(\mu_2)$ ,

откуда легко получить

$$\mathbf{B} = \Phi_0 \frac{[2 \operatorname{rot} \mathbf{g} / (a\pi\sqrt{\pi}) + m_i \mathbf{e}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2)}{\mu_1 - \mu_1 \mu_2}.$$

описывает динамику распределения магнитного поля в сверхпроводнике.

Неподвижный одиночный вихрь в бесконечном сверхпроводнике описывается одномерным стационарным уравнением в цилиндрических координатах

$$\lambda^2 \left( r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} + r \frac{dg}{dr} - g \right) = r^2 D^3 g \exp(-g^2 D^2). \quad (7)$$

Граничные условия могут быть получены из соотношения (1)

$$r g(r \rightarrow 0) \rightarrow -am\sqrt{\pi}/4, \quad g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) с граничными условиями (8) легко решается численно, что позволяет найти индукцию магнитного поля в гипервихре  $B(r)$ :

$$B(r) = \left( \mu_1 + \mu_2 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1} - \mu_1 \mu_2 \right) \left( \frac{B_J \lambda_J}{r} \right) \frac{d(rg)}{dr},$$

$$B_J = 2\Phi_0 / (a\lambda_J \pi \sqrt{\pi}) = \left( 4\Phi_0 I_J \rho / c \right)^{1/2}.$$

Полученное таким образом распределение магнитного поля качественно очень близко к его распределению в абрикосовском вихре, что оправдывает введенное в [1] название «гипервихрь».

Границей гипервихря естественно считать контур, на котором  $\mathbf{j} = 0$ , тогда энергию вихря единичной длины можно найти как интеграл по поверхности, охваченной этим контуром,

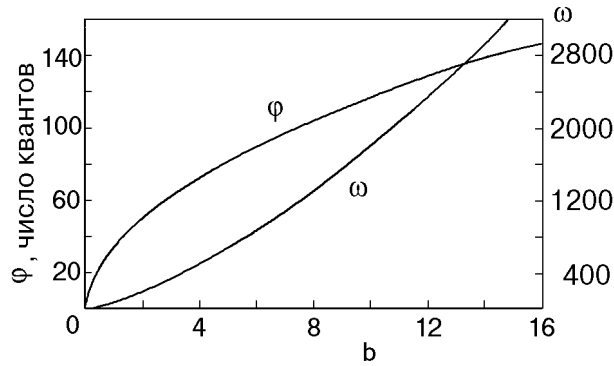


Рис. 1. Зависимость энергии гипервихря  $\omega$  и потока в нем  $\phi$  от среднего магнитного поля  $b$ .

плотности энергии, которая в соответствии с уравнением (5) имеет вид

$$F = F_J \left( \lambda^2 |\text{rot } \mathbf{g}|^2 + 1 - D \exp(-g^2 D^2) \right),$$

$$F_J = B_J^2 / 8\pi. \quad (9)$$

Полная энергия гипервихря  $W$ , естественно, зависит от потока, захваченного вихрем. Численный расчет показывает, что как и для абрикосовских вихрей, одноквантовые гипервихри ( $m = 1$ ) энергетически выгоднее, чем многоквантовые ( $m > 1$ ). Заметим, что гипервихрь с  $m = 1$  может содержать десятки и сотни квантов магнитного потока, сосредоточенных в проникающих в гранулы абрикосовских вихрях, поэтому одноквантовым его можно называть лишь в том смысле, что в межгранульных промежутках сосредоточен один квант магнитного потока.

Можно также численно найти зависимость энергии двух взаимодействующих вихрей от расстояния между ними и энергию гипервихря в квадратной и треугольной решетках. Аналогично абрикосовским, однонаправленные гипервихри отталкиваются, разнонаправленные притягиваются, а треугольная решетка оказывается энергетически выгоднее, хотя и не намного, чем квадратная. На рис. 1 показаны начальные участки зависимости энергии гипервихря  $W$  и охваченного гипервихрем магнитного потока  $\Phi$  от средней магнитной индукции в сверхпроводнике  $B = N\Phi$  в нормированных координатах  $\omega = W / (F_J \lambda_J^2)$ ,  $\phi = \Phi / \Phi_0$ ,  $b = B / B_J$ . При расчетах зависимость  $\mu_2(B_1)$  аппроксимировалась функцией

$$\mu_2(B_1 \geq H_{C1}) = \frac{(B_1)^{1/2} - (H_{C1})^{1/2}}{(B_1)^{1/2} + k(H_{C1})^{1/2}},$$

$$\mu_2(B_1 < H_{C1}) = 0,$$

и положено  $H_{C1} = B_J / 3$ ;  $k = 5$ ;  $\mu_1 = 0,1$ ;  $a / \lambda_J = 1$ .

## 2. Динамика вихревой решетки

Для анализа динамики вихревой решетки необходимо рассмотреть потери, возникающие при движении гипервихрей и связанные с диссипацией энергии на нормальном сопротивлении джозефсоновских контактов. Выполняя усреднение аналогично выводу материальных уравнений [5], найдем средний квадрат напряжения на контакте:  $\langle U_k^2 \rangle = \langle \phi_k'^2 \rangle \Phi_0^2 / (2\pi c)^2 = |\mathbf{g}'|^2 \Phi_0^2 / (2\pi^2 c^2)$ . Отсюда нетрудно получить среднюю плотность мощности диссипации:

$$p = \rho \langle U_k^2 \rangle / R = \Phi_0^2 |\mathbf{g}'|^2 \rho / (2R\pi^2 c^2). \quad (10)$$

Будем считать, что затухание токов нормальной проводимости происходит достаточно быстро, и вихрь, движущийся в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  в системе координат, связанной с центром вихря, описывается стационарным уравнением. Тогда

$$|\mathbf{g}'|^2 = |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{g}|^2 = v^2 \left( \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_y}{\partial x} \right)^2 \right) \approx \frac{v^2 B^2}{\mu_3 \lambda^2 B_J^2}.$$

Воспользовавшись соотношением (10) и учитывая, что энергия магнитного поля в вихре примерно равна половине полной энергии вихря  $W$ , найдем мощность диссипации:  $P = v^2 \tau W / \lambda_J^2$ . Эта формула позволяет определить силу электромагнитного трения, действующую на единицу длины движущегося гипервихря в гранулярном сверхпроводнике:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{v}\tau W / \lambda_J^2. \quad (11)$$

Вопрос о пиннинге гипервихрей во многом остается открытым. В работе [4] показано, что на плоский вихрь в регулярной решетке джозефсоновских контактов при определенных условиях может действовать значительная сила пиннинга. Следуя работам [7,8], можно показать, что гипервихрь, как и абрикосовский вихрь, может закрепляться на границе сверхпроводника. Но в керамическом сверхпроводнике, если размеры гипервихря много больше размеров гранул, усреднение по стохастической системе контактов делает энергию гипервихря практически не зависящей от положения его оси, т.е. пиннинг исчезает. С другой стороны, в слабогранулярном сверхпроводнике, когда размеры вихря сравнимы

с размерами гранул, усреднение не происходит и пиннинг остается. Кроме того, охваченные гипервихрем абрикосовские вихри могут испытывать пиннинг на границах гранул [7,8]. На эти вихри также действует сила Лоренца со стороны транспортного тока. Поэтому можно положить, что сила пиннинга  $f_P$  и сила Лоренца  $f_L$ , действующие на гипервихрь, пропорциональны охваченному им магнитному потоку  $\Phi$ :

$$f_L = \Phi \operatorname{sgn}(B)[j \times e]/c. \quad (12)$$

С учетом сделанных предположений и соотношений (11) и (12) в рамках модифицированной модели Бина [9,10] можно записать закон движения гипервихря в виде

$$v(j) = \Theta(|j| - j_C) \operatorname{sgn}(B)[j \times e] \left(1 - \frac{j_C}{|j|}\right) \frac{\lambda_j^2 \Phi}{W\tau c}, \quad (13)$$

где  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда,  $\Theta(x \geq 0) = 1$ ;  $\Theta(x < 0) = 0$ ;  $j_C$  — критическая плотность тока;  $B = N\Phi$  — средняя магнитная индукция. В формулах (11) и (13) не учтены потери при движении абрикосовских вихрей в гранулах. Следуя работе [11], можно показать, что в магнитных полях, существенно меньших второго критического поля гранул, эти потери пренебрежимо малы в сравнении с потерями в межгранульных контактах.

Ряд экспериментальных и теоретических работ [12] свидетельствует о неприменимости жесткой модели Бина к реальным сверхпроводникам. В высокотемпературных сверхпроводниках особенно актуальна термическая активация движения вихрей. Приняв упругую модель взаимодействия гипервихря с центром пиннинга [7,8], положим, что сила Лоренца, соответствующая критической плотности тока, смещает вихревую решетку на расстояние  $d$ , после чего начинается свободное движение решетки. С учетом соотношения (12) получаем:  $d = \Phi j_C / (kc)$ , где  $k$  — коэффициент жесткости. Это означает, что потенциальный барьер для отрыва вихря от центра пиннинга  $U_0 = d\Phi j_C / (2c)$ . Транспортный ток с плотностью

$j$  сместит вихревую решетку на расстояние  $x = jd/j_C$ , и барьер для отрыва вихря составит  $\Delta U = U_0 - kx^2/2 = U_0(j_C^2 - j^2)/j_C^2$ . Поскольку доля вихрей, преодолевающих барьер за счет термической активации, равна  $\exp(-\Delta U/(k_B T))$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана, функцию Хевисайда  $\Theta(|j| - j_C)$  в уравнении (13) следует заменить на функцию  $\Theta_1(j)$ :

$$\Theta_1(|j| < j_C) = \exp\left(\frac{U_0(j_C^2 - j^2)}{j_C^2 k_B T}\right), \quad (14)$$

$$\Theta_1(|j| \geq j_C) = 1.$$

Движение гипервихря с постоянной скоростью — не единственный диссипативный процесс в гранулярном сверхпроводнике. В отличие от абрикосовских вихрей в сверхпроводнике второго рода появление и исчезновение гипервихря в гранулярном сверхпроводнике сопровождается потерями в межгранульных контактах. Исчезновение одиночного вихря в слабогранулярном сверхпроводнике означает, что в момент времени  $t = 0$  параметр  $m$  в уравнении (6) изменяется от 1 до 0. Необходимо отметить, что уравнение (6) получено усреднением резистивной модели джозефсоновского контакта [6], т.е. модели с сосредоточенными параметрами, справедливой лишь для квазистационарных процессов, когда длина волны электромагнитных колебаний существенно больше размеров гранул. Поэтому уравнение (6) не описывает микроволновых колебаний, возникающих при зарождении вихря, и говорить о мгновенном изменении параметра  $m$  в рамках этой модели можно лишь в том смысле, что период микроволновых колебаний существенно меньше постоянной времени  $\tau$ . В этих предположениях зарождение гипервихря является адиабатическим процессом, плотность энергии во всех точках сверхпроводника является непрерывной функцией времени.

Потери энергии  $Q$  при исчезновении гипервихря найдем с учетом уравнений (6), (9) и (10) аналогично потерям при движении:

$$\begin{aligned}
q &= \rho \int_0^{\infty} dt \iiint_V d^3r \langle u_k \rangle^2 / R = \frac{\Phi_0^2 \rho}{2\pi^2 c^2 R} \int_0^{\infty} dt \iiint_V |\mathbf{g}'|^2 d^3r = \\
&= -2F_J \iiint_V d^3r \int_0^{\infty} \mathbf{g}' (\mathbf{g} \exp(-g^2) + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{g} + \tau RC \mathbf{g}'') dt = \\
&= -F_J \iiint_V d^3r \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} (1 - \exp(-g^2) + \lambda^2 |\text{rot } \mathbf{g}|^2 + \tau R C |\mathbf{g}'|^2) - 2 \text{div} [\mathbf{g}' \times \text{rot } \mathbf{g}] \right) dt = \\
&= U(0) - U(\infty) + \frac{\rho}{2} \iiint_V C \langle u_k(+0) \rangle^2 d^3r + \oint_S \oint_0^{\infty} d^2r \int_0^{\infty} [\mathbf{g}' \times \text{rot } \mathbf{g}] dt = W + W_C(+0).
\end{aligned}$$

Здесь  $S$  — поверхность, замыкающая объем сверхпроводника  $V$ ;  $U(t)$  — полная энергия сверхпроводника, ее изменение при исчезновении одного вихря равно энергии вихря  $W$ ;  $W_C$  — энергия межгранульных емкостей в момент времени  $t = +0$ . Заметим, что в силу соотношения (4) на поверхности  $S$  сверхпроводника  $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{H}_S a \pi \sqrt{\pi} / (2\Phi_0) = \text{const}$ . С другой стороны, в установившемся режиме значение  $\mathbf{g}$  на поверхности  $S$  также определяется только внешним полем, значит,  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(\infty)$ , т.е. поверхностный интеграл равен нулю.

Поскольку изменение параметра  $m$  в уравнении (6) рассматривается как адиабатический процесс, в момент перехода  $t = 0$  распределение токов и плотность энергии в любой точке не изменяются. С другой стороны, исчезновение вихря связано с переходом межгранульных джозефсоновских контактов в резистивный режим, т.е.  $\phi_k(+0) = 0$ . При этом бездиссипативный джозефсоновский ток замещается током проводимости и смещения, а потенциальная энергия джозефсоновских контактов  $W_J$  — энергией заряженных межгранульных емкостей  $W_C$ . В дальнейшем энергия  $W_C$  рассеивается при микроволновых колебаниях в джозефсоновских контактах. Поэтому можно положить  $W_C(+0) = W_J(-0) = W/2$  и получить выражение для энергии диссипации при исчезновении вихря

$$q = 1,5W. \quad (15)$$

### 3. Резистивное состояние

Пусть по сверхпроводнику с концентрацией гипервихрей  $N(\mathbf{r})$  протекает транспортный ток с плотностью  $\mathbf{j}$ , гипервихри движутся со скоростью  $\mathbf{v}$ , на них действует сила Лоренца  $\mathbf{f}_L$ , и в единицу времени в единичном объеме сверхпроводника исчезает  $r$  вихрей. Тогда баланс мощностей для единичного объема можно записать в виде

$$\mathbf{E} \mathbf{j} = |N| \mathbf{f}_L \mathbf{v} + r q + W_J \partial(|N|) / \partial t. \quad (16)$$

Здесь учтено, что работа электрического поля по перемещению заряда расходуется не только на тепловые потери, но и на изменение потенциальной энергии джозефсоновских контактов. Сила, против которой совершается работа при изменении фазы  $\phi_k$  контакта, имеет не электромагнитную природу, поскольку энергия контакта не зависит от напряжения на нем и является сторонней силой. В некотором смысле изменение энергии контакта аналогично заряду идеального аккумулятора. С учетом соотношений (12), (15) и уравнения непрерывности

$$\partial |N| / \partial t = -\text{div} (|N| \mathbf{v}) - r,$$

соотношение (16) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{E} \mathbf{j} = \frac{[\mathbf{B} \times \mathbf{v}]}{c} \mathbf{j} - \frac{W}{2} \left[ 2 \frac{\partial (|B| / \Phi)}{\partial t} + 3 \text{div} \left( \frac{|B|}{\Phi} \mathbf{v} \right) \right]. \quad (17)$$

Соотношение (17) является материальным уравнением для критического и резистивного состояний слабогранулярного сверхпроводника и совместно с уравнениями Максвелла

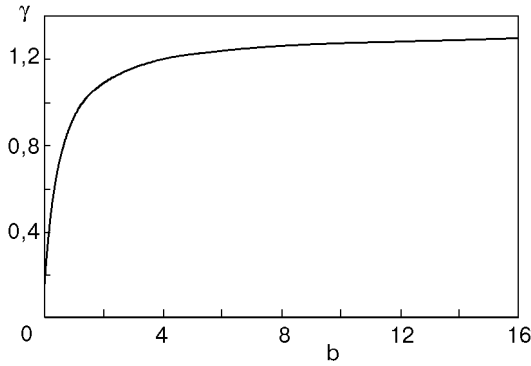


Рис. 2. Зависимость удельного дифференциального сопротивления сверхпроводника в резистивном состоянии от магнитного поля в нормированных координатах.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (18)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (19)$$

полностью описывают его электродинамику. Если магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(x, y)\mathbf{e} = N\Phi\mathbf{e}$ , то  $\text{grad } B = 4\pi[\mathbf{e} \times \mathbf{j}]/c$ .

Рассмотрим стационарный режим, когда плотность транспортного тока практически постоянна и лапласианом магнитной индукции  $B$  можно пренебречь. С учетом соотношения (13) после несложных векторных преобразований уравнение (17) принимает вид нелинейного закона Ома

$$\mathbf{E} = \gamma(|B|)\mathbf{j} \left(1 - \frac{j_C}{|\mathbf{j}|}\right) \Theta(|\mathbf{j}| - j_C), \quad (20)$$

где обозначено

$$\gamma(|B|) = \frac{\lambda_J^2}{\tau c^2} \left( \frac{\Phi|B|}{W} + 6\pi W \frac{d(|B|/W)}{d|B|} \right) \quad (21)$$

— удельное дифференциальное сопротивление в резистивном состоянии. На рис. 2 приведена зависимость от магнитного поля удельного дифференциального сопротивления  $\gamma(|B|)$ , нормированного на характерное сопротивление гранулярной среды  $\gamma_0 = Ra$  и рассчитанного для приведенных на рис. 1 зависимостей потока в вихре и его энергии от среднего магнитного поля  $b$ . Эта зависимость хорошо аппроксимируется формулой

$$\gamma(b)/\gamma_0 = (2 + 40|b|)/(15 + 30|b|). \quad (22)$$

Следует отметить, что для различных значений  $H_{C1}$  и  $\mu_2(B_1)$  для гранул и отношения  $a/\lambda_J$

коэффициенты аппроксимации меняются, но аналитический вид аппроксимирующих функций сохраняется, в частности, при некотором значении среднего магнитного поля удельное сопротивление течения потока  $\gamma$  оказывается больше, чем  $\gamma_0$ . Характерное сопротивление  $\gamma_0$  — это сопротивление трехмерной матрицы из резисторов  $R$  с периодом  $a$ , т.е. удельное сопротивление гранулярного сверхпроводника, когда все межгранульные контакты находятся в резистивном состоянии. Если магнитное поле, создаваемое транспортным током на поверхности сверхпроводника, достаточно велико, и в некотором сечении выполняется условие  $\gamma(B) > \gamma_0$ , то возможно разделение керамического сверхпроводника в резистивном состоянии на две фазы: внутреннюю «джозефсоновскую», где транспортный ток течет через межгранульные контакты в сверхпроводящем состоянии, сопровождаемый движением гипервихрей, и внешнюю «абрикосовскую», когда контакты находятся в резистивном состоянии, гипервихри не образуются, а протекание транспортного тока сопровождается движением в гранулах абрикосовских вихрей, возникающих и исчезающих на границах гранул.

Вопрос о фазовом равновесии в диссипативных системах в настоящее время не решен. Следуя методу неравновесного статистического оператора Зубарева [13] и согласующимся с ним принципом минимума мощности диссипации при заданном внешнем воздействии, роль которого выполняет транспортный ток, можно предположить, что на границе раздела плотность тока непрерывна и должно выполняться условие  $\gamma(j - j_C \text{sgn}(j)) = \gamma_0 j$ . Отметим, что применимость метода Зубарева к существенно нестационарным процессам пока не исследована.

Рассмотрим плоскопараллельную пластину единичной длины из гранулярного сверхпроводника толщиной  $d$ , по которой течет в направлении оси  $y$  постоянный транспортный ток  $I$ , превышающий критическое значение  $I_C = dj_C$  и создающий на поверхности пластины магнитное поле  $H_I = 2\pi I/c$ . Тогда из условия  $\mathbf{B}(t) = \text{const}$  следует, что  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \text{const}$ . Пусть плоскость  $x = 0$  проходит через центр пластины, тогда  $B(0) = 0$ . Если  $H_I \gg H_{C1}$ , то можно положить  $B(d/2) = H_I$ . Обозначая  $U$  — падение напряжения на единичном отрезке вдоль оси  $y$ , из уравнений (19) и (20) найдем

$$I = \frac{c}{2\pi} B \left( \frac{d}{2} \right) = 2 \int_0^{d/2} (U/\gamma + j_C) dx. \quad (23)$$

Найдем дифференциальное сопротивление пластины при  $I = I_C$ ,  $U = 0$ . Положив в уравнении (20)  $E = 0$ , получим  $B(x) = 4\pi j_C x/c$ . Тогда из уравнений (22) и (23) можно найти

$$r = \left. \frac{dU}{dI} \right|_{U=0} = \left( 2 \int_0^{d/2} \frac{dx}{\gamma(B(x))} \right)^{-1} = \frac{4Ra}{3d} \left( 1 + \frac{9cB_J}{40\pi I_C} \ln \left( 1 + \frac{40\pi I_C}{cB_J} \right) \right)^{-1} > \frac{2Ra}{15d} > 0,$$

т.е. в точке  $U = 0$  вольт-амперная характеристика слабогранулярного сверхпроводника имеет излом. Такая зависимость в джозефсоновских структурах наблюдалась экспериментально [14].

Излом вольт-амперной характеристики в точке  $U = 0$  непосредственно связан с тем, что, как следует из уравнения (17),  $E(B = 0) \neq 0$  из-за дополнительной диссипации энергии при исчезновении вихрей. Если принять, как это обычно предполагается для сверхпроводников второго рода [11],  $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{v}]/c$ , то в центре пластины  $E = 0$ , что противоречит требованию постоянства электрического поля по сечению в стационарном режиме.

Общее решение системы уравнений (17)–(19) оказывается довольно громоздким. Для плоскопараллельной пластины эти уравнения удобно свести к системе одномерных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} 4\pi W \frac{d(|B|/\Phi)}{d|B|} \frac{\partial E}{\partial x} \operatorname{sgn}(B) + E \frac{\partial B}{\partial x} = \\ = -\frac{c}{4\pi} \left( \gamma(|B|) \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 + \frac{6\pi\lambda_J^2 B}{\tau c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{4\pi j_C}{c|\partial B/\partial x|} \right) \Theta \left( \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| - \frac{4\pi j_C}{c} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\partial B/\partial t = -c\partial E/\partial x, \quad (25)$$

и решать эту систему численно. Однако полученные численным моделированием распределения трудно непосредственно экспериментально проверить, для сравнения

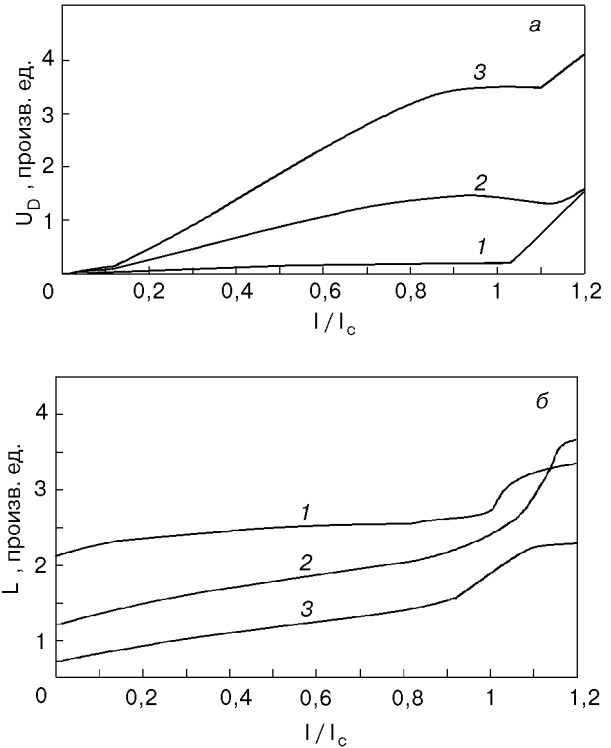


Рис. 3. Расчетные вольт-амперные характеристики (а) и зависимости индуктивности сверхпроводника от транспортного тока (б):  $\omega = 10^{-5}\tau^{-1}$  (1);  $\omega = 3 \cdot 10^{-5}\tau^{-1}$  (2);  $\omega = 10^{-4}\tau^{-1}$  (3).

результатов расчета с экспериментом необходимо связать динамику распределения магнитной индукции в образце с интегральными электрически измеряемыми величинами — током и напряжением.

Рассмотрим сверхпроводящий образец как двухполюсник, по которому протекает транспортный ток  $i(t)$ . С одной стороны, мощность внешнего источника равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность  $S$  образца, с другой — расходуется на изменение полной внутренней энергии образца  $W$  и потери  $P$ , зависящие от квадрата мгновенного значения тока:

$$\begin{aligned} u(t) i(t) &= \frac{4\pi}{c} \iiint_S [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] d^2\mathbf{r} = \\ &= P(i^2(t)) + \frac{dW(i^2(t))}{dt}, \end{aligned}$$

где  $u(t)$  — напряжение на зажимах образца. Обозначим  $u_D(t) = P(t)/i(t)$  — напряжение потерь;  $L = d(2W)/d(i^2)$  — дифференциальная индуктивность. Тогда, учитывая, что на поверхности сверхпроводящего образца векторы



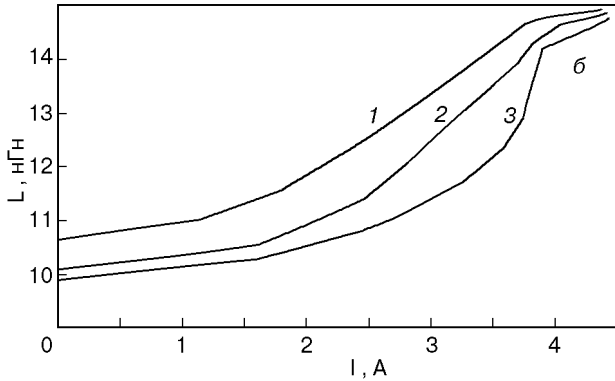
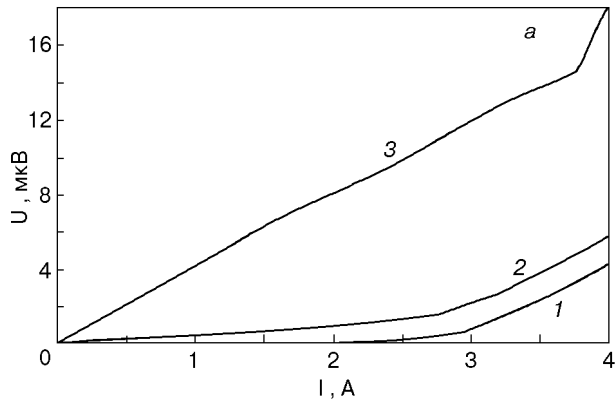


Рис. 4. Экспериментальные вольт-амперные характеристики (а) и зависимости индуктивности сверхпроводника от транспортного тока (б) на различных частотах  $f$ , Гц: 20 (1); 60 (2); 300 (3).

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и направлены по касательной к поверхности образца, с учетом закона полного тока получаем

$$u(t) = \int_1^2 \mathbf{E}_S(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = u_D(i(t)) + L(i^2(t)) \frac{di}{dt}. \quad (26)$$

Интеграл вычисляется по контуру, соединяющему зажимы по поверхности образца по кратчайшему пути. Напряженность электрического поля на поверхности образца  $\mathbf{E}_S$  находится из уравнения (24).

Таким образом, напряжение  $u(t)$  на зажимах образца при заданном токе  $i(t)$  через него является рассчитываемой и непосредственно измеряемой величиной. Для того чтобы найти напряжение потерь и дифференциальную индуктивность, положим, что через образец пропускается синусоидальный ток  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Для любого значения тока  $I$ , не превосходящего по модулю  $I_0$ , можно найти два момента времени  $t_1$  и  $t_2$  такие, что  $i(t_1) = i(t_2) = I$ ,  $di(t_1)/dt = -di(t_2)/dt$ . Тогда, обозначая

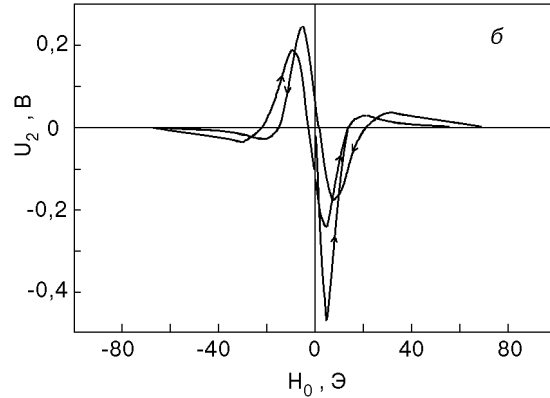
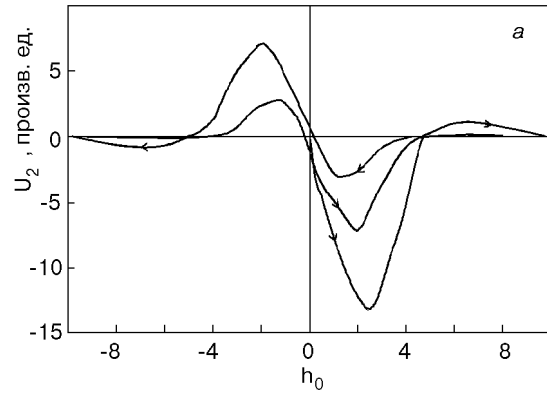


Рис. 5. Расчетная (а) и экспериментальная (б) зависимости действительной составляющей второй гармоники от постоянного внешнего магнитного поля.

$u(t_1) = u_1$ ,  $u(t_2) = u_2$ , из уравнения (26) получаем

$$u_D(I) = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad L(I^2) = \frac{u_1 - u_2}{2\omega(I_0^2 - I^2)^{1/2}}. \quad (27)$$

На рис. 3 приведены результаты численного моделирования вольт-амперной характеристики (зависимости напряжения потерь  $u_D$ ) и зависимости индуктивности гранулярного сверхпроводника от транспортного тока для пластины толщиной  $d = 100\lambda_J$  с критической плотностью тока  $j_C = 5 \cdot 10^{-3} J_J$  на трех различных частотах, нормированных на величину  $1/\tau$ . Ток на рис. 3 нормирован на критическое значение  $I_C = dj_C$ , напряжение и индуктивность отложены в произвольных единицах. Для сравнения на рис. 4 приведены экспериментально измеренные по методике, предложенной в работах [15,16], вольт-амперные характеристики и зависимость индуктивности от транспортного тока на частотах 20, 60 и 300 Гц. Измерения производились на цилиндрическом образце из иттриевой керамики высотой 30 мм, внешним диаметром 20 мм и внутренним 16 мм.

Заметим, что увеличение индуктивности образца при переходе его в резистивное состояние, иногда существенно превышающее геометрическую его индуктивность, — чисто кинетический эффект. Он связан с тем, что в модели (26) предполагается, что напряжение потерь зависит от мгновенного значения транспортного тока. В действительности, из-за конечной скорости вихрей мощность потерь является запаздывающим потенциалом транспортного тока, что приводит к фазовому сдвигу напряжения потерь  $u_D(t)$  по отношению к транспортному току  $I(t)$ . Этот фазовый сдвиг регистрируется измерительной схемой как увеличение индуктивности.

На рис. 5,а приведена расчетная зависимость действительной части второй гармоники отклика слабогранулярного ВТСП на переменное магнитное поле от напряженности внешнего постоянного поля. Расчет выполнялся для бесконечной плоскопараллельной пластины толщиной  $2000 \lambda_J$ , плотность критического тока принята  $j_C = 5 \cdot 10^{-3} J_J$ , переменное магнитное поле полагалось синусоидальным с частотой  $\omega = 10^{-3}/\tau$  и амплитудой  $3,2B_J$ . Напряженность внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  на оси абсцисс отложена в безразмерных единицах  $h_0 = H_0/B_J$ , масштаб по оси ординат произвольный. Для сравнения на рис. 5,б приведена экспериментальная зависимость, измеренная по методике, описанной в [17]. Измерения выполнялись при температуре 77 К на образце иттриевой керамики диаметром 2,5 мм и длиной 15 мм в переменном магнитном поле частотой 10 кГц и амплитудой 5 Э. Аналогичные экспериментальные результаты приведены в работе [18].

### Заключение

Хорошее согласование расчетных и экспериментальных зависимостей свидетельствует о плодотворности моделей гипервихрей для построения феноменологической электродинамики керамических сверхпроводников. Представляет интерес вопрос о реальном существовании и наблюдаемости гипервихрей в керамических сверхпроводниках. Математически уединенный гипервихрь является сингулярным решением материального уравнения (6), физически описывает кольцеобразное замыкание тока через межгранулярные джозефсоновские контакты, играющего роль связки для абрикосовских вихрей в гранулах. Численное моделирование показывает

энергетическую выгоду такой структуры. В вихревой решетке магнитный поток, создаваемый кольцевыми токами, может составлять доли процента от потока абрикосовских вихрей, а конфигурация этих токов оказывается достаточно сложной, поэтому их прямое наблюдение вряд ли возможно. Можно считать, что модель гипервихрей аналитически описывает нелинейное и нелокальное взаимодействие в гранулах абрикосовских вихрей через систему межгранулярных джозефсоновских контактов между собой и с приповерхностными и транспортными токами. О наличии такого взаимодействия говорит экспериментально наблюдаемый сложный характер нелинейной восприимчивости ВТСП [17,18], которую не удастся количественно описать в рамках жесткой модели Бина, модели спинового стекла и перколяционной.

Работа выполнена в рамках проекта № 93-092 Государственной программы «Высокотемпературная сверхпроводимость». Автор благодарит А. Е. Коншина за предоставленные экспериментальные результаты по вольт-амперным характеристикам ВТСП.

1. Э. Б. Сонин, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 415 (1988).
2. Е. З. Мейлихов, В. Г. Шапиро, *СФХТ* **4**, 1437 (1991).
3. А. С. Петров, Е. Е. Слядникова, *СФХТ* **6**, 538 (1993).
4. М. А. Зеликман, *СФХТ* **7**, 946 (1994).
5. В. К. Игнатъев, *СФХТ* **7**, 215 (1994).
6. К. К. Лихарев, Б. Т. Ульрих, *Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории*, Изд-во МГУ, Москва (1978).
7. Г. С. Мкртчян, Ф. Р. Шакирзанова, Е. А. Шаповал, В. В. Шмидт, *ЖЭТФ* **63**, 667 (1972).
8. Г. С. Мкртчян, В. В. Шмидт, *ЖЭТФ* **68**, 186 (1975).
9. С. Р. Bean, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 250 (1962).
10. С. Р. Bean, *Technical Report Grant 88f034-NYSIS 162* (1992).
11. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, *УФН* **116**, 413 (1975).
12. А. В. Гуревич, Р. Г. Минц, А. Л. Рахманов, *Физика композитных сверхпроводников*, Наука, Москва (1987).
13. Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, Москва (1971).
14. И. Я. Краснополин, И. Я. Кислянский, *Вольт-амперные характеристики и критические токи в неоднородной S-N среде с джозефсоновским взаимодействием между S-областями. Тез. 24 Всесоюз. сов. по физике низких температур*, Тбилиси, 194 (1986).
15. М. В. Белоделов, В. К. Игнатъев, *СФХТ* **3**, 953 (1990).
16. В. К. Игнатъев, А. Е. Коншин, *Индукционный измеритель полного сопротивления*, ПТЭ (в печати).
17. В. К. Игнатъев, С. В. Черных, *СФХТ* **7**, 1411 (1994).
18. В. Ф. Мастеров и др., *СФХТ* **4**, 470 (1991).

---

## Simulation of resistive state of slightly granular superconductor

V. K. Ignatjev

An equation for hypervortex in a slightly granular superconductor is obtained, and the vortex

lattice is numerically simulated. The dissipation by vortex emergence, collapse and moving is considered. Equations for static and dynamic magnetization, nonlinear resistivity and resistive state are derived in good agreement with the experiment.