Физика низких температур, 1996, т. 22, № 6, с. 648–650

Ток-фазовые зависимости сверхпроводящих сверхрешеток

Г. А. Гогадзе, А. Н. Омельянчук

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

В рамках схемы Гинзбурга—Ландау получена система уравнений, с помощью которой рассчитана ток-фазовая зависимость сверхпроводящих сверхрешеток (СС). Исследован переход от джозефсоновского поведения СС (большие значения константы подавления параметра порядка λ) к квазиоднородному протеканию сверхпроводящего тока. Показано, что по мере уменьшения λ максимум сверхпроводящего тока СС смещается в область меньших значений разности фаз на периоде решетки.

У рамках схеми Гінзбурга—Ландау одержано систему рівнянь, за допомогою якої розраховано ток-фазову залежність надпровідних надрешіток (НН). Досліджено перехід від джозефсонівської поведінки НН (великі значення константи пригнічення параметра порядку λ) до квазіоднорідного протікання надпровідного струму. Показано, що в міру того як зменшується λ максимум надпровідного струму НН зміщується в область менших значень різниці фаз на періоді решітки.

Сверхпроводящие системы с периодически меняющимся в пространстве параметром порядка получили название сверхпроводящих сверхрешеток (СС). Различные аспекты проблемы СС, связанные с изучением блоховских состояний квазичастиц в сверхрешетках, исследовались многими авторами (см., например, [1]). В работе [2] впервые было обращено внимание на то, что спектр конденсата СС расщепляется на зоны разрешенных и запрещенных энергий, начиная с некоторого порогового уровня модуляции параметра порядка сверхрешеткой. При этом квазиоднородное протекание сверхтекучего тока в СС сменяется на режим, аналогичный джозефсоновскому поведению одиночного слабого контакта. Специфика джозефсоновского поведения СС проявляется в том, что, наряду с обычным сверхпроводящим током, отвечающим нижайшей зоне, возможны вышележащие по энергии токовые состояния конденсата в возбужденных зонах.

Исследование СС позволяет проследить, как происходит переход от квазиоднородного протекания сверхпроводящего тока к джозефсоновскому поведению системы по мере уменьшения связи смежных сверхпроводящих областей. Эта проблема является актуальной в связи с успехами в области технологии получения сверхпроводящих мезоскопических структур.

В данной работе вычислен сверхпроводящий ток СС. Рассмотрение проведено в рамках схемы Гинзбурга—Ландау на примере сверхпроводящей пленки, параметр порядка в которой подавлен вследствие эффекта близости периодически напыленными полосками нормального металла. С помощью полученной системы уравнений рассчитана ток-фазовая зависимость для СС. Показано, что по мере уменьшения степени подавления параметра порядка (возрастания вероятности прохождения частиц через слабую связь) максимум сверхпроводящего тока СС смещается в область меньших значений разности фаз на периоде решетки.

Для описания СС воспользуемся уравнением Гинзбурга—Ландау, записанным с помощью нормализованных переменных:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \psi(x)[1 - |\psi(x)|^2] = \lambda \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - ma)\psi(x), \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — параметр порядка СС; a — период сверхрешетки; λ — положительная безразмерная константа, характеризующая степень подавления сверхпроводимости в точках $x = ma$. Используемая в (1) модель Кронига—Пенни справедлива в случае, когда действие распаривающего механизма локализовано на расстояниях, меньших периода СС и длины когерентности сверхпроводника $\xi(T)$.

Введем модуль и фазу параметра порядка $\psi(x) = F(x) \exp(i\chi(x))$. Набег фазы на периоде СС связан с квазиимпульсом p_s соотношением

$$\varphi \equiv p_s a = I \int_0^a dx/F^2(x) ,$$

© Г. А. Гогадзе, А. Н. Омельянчук, 1996

где I — плотность сверхтекучего тока. Уравнение для $F(x)$ имеет вид

$$F'' - I^2/F^3 + F(1 - F^2) = \lambda \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - ma)F \ . \quad (2)$$

Будем решать его в интервале $0 \le x \le a$ (с правой частью, равной нулю) и с граничными условиями

$$F(0) = F(a) \ , \quad F'(0) = -F'(a) \ , \quad F'(0) = \lambda F(0) \ . \quad (3)$$

Решение задачи выражается через эллиптические функции Якоби модуля $q = \sqrt{(z_0 - z_1)/(z_2 - z_1)}$, z_0 — значение $z(x) = F^2(x)$ в центре интервала $[0, a]$, а величины z_2 , z_1 выражаются через z_0 , I:

$$z_{1,2} = \left(1 - \frac{z_0}{2}\right)\left\{1 \mp \sqrt{1 - \frac{2I^2}{z_0(1 - z_0/2)^2}}\right\} \ . \quad (4)$$

Получена система уравнений, определяющая в неявном виде зависимость тока от фазы:

$$F(\delta, q) + nK(q) = \frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{z_2 - z_1} \quad (5)$$

$$(n = 0, 1, 2, ..., n_{\max}) \ ;$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{I\sqrt{2}}{z_0 z_2 \sqrt{z_2 - z_1}} \times$$

$$\times \left\{ n\left[(z_2 - z_0)\,\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, q^2\frac{z_2}{z_0}; q\right) + z_0 K(q)\right] + \right.$$

$$\left. + (z_2 - z_0)\Pi\left(\delta, q^2\frac{z_2}{z_0}; q\right) + z_0 F(\delta, q)\right\} \ ; \quad (6)$$

$$(z_0 - z_a)[z_a - I^2/z_0 - z_a(z_0 + z_a)/2] = \lambda^2 z_a^2 \ . \quad (7)$$

Здесь использованы обозначения: $F(\delta, q)$ — эллиптический интеграл первого рода; $\Pi(\delta, \nu; q)$ — эллиптический интеграл третьего рода; $K(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; $\Pi_1(\pi/2, \nu; q)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода; z_a — значение $z(x)$ в точках $0, a$; $\delta = \arcsin\sqrt{(z_2 - z_1)(z_0 - z_a)/(z_0 - z_1)(z_2 - z_a)}$.

При произвольных λ решение системы (5)–(7) удалось найти лишь численно [2]. Были установлены следующие качественные закономерности.

а) Существует конечное число n блоховских решений (зон) уравнения (1), что является следствием нелинейности уравнения Гинзбурга-Ландау. Число зон конденсата возрастает с ростом периода СС.

б) При заданном периоде СС переход от квазиоднородного токового состояния к джозефсоновскому поведению (когда ток-фазовая зависимость становится однозначной функцией) происходит, начиная с некоторого критического значения константы подавления сверхпроводимости $\lambda = \lambda_{cr}$.

Аналитическую зависимость тока от фазы удается получить в предельном случае больших значений λ. Полагая параметр $\varepsilon = 1/\lambda << 1$, можно решить систему уравнений (5)–(7) в виде разложений искомых величин в ряды по степеням этого малого параметра. Случай больших λ соответствует приближению слабой связи и описывает джозефсоновский предел поведения СС. При расчете плотности тока используются два точных соотношения:

$$z_0 + z_1 + z_2 = 2 \ , \quad I^2 = \frac{1}{2} z_0 z_1 z_2 \ . \quad (8)$$

Таким образом, система уравнений (5)–(7) фактически зависит от трех независимых переменных z_0 , z_a , I и оказывается разрешимой.

Переходя к вычислению тока в СС, запишем входящие в систему величины в виде рядов по параметру ε. Нулевое приближение по ε ($\lambda \to \infty$) соответствует разобщению смежных сверхпроводящих областей СС, когда невозможно протекание сверхтекучего тока в системе, т.е. $I^{(0)} = 0$. В этом же приближении на основании (4) и (7) имеем $z_1^{(0)} = z_a^{(0)} = 0$, $z_2^{(0)} = 2 - z_0^{(0)}$. Подставляя эти значения в (5), приходим к уравнению для $z_0^{(0)}$:

$$K\left(\sqrt{\frac{z_0^{(0)}}{2 - z_0^{(0)}}}\right)(n + 1)\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - z_0^{(0)}}} = a \ . \quad (9)$$

На рис. 1 приведено графическое решение уравнения (9). Видно, что при заданном периоде СС существует ограниченное число значений $z_0^{(0)}$. С другой стороны, условие существования решений этого уравнения сводится к требованию, чтобы вы-

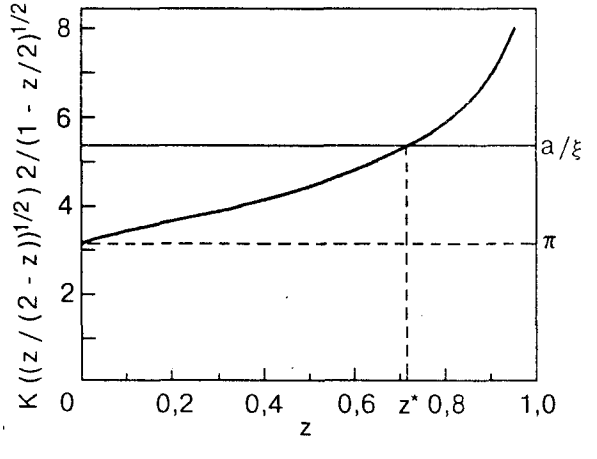

Рис. 1. Графическое решение уравнения (9) для нижайшей зоны конденсата СС ($n = 0$).

полнялось неравенство $a \geq \pi\xi(T)$. При меньших значениях периода сверхтекучий ток в системе СС отсутствует [2]. Аналогичный вывод об отсутствии сверхпроводящего тока в структуре с двумя потенциальными барьерами в виде δ-функций, когда расстояние между ними меньше $\pi\xi(T)$, получен в работе [3].

Отличный от нуля ток СС возникает в первом приближении по параметру ε. Совместное решение системы (5)–(7) приводит к выражению для тока:

$$I^{(1)} = (-1)^n I_{cn} \sin\varphi \ , \qquad (10)$$

где критический ток СС для n-ой зоны равен

$$I_{cn} = \frac{1}{4\lambda} z_0^{(0)} z_2^{(0)} \ . \qquad (11)$$

Из рис. 1 видно, что с ростом индекса зоны n (для высших зон построенная кривая смещается вверх) корень уравнения (9) и соответствующее значение критического тока в зоне убывают.

Найдем следующую поправку к току Джозефсона по ε, ограничившись рассмотрением нижайшей зоны ($n = 0$). Окончательно получаем следующее выражение для тока:

$$I(\varphi) = \frac{1}{4\lambda} z_0^{(0)} z_2^{(0)} \alpha \sin\varphi + \frac{1}{32\lambda^2} \beta \sin 2\varphi + \ldots \ . \qquad (12)$$

Здесь

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\lambda} \frac{2z_0^{(1)}(1 - z_0^{(0)})}{z_0^{(0)} z_2^{(0)}} \ , \quad \beta = a z_0^{(0)2} z_2^{(0)} \ ,$$

где

$$z_0^{(1)} = \frac{2z_2^{(0)3/2}}{\sqrt{z_0^{(0)}}} - 2\frac{\sqrt{2}}{a} \frac{z_2^{(0)2}}{\sqrt{z_0^{(0)}}(1 - z_0^{(0)})} E\left(\sqrt{\frac{z_0^{(0)}}{z_2^{(0)}}}\right),$$

а $E(q)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Ток-фазовая зависимость (12) позволяет проанализировать переход от чисто джозефсоновского поведения СС к токовому состоянию с меньшим значением параметра λ. Для исследуемого квазиодномерного сверхпроводника параметр λ может быть связан с прозрачностью потенциального барьера T_0 для фермиевского электрона соотношением $T_0 = 1/(2\lambda)$ [4]. Вычисляя максимум выражения (12) (при условии $(1/\lambda) a z_0^{(0)}/(4\alpha) < 1$), находим фазу, при которой он реализуется: $\cos\varphi^* \simeq a z_0^{(0)} T_0/(2\alpha)$. Таким образом, с ростом прозрачности барьеров T_0 фаза φ^* смещается в область малых значений разности фаз на периоде решетки. Этот результат коррелирует с полученным с помощью машинного счета выводом работы Сола и Феррера [5] о поведении ток-фазовой зависимости одиночного сверхпроводящего контакта при увеличении его прозрачности.

1. Г. А. Гогадзе, *ФНТ* **21**, 177 (1995).
2. А. Н. Омельянчук, Г. А. Гогадзе, И. О. Кулик, *ФНТ* **6**, 40 (1980).
3. F. Sols, J. Ferrer, and I. Zapata, *Physica* **B203**, 467 (1994).
4. А. Ф. Волков, *ЖЭТФ* **66**, 758 (1974).
5. F. Sols and J. Ferrer, *Phys. Rev.* **B49**, 15913 (1994).

Current-phase dependences of superconducting superlattices

G. A. Gogadze and A. N. Omelyanchouk

A set of equations is derived in the framework of the Ginzburg-Landau scheme and current-phase characteristics for a superconducting superlattice (SS) are calculated. The transition from the Josephson-like behavior of SS (high values of the constant λ, characterizing the suppression of the superconducting order parameter) to a homogeneous current-carrying state is investigated. It is shown that as λ decreases, the maximum superconducting SS current if displaced to lower values of the phase difference in the lattice period.