Физика низких температур, 1997, т. 23, № 1, с. 58–72

Теория кинетических явлений в двумерном вырожденном газе сталкивающихся электронов

Р. Н. Гуржи, А. Н. Калиненко, А. И. Копелиович

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: gurzhi@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 9 июля 1996 г.

Построен математический аппарат, основанный на сокращенном представлении оператора межэлектронных столкновений, действующего в пространстве квазиравновесных функций. С единой точки зрения описан ряд кинетических явлений: эволюция сильно анизотропных и высокоэнергетических электронных распределений, квазигидродинамический эффект в электропроводности, новый нелинейный транспортный режим. Предсказаны кинетические эффекты, которые могут наблюдаться в экспериментах по распространению электронных пучков и при измерении электропроводности (GaAs)Al-проволок с высокой подвижностью носителей.

Побудовано математичний аппарат, заснований на скороченому зображенні оператора міжелектронних зіткнень, який діє у просторі квазірівноважних функцій. З єдиної точки зору описано ряд кінетичних явищ: еволюція дуже анізотропних та високоенергетичних електронних розподілів, квазігідродинамічний ефект у електропровідності, новий нелінійний транспортний режим. Передбачено кінетичні ефекти, які можуть спостерігатися в експериментах по поширенню електронних пучків та при вимірюванні електропровідності (GaAs)Al-смуг з високою рухливістю носіїв.

PACS: 72.10.Bg

Введение

Понижение размерности системы электронов со слабым отталкиванием с трех до двух не приводит к перестройке ее основного состояния, но существенно видоизменяет процессы межэлектронной релаксации. Энергетическая релаксация в вырожденной двумерной ($2D$) электронной системе ускоряется в $\ln(\varepsilon_F/T)$ раз по сравнению с $3D$ случаем (ε_F — энергия Ферми, T — температура) [1,2]. Более кардинальные изменения претерпевает релаксация по направлению скорости электронов (угловая или импульсная релаксация) [3–5]. *Столкновения двух произвольно взятых электронов* приводят, вообще говоря, к рассеянию на малый угол $\varphi \simeq$ $\ll 1$. Исключением являются столкновения электронов, имеющих почти противоположные импульсы: угол отклонения от антипараллельности $\eta \leq T/\varepsilon_F \ll 1$. При этом рассеяние может быть любым ($\varphi \simeq 1$). Заметим, что в отличие от $3D$ случая в $2D$ системе вероятности процессов обоих типов по порядку величины совпадают. Процессы второго типа вполне эффективны при релаксации четного по импульсу электронного распределения, соответствующее время релаксации того же порядка величины, что и в $3D$ случае: $\tau_s \propto (\varepsilon_F/T)^2$. Оба вида столкновений малоэффективны при релаксации нечетного по импульсу распределения: $\tau_a \simeq \tau_s(\varepsilon_F/T)^2 \propto T^{-4}$. Неэффективность столкновений второго типа объясняется тем, что поворот пары электронов с противоположными импульсами на произвольный угол φ не влияет на нечетную часть распределения.

Указанные результаты относятся к случаю слабо анизотропных и слабонеравновесных электронных распределений. С уменьшением характерного углового масштаба неравновесности φ_0 уменьшается время релаксации нечетного распределения, оно становится порядка τ_s при $\varphi_0 \simeq \sqrt{T/\varepsilon_F}$ [6].

В гетероструктурах относительно недавно обнаружены эффекты, в которых указанные выше особенности угловой релаксации в двумерных системах играют существенную роль: гидродинамические эффекты в электропроводности проволок с двумерным электронным газом ($2D$ЭГ), приводящие к обратному температурному ходу электросопротивления [7]; эксперименты с впрыскиваемыми в $2D$ЭГ электронными пучками (см., например, [8,9] , из которых можно получить наиболее детальную информацию об угловой релаксации). Наконец, как показано в работе [10],

© Р. Н. Гуржи, А. Н. Калиненко, А. И. Копелиович, 1997

эффект увлечения $2D$ЭГ пучком баллистических фононов [11] также может быть использован для изучения угловой электронной релаксации.

Целью настоящей работы является последовательное теоретическое описание импульсной релаксации в двумерной вырожденной электронной системе и рассмотрение некоторых новых эффектов, связанных с сильно анизотропными электронными распределениями и нелинейными явлениями. В разд. 1 дана общая схема описания угловой релаксации на различных ее этапах. В разд. 2 развитый математический аппарат применяется для рассмотрения эффектов гидродинамического типа. В разд. 3 рассмотрена эволюция сильно анизотропных распределений, энергия возбуждения электронов в которых значительно превышает температуру (высокоэнергетические электронные пучки). В заключении процессы релаксации сильно анизотропных распределений обсуждаются на качественном уровне и формулируются выводы работы, относящиеся к экспериментально наблюдаемым эффектам в гетероструктурах на основе (GaAs)Al.

1. Преобразование оператора столкновений

1.1. Распределения близкие к равновесию по энергии

Линеаризованный интеграл электрон-электронных столкновений может быть записан в виде

$$J\{\chi_{\mathbf{p}}\} = \frac{\pi^2}{2Th^5}\int W_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}_1}(1-n_{\mathbf{p}_2})(1-n_{\mathbf{p}_3})(\chi_{\mathbf{p}}+\chi_{\mathbf{p}_1}-\chi_{\mathbf{p}_2}-\chi_{\mathbf{p}_3})\times$$

$$\times\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\varepsilon_{\mathbf{p}_1}-\varepsilon_{\mathbf{p}_2}-\varepsilon_{\mathbf{p}_3})\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)\,d^2p_1\,d^2p_2\,d^2p_3\,, \qquad (1)$$

$$W_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} = (\Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_3}-\Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_2})^2+\Phi^2_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_3}+\Phi^2_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_2}\,.$$

Здесь $\mathbf{p}$ — двумерный импульс электрона; $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — энергия электрона, отсчитываемая от уровня Ферми; $n_{\mathbf{p}}$ — фермиевская функция распределения; неравновесная добавка записана в виде $f_{\mathbf{p}} = -\chi_{\mathbf{p}}\,\partial n/\partial\varepsilon$ (заметим, что такая запись удобна лишь для распределений, в которых характерная энергия возбуждений электронов ε не превышает существенно температуру T); $\Phi_{\mathbf{p}}$ — фурье-образ функции $\Phi(\vec{\rho})$, следующим образом связанной с экранированным потенциалом взаимодействия электронов $U(\vec{\rho}, y, y')$:

$$\Phi(\vec{\rho}) = \int |\Psi(y')|^2|\Psi(y+y')|^2 U(\vec{\rho}, y, y')\,dy\,dy'\,,$$

$\vec{\rho}$ и y — составляющие вектора разности координат двух электронов в плоскости проводимости и в перпендикулярном направлении соответственно; вследствие экранирования U зависит и от поперечной координаты одного из электронов y'; $\Psi(y)$ — волновая функция электрона в слое.

Частота межэлектронной энергетической релаксации $\tau_{\varepsilon n}^{-1}$ получается из (1) в приближении времени релаксации, т.е. как и коэффициент при $-\chi_{\mathbf{p}}\,\partial n/\partial\varepsilon$ в (1):

$$\tau_{\varepsilon n}^{-1} \simeq \tau_0^{-1}\frac{\varepsilon^2+2\pi^2T^2}{\varepsilon_F^2}\ln\left(\frac{\varepsilon_F}{T+|\varepsilon|}\right)\,, \qquad (2)$$

$$\tau_0^{-1} = \frac{\pi^2 W m p_F^2}{4h^5}\,.$$

Для простоты записи величина W считается константой.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести квадратичный по произвольным функциям $\chi_{\mathbf{p}}$ и $\psi_{\mathbf{p}}$ функционал

$$F\{\psi,\chi\} = \int \psi_{\mathbf{p}} J\{\chi_{\mathbf{p}}\}\,d^2p =$$

$$= \frac{1}{4}\int R_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}(\psi_{\mathbf{p}}+\psi_{\mathbf{p}_1}-\psi_{\mathbf{p}_2}-\psi_{\mathbf{p}_3})\times$$

$$\times\,(\chi_{\mathbf{p}}+\chi_{\mathbf{p}_1}-\chi_{\mathbf{p}_2}-\chi_{\mathbf{p}_3})\,d^2p\,d^2p_1\,d^2p_2\,d^2p_3\,; \qquad (3)$$

$$R_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} = \frac{\pi^2}{2Th^5}W_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3} n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}_1}(1-n_{\mathbf{p}_2})(1-n_{\mathbf{p}_3})\times$$

$$\times\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\varepsilon_{\mathbf{p}_1}-\varepsilon_{\mathbf{p}_2}-\varepsilon_{\mathbf{p}_3})\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)\,.$$

Мы воспользовались следующими свойствами симметрии величины R: $R_{1234} = R_{2134} = R_{1243} = R_{3412}$. Функционал $F\{\chi,\chi\}$ часто используется

при формулировании вариационного принципа в задачах кинетики.

Если функции $\chi_{\mathbf{p}}$ и $\psi_{\mathbf{p}}$ имеют определенную четность относительно замены $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, то функционал (3) можно переписать следующим образом:

$$F = \int \Phi_{\mathbf{pkq}} (\hat{D}_{\mathbf{k}}^{+} \hat{D}_{\mathbf{q}}^{-} \psi_{\mathbf{p}})(\hat{D}_{\mathbf{k}}^{+} \hat{D}_{\mathbf{q}}^{-} \chi_{\mathbf{p}})\, d^2p\, d^2k\, d^2q \ , \tag{4}$$

$$R_{\mathbf{pp_1p_2p_3}} = 4\Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}/2-\mathbf{q}/2,\, \mathbf{k},\, \mathbf{q}}\, \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \ ,$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 \ , \quad \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \ ,$$

где введен оператор конечной разности (суммы)

$$\hat{D}_{\mathbf{a}}^{\pm} \chi_{\mathbf{p}} = \chi_{\mathbf{p}+\mathbf{a}/2} \mp \chi_{\mathbf{p}-\mathbf{a}/2} \ .$$

Операторы $\hat{D}_{\mathbf{k}}^{-}$ и $\hat{D}_{\mathbf{k}}^{+}$ в (4) соответствуют нечетной и четной функциям $\chi_{\mathbf{p}}$ соответственно (четности функций $\chi_{\mathbf{p}}$ и $\psi_{\mathbf{p}}$ совпадают, так как в противном случае $F \equiv 0$). Пользуясь произвольностью функции ψ, получаем из (4) следующее выражение для оператора столкновений:

$$J\{\chi_{\mathbf{p}}\} = \mp \int \hat{D}_{\mathbf{k}}^{+} \hat{D}_{\mathbf{q}}^{-} \Phi_{\mathbf{pkq}} \hat{D}_{\mathbf{k}}^{+} \hat{D}_{\mathbf{q}}^{-} \chi_{\mathbf{p}}\, d^2k\, d^2q \ , \tag{5}$$

которое, разумеется, тождественно выражению (1).

Самое точное выражение (5) не удобно для оценки частот угловой релаксации, поскольку величина Φ является острой функцией энергии. Если предположить, что вследствие близости к равновесию по энергии функцию χ можно считать не зависящей от ε (обоснованность этого предположения обсуждается в разд. 1.2), то в выражении для оператора угловой релаксации можно произвести интегрирование по энергиям состояний $\mathbf{p}$, $\mathbf{k} - \mathbf{p}$ и $\mathbf{p} - \mathbf{q}$:

$$\int J\{\chi(\alpha)\}\, d\varepsilon_{\mathbf{p}} \simeq \mp \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\eta, \varphi) (\hat{D}_{\eta}^{+} \hat{D}_{\varphi}^{-})^2 \chi(\alpha)\, d\eta\, d\varphi, \tag{6}$$

$$V(\eta, \varphi) = \int \Phi_{\mathbf{pkq}}\, d\varepsilon_{\mathbf{p}}\, d\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}\, d\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \ ;$$

$$\hat{D}_{\beta}^{\pm} \chi(\alpha) = \chi\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \pm \chi\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \ ;$$

α — угловая переменная, отвечающая состоянию $\mathbf{p}$. Это выражение удобнее получать не из (5), а из (4), полагая функцию ψ также не зависящей от энергии. При выводе (6) считалось, что фиксированным значениям величин q и k соответствуют фиксированные значения угловых смещений φ и η: $\sin(\varphi/2) = q/2p_F$, $\sin(\eta/2) = k/2p_F$. Отклонения порядка T/ε_F от указанного соответствия существенны только в областях углов $\eta \le T/\varepsilon_F$ и $\pi - \eta \le T/\varepsilon_F$. Однако учет вклада этих областей, как можно проверить, приводит только к несущественным изменениям численных коэффициентов. Если предположить, что величина W мало меняется при изменении энергии электронных состояний в области теплового размытия поверхности Ферми, т.е. $W \simeq W(\eta, \varphi)$, то

$$V(\eta, \varphi) \simeq \frac{\pi^2 m^3}{8Th^5} \frac{W(\eta, \varphi)}{1 + \cos\eta} \left[\frac{\Delta}{2\,\mathrm{sh}\,(\Delta/2T)}\right]^2 \ ; \tag{7}$$

$$\Delta = 2\varepsilon_F \frac{\sin\varphi \sin\eta}{1 + \cos\eta} \ ; \quad \eta, \pi - \eta >> T/\varepsilon_F \ ;$$

Δ — передача энергии при столкновении.

Рассмотрим также угловую релаксацию с учетом слабой зависимости χ от ε. В стационарном, пространственно однородном случае энергетическая зависимость имеет вид «локального дрейфа» [3]:

$$\chi(\alpha, \varepsilon) \simeq \bar{\chi}(\alpha) - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_F} \frac{d^2\bar{\chi}(\alpha)}{d\alpha^2} \ , \tag{8}$$

где $\bar{\chi}(\alpha)$ — произвольная нечетная функция. Такая связь между энергетической и угловой зависимостями, существующая и при истинном дрейфе $\chi = \mathbf{up}$, навязывается «горизонтальными переходами» — столкновениями с малой передачей энергии: $\Delta << qv_F$ (но в то же время $q << p_F$). При вычислениях удобно использовать функционал (4) с функцией ψ, также имеющей структуру (8). Результат имеет вид

$$F\{\psi, \chi_a\} \simeq \tag{9}$$

$$\simeq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int \bar{\psi}(\alpha) \left\{ V(\eta, \varphi) \left(\hat{D}_{\eta}^{-} \hat{D}_{\varphi}^{-} - \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \hat{D}_{\eta}^{+} \hat{D}_{\varphi}^{+} \frac{d^2}{d\alpha^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - V_1(\eta, \varphi) (\hat{D}_{\varphi}^{-})^2 \frac{d^4}{d\alpha^4} \right\} \bar{\chi}(\alpha)\, d\eta\, d\varphi\, d\alpha \ ,$$

$$V_1(\eta, \varphi) = \frac{1}{3} V(\eta, \varphi) \frac{\Delta^2 + 4\pi^2 T^2}{\varepsilon_F^2} \ .$$

Ввиду произвольности $\bar{\psi}(\alpha)$ и того, что

$$F\{\psi, \chi_a\} \simeq F\{\bar{\psi}, \chi_a\} \ , \tag{10}$$

((10) доказано в Приложении, разд. А), из (9) непосредственно следует выражение для оператора нечетной угловой релаксации $\int J\{\chi_a\}\, d\varepsilon$.

При малых η и φ операторы $\hat{D}_\eta^\pm$ и $\hat{D}_\varphi^\pm$ могут быть разложены по этим величинам. Интересно, что главные члены разложения, пропорциональные $(\eta\varphi)^2$, присутствуют в (6), но взаимно уничтожаются в выражении (9) (в слагаемом с V). Таким образом, учет даже слабой энергетической зависимости функции χ, вообще говоря, существен при оценке скорости нечетной угловой релаксации.

1.2. Высокоэнергетические неравновесные распределения ($T \ll |\varepsilon| \ll \varepsilon_F$)

Если энергия возбуждения неравновесных электронов значительно превышает температуру, то величина $\chi = -(dn/d\varepsilon)^{-1} f$ экспоненциально растет с увеличением $|\varepsilon|$ в пределах области возбуждения (где f не исчезающе мало). Поэтому в скобке в (1), содержащей χ, можно пренебречь тремя слагаемыми по сравнению с одним, соответствующим максимальному значению $|\varepsilon|$. Это означает, что при $T \to 0$ интеграл столкновений можно представить в виде

$$J\{f_{\mathrm{p}}\} = -\int (\nu_{\mathrm{p'p}} f_{\mathrm{p}} - \nu_{\mathrm{pp'}} f_{\mathrm{p'}})\, d^2p' , \tag{11}$$

$$\nu_{\mathrm{pp'}} = \frac{\pi^2}{2h^5}\begin{cases} 2\int U_{\mathrm{pp_1p_2p'}}\, d^2p_1\, d^2p_2 , & \varepsilon\varepsilon' > 0,\ \varepsilon\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon\varepsilon_2 < 0 , \\ -\int U_{\mathrm{pp'p_2p_3}}\, d^2p_2\, d^2p_3 , & \varepsilon\varepsilon' < 0,\ \varepsilon\varepsilon_2 < 0,\ \varepsilon\varepsilon_3 < 0 , \end{cases}$$

$$U_{\mathrm{pp_1p_2p_3}} = W_{\mathrm{pp_1p_2p_3}}\, \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\delta(\mathrm{p} + \mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3) ,$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathrm{p}} ,\quad \varepsilon' \equiv \varepsilon_{\mathrm{p'}} ,\quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{\mathrm{p}_1} ,\quad \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{\mathrm{p}_2} .$$

Как следует из (11), $\nu_{\mathrm{pp'}} = 0$ при $|\varepsilon'| < |\varepsilon|$. Это естественно, поскольку на данной «дотемпературной» стадии релаксации уход из состояния p осуществляется только вниз по абсолютной величине энергии, приход — только сверху. В данном приближении вместо (3) имеем

$$F\{\psi, f\} = -\int U_{\mathrm{pp_1p_2p_3}}(\psi_{\mathrm{p}} + \psi_{\mathrm{p}_1} - \psi_{\mathrm{p}_2} - \psi_{\mathrm{p}_3}) f_{\mathrm{p}}\, d^2p\, d^2p_1\, d^2p_2\, d^2p_3 = -\int \nu_{\mathrm{pp'}}(\psi_{\mathrm{p}} - \psi_{\mathrm{p'}}) f_{\mathrm{p'}}\, d^2p\, d^2p' , \tag{12}$$

$$|\varepsilon_2|,\ |\varepsilon_3|,\ |\varepsilon_4| < |\varepsilon_1| .$$

Предполагая электронный спектр квадратичным и изотропным, а величину W считая для простоты записи постоянной, с точностью до несущественных величин порядка $\varepsilon/\varepsilon_F$ из (11) получаем

$$\nu_{\mathrm{pp'}} \simeq 2C\begin{cases} \dfrac{|K(\varphi,\varepsilon) - K(\varphi,\varepsilon')|}{\zeta \sin(\varphi/2)} , & \varepsilon\varepsilon' > 0 , \\ -\arcsin\dfrac{|\varepsilon + \varepsilon'|}{\sqrt{(\delta\varepsilon)^2 + 4\sin^2\varphi}} , & \varepsilon\varepsilon' < 0 , \end{cases} \tag{13}$$

$$K(\varphi,\varepsilon) = (\cos^2(\varphi/2) - \varepsilon\zeta)^{1/2}\Theta(\cos^2(\varphi/2) - \varepsilon\zeta) ;\ \zeta = 1 + \left(\frac{\delta\varepsilon}{4\sin\varphi/2}\right)^2 ;$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathrm{p}}/\varepsilon_F ,\quad \varepsilon' \equiv \varepsilon_{\mathrm{p'}}/\varepsilon_F ;\quad \delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon ;\quad |\varepsilon|, |\varepsilon'| \ll 1 ;\quad C \equiv 2\tau_0^{-1} p_F^{-2} ;$$

φ — угол между p и p′; $\Theta(x)$ — функция Хевисайда. Для тех углов φ, при которых (13) можно разлагать по ε, ε', имеем

$$\nu_{\mathrm{pp'}} \simeq \frac{C}{\sin\varphi}\begin{cases} 2|\delta\varepsilon| , & \varepsilon\varepsilon' > 0 ;\ \varphi \gg |\delta\varepsilon|\sqrt{|\varepsilon'|} ,\ \pi - \varphi \gg \sqrt{|\varepsilon'|} , \\ -|\varepsilon + \varepsilon'| , & \varepsilon\varepsilon' < 0 ;\ \varphi ,\ \pi - \varphi \gg |\delta\varepsilon| . \end{cases} \tag{14}$$

Ядро $\nu_{pp'}$ в (14) оказалось четным по импульсу, т.е. инвариантным относительно замены $\varphi \to \pi - \varphi$ (по определению, угол φ изменяется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$). Нечетная часть возникает в следующем приближении:

$$\nu^a_{pp'} \simeq - C \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} (\epsilon'^2 - \epsilon^2)\Theta(\epsilon\epsilon') \operatorname{sgn}\epsilon' \ ; \quad (15)$$

$$\varphi,\ \pi - \varphi >> \sqrt{|\epsilon'|} \ .$$

Быстрое уменьшение нечетной части ядра $\nu^a_{pp'} \sim \varphi^{-3}$ согласуется с общим утверждением работ [3,4] о медленности нечетной угловой релаксации. Отметим, однако, что четность ядра в приближении (14) является следствием сделанного предположения о постоянстве W. Выражение, фактически аналогичное (14), полученное ранее в работе [12], не обладает определенной четностью. В общем случае при произвольной зависимости W от своих переменных медленность нечетной релаксации следует из (12). Действительно, если в качестве ψ взять медленно изменяющуюся нечетную функцию угла, не зависящую от энергии, то функционал $F\{\psi, f\} \sim \epsilon^3$; дополнительная степень малости по сравнению с частотой столкновений $\tau_{en}^{-1} \sim \epsilon^2$ возникает при разложении скобки с четырьмя ψ по малой передаче импульса $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ либо по малому суммарному импульсу сталкивающейся пары $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1$, поскольку $|\mathbf{p}+\mathbf{p}_1| \cdot |\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1|/p_F^2 \le \epsilon$. (Отметим, что функционал $F\{\psi, \chi\}$ есть суммарное изменение величины $\psi_{\mathbf{p}}$ в единицу времени за счет столкновений и, таким образом, при указанном выборе ψ характеризует скорость нечетной угловой релаксации, связанной с переносом частиц на большие углы.) Если же предположить, что W является плавной функцией своих переменных, то из (12) можно получить более детальные оценки, связанные с нечетной угловой релаксацией. Выберем функцию f в (12) в виде $f_{\mathbf{p}} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, а нечетную функцию $\psi(\varphi)$ примем равной $1/2$ при $0 < \varphi < \tilde{\varphi}$ и равной нулю при $\tilde{\varphi} < \varphi < \pi/2$, где φ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_0$ и $\sqrt{\epsilon_0} << \tilde{\varphi} < \pi/2$, ϵ_0 — энергия состояния $\mathbf{p}_0$. Тогда скобка с ψ в (12) не равна нулю только в случае, если три из фигурирующих в ней состояний лежат в областях ненулевого значения ψ, а четвертое (например, $\mathbf{p}_3$) — вне ее. Это означает, что вклад в интеграл дают только узкие окрестности угла $\tilde{\varphi}$ (порядка $\epsilon_0/\tilde{\varphi}$ для состояний $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_3$, см. вышеприведенное неравенство для величин $|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1|$ и $|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1|$).

Поэтому из (11), (12) следует

$$m \int \int_{-\tilde{\varphi}}^{\tilde{\varphi}} J\{\delta^a(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\}\, d\epsilon\, d\varphi =$$

$$= m \int \int_{-\tilde{\varphi}}^{\tilde{\varphi}} \nu^a_{pp_0}\, d\epsilon\, d\varphi - \frac{1}{2} \int \nu_{pp_0}\, d^2p \sim \epsilon_0^3 \tilde{\varphi}^{-2} \ ; \quad (16)$$

$$2\delta^a(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0) \ .$$

Дополнительная степень ϵ_0 возникает из-за интегрирования по ϵ_1 в тепловом слое. Дифференцируя (16) по $\tilde{\varphi}$, получаем согласующееся с (15) соотношение

$$\int \nu^a_{pp'}\, d\epsilon \sim (\epsilon')^3 \varphi^{-3} \ ; \quad \varphi \ , \ \pi - \varphi >> \sqrt{|\epsilon'|} \ . \quad (17)$$

2. Эффекты гидродинамического типа в электропроводности двумерных проводников

Обнаруженный в работе [7] температурный минимум электросопротивления $2D$ЭГ-проволок свидетельствует о проявлении гидродинамического механизма электросопротивления. Как показано в работах [13,14], межэлектронные столкновения в двумерных проводниках могут приводить не только к обычному пуазейлевскому течению электронной жидкости по ограниченному $2D$ЭГ-образцу [15], но и к новым эффектам гидродинамического типа. Последние, вероятно, и наблюдались в эксперименте [7]. В данном разделе развита теория неоднородных токовых состояний в $2D$ЭГ, дающая описание указанных гидродинамических эффектов.

Линеаризованное кинетическое уравнение для неравновесной добавки к функции распределения имеет вид

$$v_z \frac{\partial\chi}{\partial z} + I\{\chi\} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \ , \quad I = \left(\frac{\partial n}{\partial\epsilon}\right)^{-1} J \ . \quad (18)$$

Уравнение записано для полосы $-d/2 \le z \le +d/2$, электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль полосы, интеграл столкновений J определяется выражением (1). Выделим в уравнении (18) части разной четности по импульсу:

$$v_z \frac{\partial\chi_s}{\partial z} + I\{\chi_a\} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \ , \quad (19)$$

$$v_z \frac{\partial\chi_a}{\partial z} + I\{\chi_s\} = 0 \ . \quad (20)$$

Если медленной нечетной релаксацией вообще пренебречь, то при условии диффузного рассеяния электронов на границах имеем

$$\chi_s = \frac{z}{v_z} e\mathbf{E}\mathbf{v} \ , \qquad (21)$$

$$\chi_a = \left(\frac{d^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right) \frac{1}{v_z} I\left\{\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{v_z}\right\} - \frac{de\mathbf{E}\mathbf{v}}{2|v_z|} \ .$$

В этом приближении плотность электрического тока

$$j(z) = \frac{4\varepsilon_F m^2}{h^2} \int \chi_a(z, \alpha) \cos\alpha \, d\alpha \qquad (22)$$

расходится при малых углах $\alpha \simeq v_z / v$, поскольку первый член для χ_a в (21) ведет себя приблизительно как α^{-2} ($I\{\alpha^{-1}\} \sim \alpha^{-1}$, более точная оценка приведена ниже). Таким образом, летящие под малым углом α к границе «скользящие» электроны дают основной вклад в проводимость и для определения величины этого вклада необходим учет медленной нечетной релаксации. Подчеркнем, что главная сингулярность в (21) связана с первым слагаемым для χ_a, описывающим эффекты гидродинамического типа: оно является основным при всех α в гидродинамическом пределе $d >> l_s = v_F \tau_s$.

Точно решить систему уравнений (19),(20) не удается. Полуколичественное же описание явлений гидродинамического типа можно получить с помощью следующей самосогласованной процедуры. Введем длины свободного пробега относительно четной и нечетной угловой релаксации, зависящие от характерного углового масштаба φ_0 изменения функции χ:

$$I\{\chi_s\} \simeq \frac{\chi_s v_F}{l_s(\varphi_0)} \ , \quad I\{\chi_a\} \simeq \frac{\chi_a v_F}{l_a(\varphi_0)} \ .$$

В этом приближении легко получить решение уравнений (19),(20), которое, однако, имеет весьма громоздкий вид. С той же точностью можно воспользоваться следующим компактным выражением:

$$\chi_a \simeq \frac{d^2 l_a(\varphi_0) e\mathbf{E}\mathbf{v}}{d^2 + \alpha^2 l_s(\varphi_0) l_a(\varphi_0)} \ , \qquad (23)$$

$$\varphi_0 \simeq d / \sqrt{l_s(\varphi_0) l_a(\varphi_0)} \ .$$

Для транспортной длины свободного пробега $l_{\rm tr}$, определенной соотношением Лифшица

$$\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} j(z) \, dz = \frac{e_N^2}{p_F} l_{\rm tr} E \ ,$$

где N — двумерная плотность носителей, получаем

$$l_{\rm tr} \simeq \frac{d^2}{l_s(\varphi_0)\varphi_0} \simeq d \sqrt{\frac{l_a(\varphi_0)}{l_s(\varphi_0)}} \ . \qquad (24)$$

Если зависимости $l_s(\varphi_0)$ и $l_a(\varphi_0)$ известны, то соотношение (23) представляет собой уравнение для φ_0, позволяющее выразить φ_0 через величины d, l_s, l_a ($l_s \propto T^{-2}$, $l_a \simeq (\varepsilon_F / T)^2 l_s \propto T^{-4}$ соответствуют $\varphi_0 \simeq 1$). Перейдем к установлению зависимостей $l_s(\varphi_0)$, $l_a(\varphi_0)$ с помощью выражений (6), (9). Из (7) следует неравенство $|\varphi\eta| \le \gamma \equiv T/\varepsilon_F$, определяющее те области углов φ и η, которые дают не экспоненциально малый вклад в формулах (6) и (9).

Рассмотрим сначала не слишком анизотропные распределения: $\varphi_0 >> \sqrt{\gamma}$. В этом случае полный интервал изменения угла η может быть разбит на три асимптотические области: область I, $\eta << \gamma/\varphi_0$, в которой $\eta << \varphi_0$, а $\varphi_{\max} >> \varphi_0$; область II, $\gamma/\varphi_0 << \eta << \varphi_0$, в которой $\eta, \varphi << \varphi_0$; область III, $\eta >> \varphi_0$, в которой $\varphi << \varphi_0$. В области I возможно разложение оператора $\hat{D}_\eta^{\pm}$ по малому параметру η/φ_0 : $\hat{D}_\eta^{+}\chi(\alpha) \simeq 2\chi(\alpha)$ и $\hat{D}_\eta^{-}\chi(\alpha) \simeq \eta\chi'(\alpha)$; в области III — по параметру φ/φ_0, а в области II — по обоим этим параметрам. При вычислении $l_s(\varphi_0)$, очевидно, можно пренебречь вкладом областей II, III, который пропорционален малому параметру $(\varphi/\varphi_0)^2$. В области же I можно пренебречь интегральными членами: $(\hat{D}_\varphi^{-})^2\chi(\alpha) \simeq 2\chi(\alpha)$. В результате схематически оценка величины $l_s(\varphi_0)$ дает

$$l_s^{-1}(\varphi_0) \sim \gamma \int_{\gamma}^{\gamma/\varphi_0} d\eta \int_{0}^{\gamma/\eta} d\varphi \sim 2 l_0^{-1} \gamma^2 \ln(\varphi_0^{-1}) \ , \qquad (25)$$

$$\varphi_0 >> \sqrt{\gamma} \ ,$$

где $l_0 = v_F \tau_0$, а τ_0 имеет вид (2). При оценке величины $l_a(\varphi_0)$ по формуле (6) вклады перечисленных областей имеют следующий вид:

$$l_a^{-1}(\varphi_0) \sim \gamma \left\{ \int_0^{\gamma/\varphi_0} d\eta \left(\frac{\eta}{\varphi_0}\right)^2 \int_0^{\gamma/\eta} d\varphi + \int_{\gamma/\varphi_0}^{\varphi_0} d\eta \left(\frac{\eta}{\varphi_0}\right)^2 \int_0^{\gamma/\eta} d\varphi \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 + \int_{\varphi_0}^{\pi} d\eta \int_0^{\gamma/\eta} d\varphi \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 \right\} \sim l_0^{-1} \frac{\gamma^4}{\varphi_0^4} \ln \frac{\varphi_0^2}{\gamma}, \quad \varphi_0 >> \sqrt{\gamma} . \tag{26}$$

Преобладающий по параметру $\ln(\varphi_0^2/\gamma)$ вклад дает область II.

Напомним, что выражение (6) соответствует предположению о независимости функции χ_a от энергии. В Приложении (разд. А) показано, что при относительно больших φ_0 энергетическая зависимость приобретает вид «локального дрейфа» (8) и при оценке $l_a(\varphi_0)$ следует пользоваться выражениями (9). В области II при этом разложение приводит к членам порядка

$$(\varphi\eta/\varphi_0^2)^2[(\varphi/\varphi_0^2) + (\eta/\varphi_0^2)] ,$$

что уменьшает ее вклад по сравнению с (26), зато увеличивается вклад областей I и III, который и становится основным:

$$l_a^{-1}(\varphi_0) \sim l_0^{-1} \frac{\gamma^4}{\varphi_0^4} \ln(\varphi_0^{-1}) , \quad \varphi_0 >> \sqrt{\gamma} . \tag{27}$$

Таким образом, учет энергетической зависимости χ_a приводит к перераспределению вклада в $l_a(\varphi_0)^{-1}$ между областями, не слишком изменяя результат. Как показано в Приложении (разд. А), истинное значение $l_a(\varphi_0)^{-1}$ при $\varphi_0 >> \sqrt{\gamma}$ определяется большей из величин (26), (27).

Для более анизотропных распределений ($\varphi_0 << \sqrt{\gamma}$) разбиение полного интервала изменения η на три асимптотические области происходит следующим образом: I, $\eta << \varphi_0$, где возможно разложение по параметру η/φ_0; III, $\eta >> \gamma/\varphi_0$, где возможно разложение по φ/φ_0, и II, $\varphi_0 << \eta << \gamma/\varphi_0$, где разложение не возможно. В случае четного распределения область III является неэффективной, области I и II дают

$$l_s^{-1}(\varphi_0) \sim l_0^{-1}\gamma^2 \ln(\gamma^{-1}) , \quad \varphi_0 << \sqrt{\gamma} . \tag{28}$$

Для нечетных распределений области I и III неэффективны по сравнению с II, а ее вклад, в соответствии с (6), равен

$$l_a^{-1}(\varphi_0) \sim l_0^{-1}\gamma^2 \ln \frac{\gamma}{(\gamma + \varphi_0)^2} , \quad \varphi_0 << \sqrt{\gamma} . \tag{29}$$

Выражения (25)–(29) уточняют зависимости $l_s(\varphi_0)$, $l_a(\varphi_0)$, полученные в работах [6,14]. Отметим, что проведенное здесь более подробное рассмотрение уєтанавливает медленную зависимость $l_s(\varphi_0)$, которая отсутствовала в [6,14]. Как видно из (25)–(27), отношение длин $l_a(\varphi_0)/l_s(\varphi_0) >> 1$ и быстро уменьшается с уменьшением φ_0 при $\varphi_0 >> \sqrt{\gamma}$. Это обусловливает уменьшение транспортной длины с уменьшением φ_0 (см. (24)) и, следовательно, обратный температурный ход электросопротивления $l_{tr}^{-1} \propto T^{-1}$ при $d^2 << \gamma l_s^2$ (последнее неравенство соответствует $\varphi_0 >> \sqrt{\gamma}$). Хотя, как видно из (28), (29), $l_a(\varphi_0) > l_s(\varphi_0)$ и при $\varphi_0 << \sqrt{\gamma}$, обратный температурный ход, определяемый (24), оказывается более слабым, чем прямой, определяемый обычным фуксовским слагаемым $d\ln(l_s/d)$ (не учтенным в (24)). Таким образом, при $d^2 << \gamma l_s^2$ имеет место фуксовская ситуация в электропроводности со слабым ростом сопротивления с температурой.

Проведенное выше в рамках приближения двух времен релаксации рассмотрение ограничено сверху по толщине полосы d неравенством $d^2 << l_s l_a$. Именно в этом пределе $\varphi_0 << 1$ и поэтому можно не учитывать сохранение суммарного импульса электронов при столкновениях: выход неравновесного электрона из области скользящих шириной φ_0 за время $v_F^{-1} l_a(\varphi_0)$ приводит к быстрой релаксации на границе, т.е. эквивалентен его исчезновению. В обратном пределе $d^2 >> l_s l_a$ указанное приближение неприменимо и, как можно показать, реализуется обычная гидродинамическая ситуация.

До сих пор все рассмотрение проводилось в линейном приближении. Между тем, обратный температурный ход электросопротивления обнаружен в работе [7] в нелинейном режиме, где нелинейность является «тривиальной», т.е. сводится просто к необходимости учета зависимости температуры от тока, если температура превышает добавку к химическому потенциалу $\chi(\alpha)$. Если электронная система теряет свою энергию за счет излучения фононов (длина пробега относительно

этих столкновений l_{ep}), причем выполнено условие $l_s \ll l_{ep}$, обеспечивающее близость электронной системы к равновесию по энергии, то, как нетрудно оценить, условие линейности имеет вид $l_{ep}\varphi_0^2 \gg l_{tr}$. Это условие не выполняется при $l_a(\varphi_0) \gg l_{ep}$, когда преобладает нечетная релаксация, связанная с электрон-фононными столкновениями. В обратном предельном случае $l_{ep}\varphi_0^2 \ll l_{tr}$ нельзя пользоваться линеаризованным интегралом столкновений (1). (Для простоты принято, что при электрон-фононных столкновениях существенно изменяются и энергия, и импульс электрона.)

Существенно нелинейная межэлектронная релаксация в двумерных системах требует специального рассмотрения, здесь же мы укажем только на следующее важное обстоятельство. Неравновесное распределение, соответствующее нечетному по импульсу сдвигу химического потенциала (т.е. распределение вида $n[\varepsilon_{\mathbf{p}} - \chi(\alpha)]$ с $\chi(-\alpha) = -\chi(\alpha)$, $\chi \ll \varepsilon_F$) при $T \to 0$ крайне медленно релаксирует к равновесному: по крайней мере с точностью до величин порядка $(\chi/\varepsilon_F)^3$ включительно релаксация отсутствует. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу законов сохранения два начальных состояния $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$ и два конечных $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ лежат на одной окружности в $\mathbf{p}$-пространстве, причем точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$, как и точки $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, диаметрально противоположны друг другу относительно центра этой окружности. Рассмотрим сначала окружность радиусом p_F, смещенную относительно поверхности Ферми (ПФ) на малое расстояние δp. Для того чтобы на этой окружности могли оказаться начальные и конечные состояния столкновения, необходимо наличие на ней пары диаметрально противоположных точек, соответствующих занятым состояниям, и пары противоположных точек, соответствующих свободным состояниям. Но в первом порядке по χ/ε_F смещение точек искаженной ПФ по отношению к рассматриваемой окружности так же, как и их смещение по отношению к невозмущенной ПФ, является нечетным. Значит свободным участкам окружности противостоят занятые, поэтому столкновения не возможны. Увеличение радиуса окружности не изменяет положение: появляются возможности для конечных состояний, но не для начальных (и наоборот, при уменьшении радиуса). Очевидно, ничего не дает и значительное увеличение смещения δp. Во втором приближении по χ/ε_F указанное положение нарушается. Поэтому роль эффективной температуры в выражении (2) для τ_{en} играет величина χ^2/ε_F. Предварительное рассмотрение показывает, что время релаксации для нечетным образом деформированной ПФ может оказаться еще больше, чем $\tau_0(\varepsilon_F/\chi)^4$. В случае же четным образом деформированной ПФ роль эффективной температуры играет величина χ и время релаксации порядка $\tau_0(\varepsilon_F/\chi)^2$.

3. Эволюция сильно анизотропных высокоэнергетических распределений

Хотя в двумерных электронных пучках эффекты пространственной дисперсии играют существенную роль, в настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением дотемпературной релаксации в импульсном пространстве, описываемой уравнением

$$\partial f_{\mathbf{p}}/\partial t = J\{f_{\mathbf{p}}\}\ , \qquad (30)$$

где интеграл столкновений $J\{f_{\mathbf{p}}\}$ имеет вид (11). В заключении будет указано, как результаты данного рассмотрения могут быть использованы для анализа экспериментов с пучками, т.е. с учетом пространственной дисперсии.

Пусть в начальный момент времени распределение неравновесных электронов $f_0 = Ap_F^{-2}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, причем $\varepsilon_0 \gg T$. Коэффициент перед δ-функцией, очевидно, убывает со временем как $\exp(-t/\tau_{en})$ с $\tau_{en}(\varepsilon_{\mathbf{p}})$ из (2) ($T = 0$).

Для времен $t \ll \tau_{en}(\varepsilon_0)$ распределение претерпевших столкновение электронов может быть найдено в первом приближении по интегралу столкновений:

$$f_{\mathbf{p}} \simeq Ap_F^{-2}\nu_{\mathbf{pp}_0}\, t\ . \qquad (31)$$

Далее нас будет интересовать эволюция распределения на временах, превышающих $\tau_{en}(\varepsilon_0)$. Очевидно, что с каждым столкновением энергия неравновесных электронов уменьшается (примерно в три раза), так как неравновесный электрон делится энергией с равновесными. Таким образом, неравновесные электроны «опускаются» на ПФ (дырки поднимаются к ней), причем каждое последующее столкновение происходит значительно медленнее предыдущего ($\tau_{en} \sim \varepsilon^{-2}$). В пределе $\varepsilon \to 0$ процесс останавливается: $\nu_{\mathbf{pp}'} = 0$ при $\varepsilon_{\mathbf{p}'} = 0$, поэтому произвольное по углу распределение электронов на ПФ является решением уравнения $J\{f\} = 0$, описывающего конечную для дотем-

пературного этапа стационарную ситуацию. Поскольку полная энергия электронов при столкновениях сохраняется, следует различать два типа решений стационарного уравнения:

$$f_\infty = \lambda(\alpha)\delta(\varepsilon) + \kappa(\alpha)\delta'(\varepsilon) \ . \qquad (32)$$

Второе слагаемое обеспечивает ненулевую энергию конечного распределения.

Поставим следующий вопрос: к какому распределению частиц на ПФ приводит дотемпературный этап релаксации? Иными словами, каков предел при $t \to \infty$ решения уравнения (30) с произвольным начальным условием $f(t=0) = f_0$? Чтобы найти ответ на этот вопрос, умножим обе части (30) на функцию $\tilde{f}$, являющуюся решением уравнений

$$\tilde{J}\{\tilde{f}\} = 0 \ , \qquad \tilde{J}\{\tilde{f}\} = -\int \nu_{\mathrm{p'p}}(\tilde{f}_\mathrm{p} - \tilde{f}_\mathrm{p'})\, d^2p' \qquad (33)$$

($\tilde{J}$ — оператор, транспонированный оператору J), и проинтегрируем по p и по времени от $t = 0$ до ∞, когда $f = f_\infty$. В результате получим следующую связь между конечным и исходным распределениями:

$$m\int_0^{2\pi}\left[\lambda(\alpha)\tilde{f}(\alpha,\varepsilon) + \kappa(\alpha)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\tilde{f}(\alpha,\varepsilon)\right]\Big|_{\varepsilon=0} d\alpha = \int f_0\tilde{f}\, d^2p \ . \qquad (34)$$

Решения уравнения (33) — это сохраняющиеся при столкновениях величины. Функции $\tilde{f} = \mathrm{const}$, p, ε заведомо являются такими решениями в силу сохранения числа частиц, импульса, энергии. Имеются ли еще решения уравнения (33)? Вследствие изотропии задачи такие решения можно искать в виде $\tilde{f}_n(\varepsilon)\exp(i\alpha n)$. Предположив, что имеются решения с $\tilde{f}_n(0) \neq 0$, опуская произвольный коэффициент, запишем $\tilde{f}_n(\varepsilon) = 1 - g_n(\varepsilon)$, $g_n(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для g_n из (33) имеем следующее уравнение:

$$g_n(\varepsilon) - \tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon)\int \nu_{\mathrm{p'p}} g_n(\varepsilon')\, e^{i\alpha' n}\, d^2p' = \tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon)\tilde{J}\{e^{i\alpha n}\} \ . \qquad (35)$$

Для анализа этого уравнения важно оценить его правую часть.

При нечетных n имеем по порядку величины

$$\tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon)\,\tilde{J}\{e^{i\alpha n}\} \simeq n^2\varepsilon\frac{\ln(n^2|\varepsilon|)}{\ln|\varepsilon|} \ , \quad |\varepsilon|n^2 \ll 1 \ . \qquad (36)$$

Малость этого выражения при $\varepsilon \to 0$ — прямое следствие медленности нечетной угловой релаксации, обсуждавшейся в разд. 1. Оценку (36) удобно получить из (12), полагая $f_\mathrm{p} = \delta(\mathrm{p} - \mathrm{p}_0)$, $\psi_\mathrm{p} = e^{i\alpha n}$ и разбивая область интегрирования на три области аналогично схеме вычислений при выводе выражения (26). Быстрое уменьшение правой части (35) с уменьшением ϵ позволяет решать это уравнение итерациями по второму члену в его левой части. Действительно, $\tilde{J}\{\tilde{g}_n\} \simeq \tau_{\mathrm{en}}^{-1} g_n$, поскольку в данном случае речь идет об энергетической релаксации и нет оснований для компенсации внеинтегрального и интегрального членов в левой части (35). Более того, как показывает оценка, отношение этих членов численно мало:

$$\tau_{\mathrm{en}} g_n^{-1}\tilde{J}\{g_n e^{i\alpha n}\} - 1 \simeq \frac{1}{6}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n^2}{\ln(|\varepsilon|^{-1})}\right] \leq \frac{1}{6} \ .$$

Таким образом, при нечетных n уравнение (35) разрешимо и, следовательно, дополнительные нечетные решения уравнения (33) с $\tilde{f}_n(0) \neq 0$ существуют. Заметим, что по соображениям, аналогичным приведенным в предыдущем разделе, при небольших n функции g_n неплохо соответствуют «локальному дрейфу» (8):

$$g_n(\varepsilon) \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon n^2 e^{i\alpha n} \ , \quad |\varepsilon| \ll 1 \ , \qquad (37)$$

а при $n = \pm 1$ это выражение с хорошей точностью соответствует истинному дрейфу, т.е. точному решению уравнения (33).

При четных n

$$\tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon)\tilde{J}\{e^{i\alpha n}\} \simeq \frac{\ln(|n|+1)}{\ln(|\varepsilon|^{-1})} \ , \quad |\varepsilon|n^2 \ll 1 \ . \qquad (38)$$

Покажем, что вследствие слабой энергетической зависимости правой части уравнение (35) не разрешимо при четных n. Предположим сначала, что g стремится к нулю по тому же закону, что и правая часть (35) (т.е. $g \propto \left|\ln|\varepsilon|\right|^{-1}$). Тогда левая часть оказывается существенно меньше правой: в главном приближении по $\left|\ln|\varepsilon|\right|^{-1}$ оператор $\tilde{J}$ действует на логарифмическую функцию энергии как на константу ($\tilde{J}\{g e^{i\alpha n}\} \simeq g\tilde{J}\{e^{i\alpha n}\}$). Если же предположить, что g быстрее убывает с энергией, то тогда в левой части (35) преобладает первый член и мы опять приходим к противоречию.

Нетрудно убедиться, что дополнительные решения уравнения (33) с $\tilde{f}_n(0) = 0$ отсутствуют. Это очевидно для нечетных n, поскольку, как было по-

казано выше, в этом случае для оператора $\tilde{J}$, действующего на существенно зависящую от энергии функцию, фактически применено τ-приближение. При четных n, записав $\tilde{f}_n$ в виде $\tilde{f}_n = \varepsilon[1 - q_n(\varepsilon)]$, приходим в уравнении для функции q_n к столь же слабо зависящей от ε правой части, как и в уравнении (35) для g_n.

Чтобы сделать соотношение (34) максимально информативным, построим из дополнительных нечетных решений уравнения (33) следующую зависящую от параметра α_0 линейную их комбинацию:

$$G_{\mathrm{p}}(\alpha_0) \equiv G(\varepsilon, \alpha - \alpha_0) \ , \qquad (39)$$

$$G(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \ldots}^{\infty} [1 - g_n(\varepsilon)] \mathrm{e}^{i\alpha n} \ .$$

Эта функция при $\varepsilon = 0$ представляет собой нечетную часть $\delta(\alpha)$. Сохраняющаяся величина G соответствует локальному по углу α сохранению числа частиц. Физически очевидно, что отсутствие аналогичной четной сохраняющейся величины и величины $\varepsilon[1 - q_n(\varepsilon)]\mathrm{e}^{i\alpha n}$ типа локальной плотности энергии означает полную изотропизацию четной компоненты распределения числа частиц и их энергий на дотемпературном этапе релаксации, иными словами, независимость величин λ_s и κ в (34) от α. Подставляя в (34) $\tilde{f} = G, 1, \varepsilon$, получаем

$$\lambda_a(\alpha) = m^{-1} \int f_{0\mathrm{p}'} G_{\mathrm{p}'}(\alpha)\, d^2p' \ , \qquad (40)$$

$$\lambda_s = (2\pi m)^{-1} \int f_{0\mathrm{p}}\, d^2p \ , \qquad (41)$$

$$\kappa = (2\pi m)^{-1} \int \varepsilon f_{0\mathrm{p}}\, d^2p \ . \qquad (42)$$

Эти формулы полностью решают вопрос о конечном состоянии дотемпературной релаксации. Более строгое математическое обоснование этих формул приведено в Приложении (разд. Б). Функция $G(\varepsilon_0, \alpha)$, как видно из (40), представляет собой конечное угловое распределение вдоль ПФ неравновесности, первоначально имевшей вид* $m\delta^a(\mathrm{p} - \mathrm{p}_0)$, $\alpha_{\mathrm{p}_0} = 0$. Подставляя в (39) решение уравнения (35) в нулевом порядке итерации, получаем явный вид функции G:

$$G(\varepsilon, \alpha) \simeq \tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon) \int \nu^a_{\mathrm{p}'\mathrm{p}}\, \delta(\alpha')\, d^2p' \simeq$$

$$\simeq -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{|\ln|\varepsilon||} \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha} \ , \qquad (43)$$

$$|\pi - \alpha|, \alpha >> |\varepsilon|^{1/2} \ .$$

Очевидно, что $|G| \simeq |\varepsilon|^{-1/2}$ в области α, $|\pi - \alpha| \le |\varepsilon|^{1/2}$. Но G не может быть монотонной функцией угла при $\varepsilon > 0$. Данное утверждение следует из отрицательности G в (43) при $\varepsilon > 0$ и «условия нормировки»

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(\varepsilon, \alpha)\, d\alpha \cong \frac{1}{2} \ , \qquad (44)$$

которое означает сохранение числа частиц. (Доказательство равенства (44) приведено в Приложении, разд. Б).

Нечетное распределение $\lambda_a(\alpha)$ устанавливается уже за несколько первых столкновений, т.е. примерно за время $\tau_{\mathrm{en}}(\varepsilon_0)$. (Нулевое приближение метода итераций для уравнения (35) означает учет первого столкновения, следующие итерации учитывают небольшой вклад в величину g_n последующих столкновений.) Изотропизация четной компоненты (плотности числа частиц и плотности энергии), как это видно из оценки (38), требует примерно $\ln(\varepsilon_F/\varepsilon_0)$ столкновений.

Следует, однако, принять во внимание, что дотемпературный этап релаксации, рассмотренный выше в предположении $T \to 0$, оканчивается, когда средняя энергия возбуждений сравнивается с электронной температурой T, т.е. по прошествии времени термолизации $\tau_{\mathrm{en}}(T)$ (см. (2)), после примерно $\ln(\varepsilon_0/T)$ столкновений. Таким образом, изотропизация четного распределения не завершается полностью на дотемпературном этапе, если $\varepsilon_0^2 \le T\varepsilon_F$.

Электронная температура T, устанавливающаяся в результате термолизации, определяется как исходной температурой равновесных электронов T_0 (температура термостата), так и энергией пучка:

$$T = \sqrt{T_0^2 + 6\pi^{-2}\kappa} \ . \qquad (45)$$

* Отрицательные значения начальной неравновесности при $\varepsilon > 0$ и положительные при $\varepsilon < 0$, естественно, лишены физического смысла в пределе $T \to 0$. Однако эволюцию исходных электронной ($\varepsilon > 0$) или дырочной ($\varepsilon < 0$) неравновесностей удобно рассматривать, разделив их на части разной четности.

Это соотношение следует из равенства энергии электронной системы на дотемпературном и температурном этапах релаксации.

Обсудим применимость в данном случае линейного приближения для интеграла столкновений. Нетрудно понять, что наиболее жесткое ограничение сводится к требованию, чтобы любая область p-пространства радиусом порядка ε/v_F содержала число возбуждений много меньшее по сравнению с максимально возможным $h^{-2}(\varepsilon/v_F)^2$, тогда линейное приближение применимо и для малоугловых столкновений с передачей импульса $\sim \varepsilon/v_F$. Это требование выполнено при

$$\kappa << \varepsilon_0^3 \varepsilon_F^{-1} . \qquad (46)$$

В обратном пределе дотемпературный этап переходит в упомянутый в конце предыдущего раздела нелинейный режим релаксации нечетно деформированной ПФ (если $T_0 \le T$). Заметим, однако, что и при соблюдении (46) линейное приближение неизбежно нарушается при переходе от дотемпературного этапа к температурному (если $T_0 \le T$), но вновь восстанавливается на временах $t >> \tau_{en}(T)$.

Заключение

Качественные представления о процессах релаксации сильно анизотропных распределений изложены в общих чертах в работах [4,5,14] и заключаются в следующем. После нескольких межэлектронных столкновений, т.е. по прошествии времени $t > \tau_{en}(\varepsilon_0)$ четная по импульсу компонента электронного распределения изотропизуется, а нечетная, приобретя угловой размер порядка $\sqrt{(\varepsilon_0 + T)/\varepsilon_F}$, в дальнейшем медленно уширяется со временем (ε_0 — энергия возбуждения электронов в пучке). Эта долгоживущая нечетная в p-пространстве неравновесность представляет собой в координатном пространстве пучки электронов и дырок, движущиеся в противоположных направлениях. Поскольку за время порядка τ_{en} электрон превращается в дырку (и наоборот), эволюция этого электрон-дырочного образования за времена много большие τ_{en} осуществляется путем одномерной диффузии [5,14]. (Любопытно, что в результате токовое состояние расплывается симметрично как в направлении инжекции первичного пучка, так и в противоположном направлении.) Вторичные электронный и дырочный пучки при выполнении определенных условий могут быть непосредственно обнаружены в экспериментах с достаточно узкими первичными электронными пучками, инжектируемыми в 2DЭГ. В электропроводности 2DЭГ-проволок (разд. 2), ширина которых $d << \sqrt{l_a l_s}$, $d >> l_s\sqrt{T/\varepsilon_F}$, указанные электрон-дырочные образования вносят в ток основной вклад, причем транспортная длина свободного пробега носителя, движущегося под углом $\alpha << 1$ к границе, может быть записана как путь одномерной диффузии носителя к границе:

$$[l_{tr}]^{-1} = \frac{l_s(\alpha)\alpha^2}{d^2} + \sum_i l_{ai}^{-1}(\alpha) .$$

Второе слагаемое учитывает все процессы нечетной релаксации (обусловленные межэлектронными столкновениями, примесями, фононами), которые выводят носитель из области углов порядка α.

Проведенное в настоящей работе последовательное рассмотрение проблемы позволило обосновать качественные выводы работ [13,14]. Кроме того, уточнены зависимости длин свободного пробега $l_a(\varphi_0)$ и $l_s(\varphi_0)$ от параметров задачи (см. формулы (25)–(29)), в частности установлена медленная зависимость скорости четной релаксации от масштаба анизотропии распределения, что позволило определить ограничение снизу по ширине слоя d на область обратного температурного хода электросопротивления: $d \ge l_s\sqrt{T/\varepsilon_F}$. Хотя в области $T/\varepsilon_F \le d/l_s << \sqrt{T/\varepsilon_F}$ длина $l_a(\varphi_0)$ уже заметно превышает $l_s(\varphi_0)$, преобладает медленный рост электросопротивления с температурой, характерный для фуксовской ситуации в электропроводности пластин.

Проведенное в разд. 3 рассмотрение эволюции высокоэнергетических сильно анизотропных распределений, не учитывающее эффектов пространственной дисперсии, тем не менее может быть использовано при анализе экспериментов с узкими электронными пучками в 2DЭГ. Заметим, что и при наличии существенной зависимости функции распределения от координаты r распределение частиц по импульсу $f_p = \int f_p(\mathrm{r})\, d^2r$ в линейном приближении удовлетворяет уравнению (30). Иными словами, все результаты по эволюции начального распределения f_{0p} справедливы для пучка, импульсно инжектированного в начальный момент времени (пока, конечно, не произойдут столкновения электронов пучка с границами образца). Включение магнитного поля приводит лишь к вращению распределения в импульсном пространстве: $f(\alpha, \varepsilon, t) \to f(\alpha - \Omega t, \varepsilon, t)$, Ω — циклотронная частота (хотя уже очень слабое магнитное поле

приводит к сильному уширению пучка в координатном пространстве [4,14]). Как уже упоминалось в конце предыдущего раздела, процесс термолизации нелинеен при $T_0 \le T$, поэтому в данном случае распределение по импульсу при $t \ge \tau_{en}(T)$ не может быть найдено без учета эффектов пространственной дисперсии. Однако можно утверждать, что эти эффекты не помешают установлению локальной в координатном пространстве температуры, поскольку при таких временах длина термолизации $l_{en}(T) = v_F \tau_{en}(T)$ становится наименьшей из всех характерных длин. Условие $T - T_0 \ll T_0$, позволяющее избежать решения задачи о зависимости температуры от координаты, как следует из (45), сводится к неравенству $\sqrt{\kappa_T} \ll T_0$. Здесь κ_T — значение величины κ (пропорциональной плотности энергии пучка) в момент времени $t = \tau_{en}(T)$ (замене $\kappa \to \kappa_T$ подлежит и условие (46)). Реализация указанных условий линейности облегчается тем обстоятельством, что начальная плотность энергии инжектированного пучка существенно уменьшается по мере его распространения.

Связь между распределениями частиц по импульсу $f_p \equiv f(\alpha, \varepsilon)$ и в координатном пространстве в задаче о пучках находится из простых физических соображений. Смещение частицы в направлении перпендикулярном движению первичного пучка равно

$$r_\perp \simeq v_F \int_0^t \alpha(t')\, dt' \simeq \alpha(t)\, t\, v_F ,$$

$\alpha(t) \ll 1$ — угол отклонения частицы от первичного направления пучка. Поэтому распределение частиц по $r_\perp$ в качественном отношении повторяет функцию $\int f(\alpha, \varepsilon, t)\, d\varepsilon$, где $\alpha \simeq r_\perp / v_F t$, а под t следует понимать время движения частицы от эмиттера к детектору. Если расстояние между эмиттером и детектором $L \le l_{en}(\varepsilon_0)$, то двукратное столкновение маловероятно и распределение по импульсу определяется выражением (31), $t \simeq L/v_F$ (как для электронов, мало отклонившихся от первичного пучка, так и для движущихся в обратную сторону частиц). Если $L > l_{en}(\varepsilon_0)$ (но $L < l_{en}(T)$), то до попадания частицы в детектор успевают произойти несколько столкновений и распределение по углам описывается функцией $G(\varepsilon_0, \alpha)$ (см. разд. 3). Эта функция положительна и имеет пик в области углов $\alpha \le \sqrt{\varepsilon_0}$, далее меняет знак и при $\alpha \gg \sqrt{\varepsilon_0}$ функция $G \propto -\alpha^{-3}$. Отрицательные значения G отвечают дыркам, т.е. регистрации положительного заряда. Оценка $t \simeq L/v_F$ сохраняется и в этом случае, так как вследствие уменьшения энергии при каждом столкновении последующий свободный пробег приблизительно в 6 раз длиннее предыдущего, т.е. суммарный путь примерно равен длине последнего пробега. Если же $L \gg l_{en}(T)$, то основное уширение электронного и дырочного пучков происходит уже на температурном этапе релаксации. Угловая ширина пучков при этом, как следует из результатов в разд. 2, $\varphi_0 \simeq \simeq \sqrt{T/\varepsilon_F}[t/\tau_s]^{1/4}$, а величина t есть время диффузионного прохождения электрон-дырочным образованием пути L ($t \simeq L^2/v_F l_s$). Следует, однако, учитывать, что после первого столкновения дырка с вероятностью примерно 1/2 возвращается в область вблизи эмиттера, для таких дырок $t \simeq l_{en}/v_F$ при любых $L \gg l_{en}(\varepsilon_0)$.

Чтобы наблюдать указанные эффекты, связанные с пучками, необходимо использовать эмиттер, создающий достаточно узкий первичный пучок и детектор, пропускающий частицы в гораздо более широком интервале углов, чем эмиттер. Действительно, к детектору, расположенному на расстоянии $r_\perp$ от первичного пучка, подлетают электроны со средним углом отклонения от первичного пучка $\sim r_\perp / v_F$, большинство из них не будет зарегистрировано детектором с той же угловой шириной, что и у эмиттера.

Выше указано также на существование нового нелинейного режима межэлектронной релаксации в $2D$ вырожденных системах, при котором нечетные по углу деформации поверхности Ферми релаксируют существенно медленнее, чем четные. Определены области существования нелинейного режима в задачах об электропроводности $2D$ЭГ-проволок и об эволюции пучков, инжектированных в двумерный газ. Заметим, что в условиях нелинейного режима учет пространственной дисперсии является самостоятельной задачей, которая требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международным научным фондом и правительством Украины (грант U2D200).

Приложение

А. Приближение частых столкновений

В условиях, когда характерные длины и интервалы времени для системы значительно превыша-

ют величины $l_{\varepsilon n}(T) \simeq l_s$ и τ_s, электронная система близка к равновесию по энергии. В задаче о статической электропроводности $2D$ЭГ полосы эти условия сводятся к неравенству $x = l_s(\alpha)\alpha/d \ll 1$. Наличие новых, связанных с двумерностью, эффектов обусловлено неравенством

$$y = l_s(\alpha)/l_a(\alpha) \ll 1 \ .$$

Последовательное разложение кинетического уравнения (19) по указанным малым параметрам приводит к следующей цепочке уравнений:

$$I_0\{\chi^{00}\} = 0 \ , \qquad (\text{П.1})$$

$$v_z \frac{\partial \chi^{00}}{\partial z} + I_0\{\chi^{10}\} = 0 \ , \qquad (\text{П.2})$$

$$I_1\{\chi^{00}\} + I_0\{\chi^{01}\} = 0 \ , \qquad (\text{П.3})$$

$$v_z \frac{\partial \chi^{10}}{\partial z} + I_0\{\chi^{02} + \chi^{20}\} + I_1\{\chi^{01}\} + I_2\{\chi^{00}\} = e\mathbf{E}v \ . \qquad (\text{П.4})$$

$$I = I_0 + I_1 + I_2 \ ,$$

$$\chi = \chi^{00} + \chi^{01} + \chi^{10} + \chi^{02} + \chi^{20} + \ldots$$

Оператор I_0, описывающий энергетическую релаксацию, отличается от I заменой в (5) обоих операторов $\hat{D}_{\mathbf{q}}^{-}$ на оператор $\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}$:

$$\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}\chi(\varepsilon_{\mathbf{p}}, \alpha_{\mathbf{p}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\chi(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) - \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) + \right.$$

$$\left. + \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})\right] \ .$$

Здесь ε и α — энергетическая и угловая переменные, определяющие положение точки $\mathbf{p}$. Оператор I_1 равен сумме двух операторов, каждый из которых получается заменой одного из операторов $\hat{D}_{\mathbf{q}}^{-}$ в (5) на $\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}$, а другого на $\hat{D}_{\mathbf{q}\alpha}$:

$$\hat{D}_{\mathbf{q}\alpha}\chi(\varepsilon_{\mathbf{p}}, \alpha_{\mathbf{p}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\chi(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) - \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) + \right.$$

$$\left. + \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) - \chi(\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}, \alpha_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})\right] \ .$$

В I_2 оба оператора $\hat{D}_{\mathbf{q}}^{-}$ заменены на $\hat{D}_{\mathbf{q}\alpha}$. Первый верхний индекс у χ показывает порядок разложения по параметру x, второй — по параметру $\sqrt{y}$. Уравнение (П.4) есть сумма уравнений (02) и (20)-го порядков.

Покажем вначале, что единственным решением уравнения (П.1) (помимо решения $\chi^{00} \sim \varepsilon$, соответствующего малому изменению температуры) является не зависящая от ε произвольная нечетная функция α: $\chi^{00} = \bar{\chi}(\alpha)$. Уравнение (П.1) эквивалентно условию детального равновесия

$$\hat{D}_{\mathbf{k}}^{\pm}\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}\chi_{s,a}^{00} = 0 \ .$$

Это ясно, если заметить, что из (П.1) следует $F_\varepsilon\{\chi^{00}, \chi^{00}\} = 0$, где функционал F_ε получается из F заменой в (4) операторов $\hat{D}_{\mathbf{q}}^{-}$ на $\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}$, и учесть существенную положительность ядра Ф. Функция $\bar{\chi}(\alpha)$, естественно, является решением этого уравнения, поскольку $\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}\bar{\chi} = 0$. Для доказательства единственности достаточно рассмотреть бесконечно малые $\mathbf{q}$:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\chi_{s,a}^{00}(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) = \pm\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\chi_{s,a}^{00}(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) \ ,$$

что и дает $\chi_a^{00} = \bar{\chi}(\alpha)$, $\chi_s^{00} \sim \varepsilon$.

Полевой член $e\mathbf{E}v$ не помещен в уравнение (П.1): из тождества $\int \partial n/\partial\varepsilon \, I_0\{\chi_a\} \, d\varepsilon = 0$ видно, что иначе оно было бы неразрешимо. Его нельзя также отнести к уравнениям (П.2) (поскольку его левая часть четна по $\mathbf{p}$) и (П.3) (вследствие тождества $\int \partial n/\partial\varepsilon \, I_1\{\bar{\chi}\} \, d\varepsilon = 0$). Таким образом, уравнения (П.2), (П.3) в принципе позволяют выразить добавки χ^{10} и χ^{01} через $\bar{\chi}$, а функция $\bar{\chi}(\alpha)$ может быть определена из условия разрешимости уравнения (П.4)

$$\int d\varepsilon \left[v_z \frac{\partial \chi^{10}}{\partial z} + I_1\{\chi^{01}\} + I_2\{\bar{\chi}\} - e\mathbf{E}v\right]\frac{\partial n}{\partial\varepsilon} = 0 \ . \qquad (\text{П.5})$$

Данная схема рассмотрения дополняет подход, развитый ранее в разд. 1.1 и 2: уравнение (П.3) определяет зависящую от энергии добавку χ^{01}, существенную при оценке скорости нечетной угловой релаксации.

При анализе уравнения (П.3) удобно выделить три области интегрирования по углу η, как это было сделано при выводе выражений (25), (26). При $\varphi_0 \gg \sqrt{T/\varepsilon_F}$ в величину $I_1\{\chi^{00}\}$ преобладающий по величине $\ln(\varphi_0^2\varepsilon_F/T)$ вклад дает область II. При оценке же $I_0\{\chi^{01}\}$ содержащий $\ln(\varphi_0^2\varepsilon_F/T)$ вклад области II конкурирует с вкладом областей I и III, содержащим $\ln\varphi_0^{-1}$. Если в (П.3) оставить только вклад области II, то, учитывая возможность разложения в II функции $\bar{\chi}$ по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$, получаем из (П.3)

$$\int \hat{D}_{\mathbf{k}}^{-}\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}\Phi_{\mathbf{pkq}}\left(p_F^2\varphi\eta\frac{d^2\overline{\chi}}{d\alpha^2}+2\hat{D}_{\mathbf{q}\varepsilon}\chi^{01}\right)d^2k\,d^2q=0,$$

интегрирование по $\mathbf{k}$ проводится в пределах области II. Это уравнение может быть решено приравниванием нулю круглой скобки в подынтегральном выражении. Тогда χ^{01} имеет вид «локального дрейфа» (8). Таким образом, для не слишком анизотропных распределений ($\ln(\varphi_0^2\varepsilon_F/T) > 2\ln(\varphi_0^{-1})$) «локальный дрейф» неплохо описывает энергетическую зависимость неравновесной добавки; для более анизотропных зависимость от энергии слабее, чем (8).

Как видно из уравнений (П.1)–(П.3) существенная зависимость величины $I\{\chi^{00}+\chi^{10}+\chi^{01}\}$ от энергии может возникать только в членах второго порядка по малым параметрам x, y. Это доказывает соотношение (10): поправкой ψ^{01} с требуемой точностью можно пренебречь.

Б. Предел $t \to \infty$ для дотемпературной стадии релаксации

Чтобы регуляризовать предельный переход $t \to \infty$, введем в правую часть уравнения (30) слагаемое $-\nu f$, описывающее при $\nu \to 0$ бесконечно медленное затухание состояний. Пусть в момент времени $t = 0$ неравновесная добавка имеет вид $f(0) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$. Проинтегрировав кинетическое уравнение по t от 0 до ∞, получим

$$(-\hat{J}_{\mathbf{p}}+\nu)\,\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}) = \nu\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\ , \qquad (\text{П.6})$$

$$\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}) = \nu\int_0^\infty f_{\mathbf{p}}(t)\,dt\ .$$

Здесь величина $\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p})$ — среднее по времени затухания ν^{-1} значение неравновесной добавки; эта величина, очевидно, при $\nu \to 0$ стремится к искомому конечному распределению, к которому эволюционирует со временем начальная неравновесность. Рассмотрим транспонированное уравнение

$$(-\tilde{\hat{J}}_{\mathbf{p}}+\nu)\,\Gamma_\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}) = \nu\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\ . \qquad (\text{П.7})$$

Умножая обе части (П.6) на $\Gamma_\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p})$ и интегрируя по $\mathbf{p}$, согласно (П.7), получаем

$$\Gamma_\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_0) = \Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1)\ . \qquad (\text{П.8})$$

Являясь конечным состоянием дотемпературной релаксации, функция $\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p})$ при $\nu \to 0$, очевидно, не мала только вблизи поверхности Ферми при $\varepsilon_{\mathbf{p}} \to 0$ (Из (П.7), (П.8) нетрудно увидеть, что Γ_ν не мала в области импульсов, где $\nu_{\mathrm{en}}(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \simeq \nu$.) Удобно ввести угловую плотность частиц на ПФ

$$G_\nu(\mathbf{p}_0,\alpha) = m\int\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p})\,d\varepsilon$$

и соответственно угловую плотность энергии

$$\mathcal{E}_\nu(\mathbf{p}_0,\alpha) = m\int\varepsilon\,\Gamma_\nu(\mathbf{p}_0,\mathbf{p})\,d\varepsilon\ .$$

Как следует из (П.7), (П.8), функция $G_\nu(\mathbf{p},\alpha_0)$ удовлетворяет уравнению

$$(-\tilde{\hat{J}}_{\mathbf{p}}+\nu)\,G_\nu(\mathbf{p},\alpha_0) = \nu\,\delta(\alpha-\alpha_0)\ .$$

Если записать решение этого уравнения в виде

$$G_\nu(\mathbf{p},\alpha_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_n[1-g_{\nu n}(\varepsilon)]e^{in(\alpha-\alpha_0)}\ ,$$

то становится очевидным, что при $\nu \to 0$ нечетная часть функции $G_\nu(\mathbf{p},\alpha_0)$ стремится к функции $G_{\mathbf{p}}(\alpha_0)$, которая определена выражением (39). Действительно, уравнения для величин $g_{\nu n}(\varepsilon)$ отличаются от (35) только добавлением к $\nu_{\mathrm{en}}(\varepsilon)$ бесконечно малого слагаемого ν; при нечетном n они могут быть решены указанным методом итераций (см. разд. 3). Отсутствие четных решений уравнения (33) (кроме константы) означает, что при $\nu_{\mathrm{en}}(\varepsilon) \gg \nu$ четная часть $G_\nu(\mathbf{p},\alpha_0)$ выходит на постоянное значение. Таким образом, сделанное в разд. 3 предположение о связи между отсутствием дополнительных четных решений (33) и изотропией четной части конечного распределения доказано. Аналогичное рассуждение в отношении плотности энергии $\mathcal{E}_\nu(\mathbf{p},\alpha_0)$ доказывает постоянство величины κ в (32). Значение функций $G_{\nu s}(\mathbf{p},\alpha_0)$ и $\mathcal{E}_\nu(\mathbf{p},\alpha)$ при $\nu_{\mathrm{en}}(\varepsilon) \gg \nu$ нетрудно получить из законов сохранения, а именно, умножая (П.6) на const, на ε и интегрируя по $\mathbf{p}$, находим: $G_{\nu s}(\mathbf{p},\alpha_0) = (2\pi)^{-1}$ и $\mathcal{E}_\nu(\mathbf{p},\alpha_0) = (2\pi)^{-1}\varepsilon$. Чтобы получить «условие нормировки» (44), следует умножить обе части (П.6) на $\mathrm{sgn}(\mathbf{pp}_0)$, проинтегрировать по $\mathbf{p}$ и воспользоваться выражением (16).

1. А. В. Чаплик, *ЖЭТФ* **60**, 1845 (1971).
2. C. Hodges, H. Smith, and J. W. Wilkins, *Phys. Rev.* **B4**, 302 (1971).
3. Р. Н. Гуржи, А. И. Копелиович, С. Б. Руткевич, *ЖЭТФ* **83**, 290 (1982); *Adv. Phys.* 36, 221 (1987).
4. Р. Н. Гуржи, А. Н. Калиненко, А. И. Копелиович, *ФНТ* **19**, 1030 (1993).
5. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, and A. I. Kopeliovich, *Phys. Rev.* **B52**, 4744 (1995).
6. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, and A. I. Kopeliovich, *Phys. Low-Dim. Struct.* **2**, 75 (1994).

7. L. W. Molenkamp and M. J. M. de Jong, *Phys. Rev.* B49, 5038 (1994); *Phys. Rev.* B51, 13389 (1995).
8. L. W. Molenkamp, M. J. P. Brugmans, H. Van Houten, and C. T. Foxon, *Semicond. Sci. Technol.* 7, B228 (1992).
9. J. Heremans, B. K. Fuller, C. M. Thrush, and D. L. Partin, *Phys. Rev.* B52, 5767 (1995).
10. R. N. Gurzhi, A. I. Kopeliovich, and T. Paszkiewicz, *Die kunst of phonons*, T. Pazkievich (ed.), Plenum Press, New York, 205 (1994).
11. L. J. Challis, *Low-Dimensional Semiconductor Structures*, J. Butcher (ed.), Plenum Press, New York, 441 (1992).
12. B. Laikhtman, *Phys. Rev.* B45, 1259 (1992).
13. Р. Н. Гуржи, А. Н. Калиненко, А. И. Копелиович, *ФНТ* 21, 114 (1995).
14. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, and A. I. Kopeliovich, *Phys. Rev. Lett.* 72, 3872 (1995).
15. Р. Н. Гуржи, *УФН* 94, 689 (1968).

Theory of kinetic phenomena in two-dimensional gas of colliding electrons

R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, and A. I. Kopeliovich

Mathematical methods, based on a reduced representation of the operator of electron-electron collisions acting in a space of quasi-equilibrium functions, are constructed. A number of kinetic phenomena are described from a common point of view: the evolution of high-anisotropic and high-energy electron distributions, the quasi-hydrodynamic effect in electric conduction, the new nonlinear electron transport regime. The kinetic effects have been predicted, which can be observed in experiments on propagation of electron beams and electric conduction of (GaAs)Al wires with high mobility of the carriers.