УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

П. Ф. Самусенко

Нац. пед. ун-т им. М. П. Драгоманова
Украина, 01030, Киев, ул. Пирогова, 9
e-mail: psamusenko@ukr.net

We construct an asymptotic solution of the first boundary-value problem for a linear singularly perturbed system of parabolic partial differential equations with degenerations.

Побудовано асимптотичний розв'язок першої крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з виродженням.

Различные задачи теории линейных параболических систем рассматривались в работах И. Г. Петровского, О. А. Олейник, О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцевой, М. С. Аграновича, М. И. Вишика, С. Д. Эйдельмана, В. Ф. Бутузова, С. Д. Ивасишена. В частности, О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой установлены достаточные условия существования и единственности классического и обобщенного решения основных краевых задач в линейном случае. При этом обосновано применение метода Фурье для их решения [1, с. 295 – 299].

Аналогичные результаты о существовании и единственности решений соответствующих задач для сингулярно возмущенных уравнений получены О. А. Олейник [2].

Оригинальный метод решения краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных предложил В. Ф. Бутузов [3]. Согласно разработанному им методу угловых погранфункций, асимптотические решения краевых задач строятся в виде регулярной и погранслойной частей. При этом функции погранслойной части — решения определенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, удовлетворяющие некоторым краевым условиям.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для вырожденной линейной сингулярно возмущенной параболической системы. По постановке задача близка к исследованиям Ю. А. Митропольского и Г. П. Хомы регулярно возмущенных квазилинейных и нелинейных уравнений гиперболического типа [4, с. 137 – 225].

С. Ф. Фещенко и Н. И. Шкиль при решении первой краевой задачи для гиперболических уравнений с медленно меняющимися коэффициентами использовали метод Фурье [5, с. 226 – 245]. При этом вопрос о сходимости соответствующих рядов и возможности их почленного дифференцирования оставался открытым. Заметим, что уравнения с медленно меняющимися коэффициентами заменой независимой переменной сводятся к сингулярно возмущенным.

Итак, рассмотрим задачу

$$\varepsilon B(t)\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t)u + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L, \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = u(L,t,\varepsilon) = 0, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

где $u = u(x,t,\varepsilon)$ — искомая двумерная вектор-функция, $A(t)$, $B(t)$, $C(x,t)$ — квадратные матрицы 2-го порядка, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ — двумерные вектор-функции с действительными или комплекснозначными компонентами, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, — малый параметр. При этом наличие вырожденной матрицы $B(t)$ значительно усложняет процесс решения задачи (1)–(3), так как можно считать, что система (1) при расщеплении приводит к двум дифференциальным уравнениям в частных производных различного типа.

1. Допустим, что выполняются условия:

1) $A(t), B(t) \in C^\infty[0;\infty)$, $C(x,t)$, $f(x,t) \in C^\infty([0;L]\times[0;\infty))$;

2) $\varphi(x) \in C^4[0;L]$;

3) $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(L) = 0, k = 0,1;$

4) пучок матриц $A(t) - \lambda B(t)$ регулярный для всех $t \in [0;\infty)$, имеет один конечный и один бесконечный элементарные делители;

5) $\lambda_0(t) > 0$, где $\lambda_0(t)$ — собственное значение матрицы $A(t)$ относительно $B(t)$.

Пусть $T > 0$ — произвольная фиксированная постоянная. Решение задачи (1)–(3) в прямоугольнике $\overline{D}_T$,

$$\overline{D}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\, 0 \le t \le T\},$$

будем искать в виде ряда

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(t,\varepsilon)v_s(x), \tag{4}$$

где $z_s(t,\varepsilon)$ — искомая двумерная вектор-функция, а $v_s(x)$ — скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_s''(x) + \omega_s^2 v_s(x) = 0, \quad \omega_s = \frac{s\pi}{L}, \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$v_s(0) = v_s(L) = 0.$$

Положим

$$v_s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\omega_s x, \quad \omega_s = \frac{s\pi}{L}, \quad s \in N.$$

Тогда

$$\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx = \delta_{ks},$$

где δ_{ks} — символ Кронекера.

Подставляя (4) в (1), учитывая при этом (5), умножая полученное равенство на $v_s(x)$ и интегрируя обе его части по x в пределах от 0 до L, приходим к системе

$$\varepsilon B(t)z_s' + \omega_s^2 A(t)z_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_{sk}(t)z_k + f_s(t), \quad s \in N, \tag{6}$$

где

$$C_{sk}(t) = \int_0^L C(x,t)v_k(x)v_s(x)\,dx, \quad f_s(t) = \int_0^L f(x,t)v_s(x)\,dx.$$

Из условий 1, 4 следует существование неособенных матриц $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0;T]$, таких, что [6, с. 24]

$$P(t)B(t)Q(t) = H \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) \end{pmatrix}.$$

При этом $P(t), Q(t) \in C^\infty[0;T]$.

Полагая $z_s(t,\varepsilon) = Q(t)r_s(t,\varepsilon)$ и умножая обе части системы (6) слева на $P(t)$, получаем

$$\varepsilon H r_s' + \omega_s^2 \Omega(t) r_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t) r_k + \varepsilon D_1(t) r_s + P(t) f_s(t), \tag{7}$$

где $D_{0sk}(t) = P(t)C_{sk}(t)Q(t)$, $s,k \in N$, $D_1(t) = -P(t)B(t)Q'(t)$.

Предположим, что выполняется условие

6) $f(0,t) = f(L,t) = 0$, $t \in [0;T]$.

Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\|D_{0sk}(t)\| \leq \frac{M}{(\omega_k - \omega_s)^2}, \quad k \neq s, \quad k,s \in N,$$

$$\|f_s(t)\| \leq \frac{M}{\omega_s^3}, \quad s \in N,$$

причем постоянная M не зависит от k, s. В дальнейшем в случае, когда важен только факт ограниченности, а не величина соответствующей постоянной, будем использовать одну и ту же постоянную M.

Запишем систему (7) следующим образом:

$$\varepsilon \widetilde{H} r' + \widetilde{\Omega}(t) r = \varepsilon \widetilde{D}(t) r + \widetilde{f}(t), \tag{8}$$

где $r(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{f}(t)$ — бесконечномерные векторы с компонентами $r_s(t,\varepsilon)$ и $P(t)f_s(t)$ соответственно, $\widetilde{H} = \operatorname{diag}\{H, H, \ldots\}$, $\widetilde{\Omega}(t) = \operatorname{diag}\{\omega_1^2\Omega(t), \omega_2^2\Omega(t), \ldots\}$, $\widetilde{D}(t) = \widetilde{D}_0(t) + \widetilde{D}_1(t)$, $\widetilde{D}_0(t)$ — бесконечная матрица, состоящая из блоков $D_{0sk}(t)$, $s,k \in N$, $\widetilde{D}_1(t) = \operatorname{diag}\{D_1(t), D_1(t), \ldots\}$.

Решение системы (8) будем искать в виде

$$r(t,\varepsilon) = \Pi(t,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где $\xi(t,\varepsilon)$ — бесконечномерная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$\varepsilon\frac{d\xi}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)\xi, \quad \xi(0,\varepsilon) = a, \tag{10}$$

a — бесконечномерный вектор, все компоненты которого равны 1; $\Pi(t,\varepsilon)$ — бесконечная матрица, $\Lambda(t,\varepsilon)$ — бесконечная диагональная матрица и $g(t,\varepsilon)$ — бесконечномерная вектор-функция вида

$$\Pi(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i\Pi^{(i)}(t), \quad \Lambda(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i\Lambda^{(i)}(t), \quad g(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i g^{(i)}(t). \tag{11}$$

Подставим (9) с учетом (10) в систему (8). Тогда, сравнивая матрицу при $\xi(t,\varepsilon)$ и свободный член соответственно с нулевой матрицей и нулевым вектором, получаем

$$\widetilde{H}\Pi(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) + \widetilde{\Omega}(t)\Pi(t,\varepsilon) = \varepsilon\widetilde{D}(t)\Pi(t,\varepsilon) - \varepsilon\widetilde{H}\Pi'(t,\varepsilon), \tag{12}$$

$$\widetilde{\Omega}(t)g(t,\varepsilon) = \varepsilon\widetilde{D}(t)g(t,\varepsilon) + \widetilde{f}(t) - \varepsilon\widetilde{H}g'(t,\varepsilon). \tag{13}$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε^i, $i = \overline{0,m}$, в тождестве (12):

$$\widetilde{H}\Pi^{(0)}(t)\Lambda^{(0)}(t) + \widetilde{\Omega}(t)\Pi^{(0)}(t) = 0, \tag{14}$$

$$\widetilde{H}\Pi^{(i)}(t)\Lambda^{(0)}(t) + \widetilde{\Omega}(t)\Pi^{(i)}(t) = \widetilde{D}(t)\Pi^{(i-1)}(t) - \widetilde{H}(\Pi^{(i-1)}(t))' - \\ - \widetilde{H}\sum_{j=0}^{i-1}\Pi^{(j)}(t)\Lambda^{(i-j)}(t), \quad i = \overline{1,m}. \tag{15}$$

Докажем разрешимость матричных уравнений (14), (15). Пусть $p_l^{(0)}(t), l \in N,$ — столбцы матрицы $\Pi^{(0)}(t)$, $\Lambda^{(0)}(t) = \operatorname{diag}\{0, \lambda_1^{(0)}(t), 0, \lambda_2^{(0)}(t), \ldots\}$. Тогда систему (14) можно записать следующим образом:

$$(\widetilde{\Omega}(t) + \lambda_l^{(0)}(t)\widetilde{H})p_{2l}^{(0)}(t) = 0, \quad \widetilde{\Omega}(t)p_{2l-1}^{(0)}(t) = 0, \quad l \in N.$$

Положим

$$\lambda_l^{(0)}(t) = -\omega_l^2\lambda_0(t), \quad l \in N,$$

$$p_{2l-1}^{(0)}(t) \equiv 0, \quad \{p_{2l}^{(0)}(t)\}_{2j-1} \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad j,l \in N,$$

$$\{p_{2l}^{(0)}(t)\}_{2j} \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad j \neq l, \quad j,l \in N,$$

$\{p_{2l}^{(0)}(t)\}_{2l}$, $l \in N$, определим ниже.

Из системы (15) получаем

$$(\widetilde{\Omega}(t) + \lambda_l^{(0)}(t)\widetilde{H})p_{2l}^{(i)}(t) = b_{2l}^{(i)}(t), \quad \widetilde{\Omega}(t)p_{2l-1}^{(i)}(t) = b_{2l-1}^{(i)}(t), \quad l \in N,$$

где

$$b_{2l}^{(i)}(t) = \widetilde{D}(t)p_{2l}^{(i-1)}(t) - \widetilde{H}(p_{2l}^{(i-1)}(t))' - \widetilde{H}\sum_{j=0}^{i-1}\lambda_l^{(i-j)}(t)p_{2l}^{(j)}(t),$$

$l \in N$, $p_l^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,m}$, — столбцы матрицы $\Pi^{(i)}(t)$, $\Lambda^{(i)}(t) = \mathrm{diag}\,\{0, \lambda_1^{(i)}(t), 0, \lambda_2^{(i)}(t), \ldots\}$.

Тогда

$$p_{2l-1}^{(i)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0;T],$$

$$\{p_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j-1} = \frac{\{b_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j-1}}{\omega_j^2},$$

$$i = \overline{1,m}, \quad j,l \in N,$$

$$\{p_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j} = \frac{\{b_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j}}{\lambda_0(t)(\omega_j^2 - \omega_l^2)}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j \neq l, \quad j,l \in N,$$

$$\{p_{2l}^{(i)}(t)\}_{2l} \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad i = \overline{1,m}, \quad l \in N,$$

$$\lambda_l^{(i)}(t) = \frac{1}{\{p_{2l}^{(0)}(t)\}_{2l}}\left(\sum_{h=1}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l}^{(i-1)}(t)\}_h - \{p_{2l}^{(i-1)}(t)\}_{2l}' - \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_l^{(i-j)}(t)\{p_{2l}^{(j)}(t)\}_{2l}\right),$$

$$i = \overline{1,m}, \quad l \in N.$$

Рассмотрим теперь тождество (13). Сравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях ε^i, $i = \overline{0,m}$, находим

$$\widetilde{\Omega}(t)g^{(0)}(t) = \widetilde{f}(t),$$

$$\widetilde{\Omega}(t)g^{(i)}(t) = \widetilde{D}(t)g^{(i-1)}(t) - \widetilde{H}(g^{(i-1)}(t))', \quad i = \overline{1,m}.$$

Таким образом,

$$g^{(0)}(t) = (\widetilde{\Omega}(t))^{-1}\widetilde{f}(t),$$

$$g^{(i)}(t) = (\widetilde{\Omega}(t))^{-1}\left(\widetilde{D}(t)g^{(i-1)}(t) - \widetilde{H}(g^{(i-1)}(t))'\right), \quad i = \overline{1,m}.$$

Оценим $p_l^{(i)}(t)$, $\lambda_l^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,m}$, $l \in N$. Допустим, что $p_l^{(0)}(t) \equiv \mathrm{const}$, $t \in [0;T]$, $l \in N$. Будем считать, что пара натуральных чисел (j,l) принадлежит множеству A ($(j,l) \in A$), если $j = 2q-1, 2q$, $l = 2r-1, 2r$, $q \neq r$, $q,r \in N$.

По построению

$$|\{\widetilde{D}(t)p_{2l}^{(0)}\}_k| \le \begin{cases} \dfrac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j-\omega_l)^2}, \quad (k,2l)\in A, \\ \\ M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|, \quad (k,2l)\notin A, \quad k=2j-1,2j, \quad j,l\in N, \end{cases} \tag{16}$$

причем постоянная M не зависит от j, l. Тогда $p_l^{(1)}(t)$, $\lambda_l^{(1)}(t)$, $l\in N$, для всех $t\in[0;T]$ существуют и

$$|\{p_{2l}^{(1)}(t)\}_{2j-1}| \le \begin{cases} \dfrac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2(\omega_j-\omega_l)^2}, \quad (2j-1,2l)\in A, \\ \\ \dfrac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2}, \quad (2j-1,2l)\notin A, \quad j,l\in N, \end{cases}$$

$$|\{p_{2l}^{(1)}(t)\}_{2j}| \le \frac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2-\omega_l^2|(\omega_j-\omega_l)^2}, \quad (2j,2l)\in A, \quad j,l\in N,$$

$$|\lambda_l^{(1)}(t)| \le M, \quad l\in N,$$

постоянная M не зависит от j, l.

Используя метод математической индукции, доказываем существование $p_l^{(i)}(t)$, $\lambda_l^{(i)}(t)$, $l\in N$, $i=\overline{2,m}$. При этом

$$|\{p_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j-1}| \le \begin{cases} \dfrac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2(\omega_j-\omega_l)^2}, \quad (2j-1,2l)\in A, \\ \\ \dfrac{M|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2\omega_l}, \quad (2j-1,2l)\notin A, \quad j,l\in N, \end{cases} \tag{17}$$

$$|\{p_{2l}^{(i)}(t)\}_{2j}| \le \frac{M|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2-\omega_l^2|(\omega_j-\omega_l)^2}, \quad (2j,2l)\in A, \quad j,l\in N, \tag{18}$$

$$|\lambda_l^{(i)}(t)| \le M, \quad l\in N, \tag{19}$$

$i=\overline{2,m}$, постоянная M не зависит от j, l.

Действительно, допустим, что оценки (17) – (19) справедливы при $i = k$, $k \geq 2$. Тогда

$$\{\widetilde{D}(t)p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j-1} = \sum_{h=1}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h =$$

$$= \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\notin A}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h =$$

$$= \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p-1,\,p\in N}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p,\,p\in N}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h +$$

$$+ \{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,2j-1}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j-1} + \{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,2j}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j} =$$

$$= \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p-1,\,p\in N\\(2p-1,2l)\in A}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p-1,\,p\in N\\(2p-1,2l)\notin A}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h +$$

$$+ \sum_{\substack{h=1\\(2j-1,h)\in A\\h=2p,\,p\in N}}^{\infty}\{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,h}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_h + \{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,2j-1}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j-1} +$$

$$+ \{\widetilde{D}(t)\}_{2j-1,2j}\{p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j}.$$

Таким образом,

$$\left|\{\widetilde{D}(t)p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j-1}\right| \leq K_1\left|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}\right|\left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq j,\,p\neq l}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_j-\omega_p)^2\omega_p^2(\omega_p-\omega_l)^2} + \frac{1}{\omega_l^2(\omega_j-\omega_l)^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{p=1\\p\neq j,\,p\neq l}}^{\infty}\frac{1}{(\omega_j-\omega_p)^2|\omega_p^2-\omega_l^2|(\omega_p-\omega_l)^2} + \frac{1}{\omega_j^2(\omega_j-\omega_l)^2} + \frac{1}{|\omega_j^2-\omega_l^2|(\omega_j-\omega_l)^2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{K_2|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j-\omega_l)^2}$$

для всех $(2j-1, 2l) \in A$, $j, l \in N$ (постоянные K_1, K_2 не зависят от $j, l \in N$). Если же $(2j-1, 2l) \notin A$, $j, l \in N$, то

$$|\{\widetilde{D}(t)p_{2l}^{(k)}(t)\}_{2j-1}| \leq \frac{M_2|\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_l}.$$

Тогда по построению для $i = k + 1$ имеет место оценка (17). Аналогично показываем справедливость оценок (18), (19).

Заметим, что

$$|\{g^{(i)}(t)\}_k| \le \frac{M}{\omega_j^4}, \quad i = \overline{0,m}, \quad k = 2j-1, 2j, \quad j \in N.$$

Пусть $w(t,\varepsilon) = \Pi(t,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon)$. Построим вектор-функцию

$$u_m(x,t,\varepsilon) = Q(t)\sum_{s=1}^{\infty} w_s(t,\varepsilon)v_s(x), \tag{20}$$

где

$$w_s(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \{w(t,\varepsilon)\}_{2s-1} \\ \{w(t,\varepsilon)\}_{2s} \end{pmatrix}, \quad s \in N,$$

$$\{w(t,\varepsilon)\}_j = \sum_{l=1}^{\infty}\{\Pi(t,\varepsilon)\}_{jl}\{\xi(t,\varepsilon)\}_l + \{g(t,\varepsilon)\}_j, \quad j = 2s-1, 2s, \quad s \in N.$$

Величины $\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}$, $l \in N$, определим из системы

$$\{w(0,\varepsilon)\}_{2l} = \sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0)\}_{2j}\{a_l\}_j, \quad l \in N. \tag{21}$$

Здесь $\{a_l\}_j$ — компоненты вектора $a_l = \displaystyle\int_0^L \varphi(x)v_l(x)\,dx$, $l \in N$.

Согласно формулам Крамера запишем систему (21) следующим образом:

$$\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l} = f\left(\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}\right), \quad l \in N, \tag{22}$$

где

$$\left\|f\left(\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}\right)\right\| \le \frac{M_1}{\omega_l^4} + \varepsilon M_2 \sum_{\substack{h=1\\h\ne l}}^{\infty} \frac{|\{p_{2h}^{(0)}\}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2|(\omega_l - \omega_h)^2},$$

постоянные M_1, M_2 не зависят от l.

Таким образом, на множествах

$$S_{l4} = \left\{\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l} \in R^1 : |\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}| \le \frac{M_0}{\omega_l^4}\right\}, \quad M_0 < M_1, \quad l \in N,$$

функции $f(\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l})$ удовлетворяют условиям теоремы о существовании и единственности неподвижной точки [7, с. 609], т. е. система (22) на множестве S_{l4} имеет единственное решение.

Предположим, что выполняются такие условия:

7) $\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l} \neq 0, l \in N$;
8) $\{w(0,\varepsilon)\}_{2l-1} = \sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0)\}_{1j}\{a_l\}_j, l \in N$.

Для найденных $\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}$ ряд (20) в прямоугольнике $\overline{D}_T$ сходится абсолютно и равномерно. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (20) до двух раз включительно; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$.

Заметим, что

$$u_m(x,0,\varepsilon) = \varphi(x).$$

По построению вектор-функция $w_s(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе (6) с точностью $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^2}\right)$, $s \in N$, т. е. $\|c_s(t,\varepsilon)\| \leq \dfrac{k_0\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^2}$, $t \in [0;T]$, где $c_s(t,\varepsilon)$ — соответствующий остаток, постоянная k_0 не зависит от ε, s.

Пусть

$$r_s(t,\varepsilon) = w_s(t,\varepsilon) + y_s(t,\varepsilon). \tag{23}$$

Тогда

$$\varepsilon H y_s' + \omega_s^2\Omega(t)y_s = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t)y_k + \varepsilon D_1(t)y_s + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^2}\right), \tag{24}$$

или

$$y_{s1}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t)\}_{1j}y_{kj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m}}{\omega_s^2}\right)\right), \tag{25}$$

$$\varepsilon y_{s2}' + \omega_s^2\lambda_0(t)y_{s2} = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t)\}_{2j}y_{kj} + \varepsilon\sum_{j=1}^{2}\{D_1(t)\}_{2j}y_{sj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^2}\right), \quad s \in N, \tag{26}$$

где y_{si} — i-я компонента вектор-функции y_s.

Положим

$$y_s(0,\varepsilon) = 0, \quad s \in N. \tag{27}$$

Таким образом,

$$y_{s2}(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\omega_s^2}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t \lambda_0(v)dv\right) \times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(\tau)\}_{2j}y_{kj} + \sum_{j=1}^{2}\{D_1(\tau)\}_{2j}y_{sj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m}}{\omega_s^2}\right)\right)d\tau, \quad s \in N. \tag{28}$$

Пусть выполняется следующее условие:

9) $\{\widetilde{D}_0(0)\}_{2l-1,j} = 0$, $\{\widetilde{f}(0)\}_{2l-1,j} = 0$, $j, l \in N$.

Тогда для достаточно больших k_1,

$$k_1 > k_0 \max\left\{1, \frac{1}{\beta}\right\}, \quad 0 < \beta < \lambda_0(t), \quad t \in [0;T],$$

оператор, определяемый с помощью (25), (28), отображает выпуклое замкнутое множество D_{s4},

$$D_{s4} = \left\{y_s(t,\varepsilon) \in C[0;T] : \|y_s(t,\varepsilon)\| \le \frac{k_1 \varepsilon^{m+1}}{\omega_s^4}\right\}, \quad s \in N, \quad \varepsilon \in [0;\varepsilon_1],$$

полного нормированного пространства $C[0;T]$ в его компактное подмножество и является неперервным на $D_{s4}^{(2)}$. Поэтому он имеет неподвижные точки на множестве D_{s4} [7, с. 628]. Таким образом, система (25), (28) совместна. При этом справедливы равенства (27).

Используя метод доказательства от противного, показываем единственность найденного решения системы (25), (28) [8, с. 147 – 149].

Из полученных оценок для функций $y_{si}(t,\varepsilon)$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} y_s(t,\varepsilon) v_s(x) \tag{29}$$

в прямоугольнике $\overline{D}_T$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (29) по t и x до двух раз включительно; полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{D}_T$.

По построению

$$\varepsilon B(t) \sum_{k=1}^{\infty} z_k'(t,\varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x)\,dx + A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 z_k(t,\varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x)\,dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^L C(x,t) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t,\varepsilon) + \int_0^L f(x,t) v_s(x)\,dx, \quad s \in N,$$

или

$$\int_0^L \left(\varepsilon B(t) \frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - A(t) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t) u(x,t,\varepsilon) - f(x,t) \right) v_s(x)\,dx \equiv 0, \quad s \in N,$$

где вектор-функция $u(x,t,\varepsilon)$ определяется по формуле (4).

Положим

$$q(x,t,\varepsilon) = \varepsilon B(t) \frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - A(t) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t) u(x,t,\varepsilon) - f(x,t).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_s(t,\varepsilon) v_s(x),$$

где

$$q_s(t,\varepsilon) = \int\limits_0^L q(x,t,\varepsilon) v_s(x)\, dx, \quad s \in N.$$

По построению $q_s(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s \in N$.

Поскольку вектор-функция $q(x,t,\varepsilon)$ непрерывна по переменной x, $x \in [0;L]$ (t, ε считаем параметрами), и

$$q(0,t,\varepsilon) = q(L,t,\varepsilon) = 0, \quad t \in [0;T],$$

продолжая нечетным способом компоненты $q(x,t,\varepsilon)$ на отрезок $[-L;0]$, приходим к выводу, что $q(x,t,\varepsilon) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{D}_T$ [9, с. 578].

Таким образом, вектор-функция (4) в прямоугольнике $\overline{D}_T$ — решение задачи (1) – (3), причем

$$\|u(x,t,\varepsilon) - u_m(x,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{30}$$

В силу произвольности T решение задачи (1) – (3) определяется на множестве $\overline{D}_\infty$, $\overline{D}_\infty = \{(x,t) : 0 \le x \le L, t \ge 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$, $B(t) \in C^{m+1}[0;\infty)$, $C(x,t)$, $f(x,t) \in C^{m+1}([0;L] \times [0;\infty))$ и выполняются условия 2 – 9. Тогда существует такое число ε_1, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, что для всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ задача (1) – (3) на множестве $\overline{D}_\infty$ имеет единственное решение (4), для которого в $\overline{D}_T \subset \overline{D}_\infty$ справедлива оценка (30).*

2. В части 1 мы построили классическое решение задачи (1) – (3). При этом условия 1 – 3, 6 позволяли дважды почленно дифференцировать соответствующие ряды.

Допустим теперь, что выполняются следующие условия:

10) $\varphi(x) \in C^2[0;L]$;

11) $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Тогда аналогично показываем, что на множествах

$$S_{l2} = \left\{ \{p_{2l}^{(0)}\}_{2l} \in R^1 : |\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}| \le \frac{M_0}{\omega_l^2} \right\}, \quad l \in N,$$

система (22) имеет единственное решение $\{p_{2l}^{(0)}\}_{2l}$.

В данном случае вектор-функция $w_s(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе (6) с точностью $O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s}\right)$, $s \in N$, а для решения $y_{si} = y_{si}(t,\varepsilon)$, $i = 1,2$, системы (25), (28) имеет место оценка $y_{si}(t,\varepsilon) = O\left(\dfrac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$, $s \in N$.

По построению

$$\varepsilon B(t)\sum_{k=1}^{m} z_k'(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)\,dx + A(t)\sum_{k=1}^{m}\omega_k^2 z_k(t,\varepsilon)\int_0^L v_k(x)v_s(x)dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L C(x,t)v_k(x)v_s(x)dx\right)z_k(t,\varepsilon) + \int_0^L f(x,t)v_s(x)\,dx, \quad s=\overline{1,m},$$

т. е.

$$\int_0^L\left(\varepsilon B(t)\frac{\partial u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - A(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon) - f(x,t)\right)v_s(x)\,dx \equiv 0,$$

$$s=\overline{1,m},$$

$$u_m(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{m} z_k(t,\varepsilon)v_k(x).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x), \tag{31}$$

где

$$q_{ms}(t,\varepsilon) = \int_0^L q_m(x,t,\varepsilon)\,v_s(x)\,dx, \quad s\in N,$$

$$q_m(x,t,\varepsilon) = \varepsilon B(t)\frac{\partial u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - A(t)\frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t)u(x,t,\varepsilon) - f(x,t).$$

По построению $q_{ms}(t,\varepsilon)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $s=\overline{1,m}$. Оценим остальные коэффициенты $q_{ms}(t,\varepsilon)$, $s\geq m+1$. Для этого заметим, что

$$q_{m+1}(x,t,\varepsilon) = q_m(x,t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)z_{m+1}'(t,\varepsilon)v_{m+1}(x) - A(t)z_{m+1}(t,\varepsilon)v_{m+1}''(x).$$

Поскольку $q_{m+1,s}(t,\varepsilon)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $s=\overline{1,m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t,\varepsilon) = -(\varepsilon B(t)z_{m+1}'(t,\varepsilon) + \omega_{m+1}^2 A(t)z_{m+1}(t,\varepsilon)).$$

Таким образом,

$$\|q_{m,m+1}(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_{m+1}^2}$$

с постоянной M, не зависящей от m. И вообще, учитывая, что

$$q_{m+i}(x,t,\varepsilon) = q_m(x,t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{i}(\varepsilon B(t) z'_{m+i}(t,\varepsilon) v_{m+i}(x) - A(t) z_{m+i}(t,\varepsilon) v''_{m+i}(x)),$$

откуда

$$q_{m,m+i}(x,t,\varepsilon) = -(\varepsilon B(t) z'_{m+i}(t,\varepsilon) + \omega^2_{m+i} A(t) z_{m+i}(t,\varepsilon)), \quad i \in N,$$

получаем

$$\|q_{ms}(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_s^2}, \quad s \geq m+1,$$

где постоянная M не зависит от m, s.

Таким образом, ряд (31) в прямоугольнике $\overline{D}_T$ сходится абсолютно и равномерно к функции $q_m(x,t,\varepsilon)$ [10, с. 68].

Поскольку $u_m(x,t,\varepsilon)$ — решение задачи

$$\varepsilon B(t) \frac{\partial u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t} = A(t) \frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t) u(x,t,\varepsilon) + f(x,t) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon) v_s(x),$$

$$u_m(0,t,\varepsilon) = u_m(L,t,\varepsilon) = 0,$$

$$u_m(x,0,\varepsilon) = \varphi_m(x),$$

где

$$\varphi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s v_s(x),$$

то вектор-функция (4) в прямоугольнике $\overline{D}_T$ будет обобщенным решением задачи (1)–(3) [11, с. 315].

Теорема 2. *Пусть $A(t),\ B(t) \in C^{m+1}[0;\infty)$, $C(x,t),\ f(x,t) \in C^{m+1}([0;L] \times [0;\infty))$ и выполняются условия 4–6, 7–11. Тогда существует такое число ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, что для всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ задача (1)–(3) на множестве $\overline{D}_\infty$ имеет единственное обобщенное решение (4), для которого в $\overline{D}_T \subset \overline{D}_\infty$ справедлива оценка (30).*

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
2. *Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными с малым параметром при старших производных и задача Коши для нелинейных уравнений в целом // Успехи мат. наук. — 1955. — **10**, вып. 3 (65). — С. 229–234.
3. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1979. — **15**, № 10. — С. 1848–1862.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследований квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991.
5. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966.

6. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
8. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. 3.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
11. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.

Получено 11.10.11