Физика низких температур, 1996, т. 22, № 12, с. 1428–1441

Упругие колебания твердых тел с дисклинациями

В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: natsik@ilt.kharkov.ua; smirnov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 18 апреля 1996 г., после переработки 25 июня 1996 г.

Известный в механике упругого континуума метод описания волн малой амплитуды в неоднородно деформированной среде обобщен на случай упруго изотропной среды с дисклинациями Вольтерра, для которых дисторсия является неоднозначной функцией пространственных координат. На основе закона состояния Мурнагана найдено выражение для плотности упругой энергии и получены динамические уравнения, описывающие малые колебания среды, деформированной упругими полями дисклинаций. Рассмотрена конкретная задача о нормальных колебаниях протяженного цилиндра, содержащего клиновую дисклинацию, линия которой расположена на оси цилиндра. Подробно исследовано влияние дисклинации на семейство осесимметричных крутильных колебательных мод цилиндра. Развита теория возмущений по малому параметру — безразмерной мощности дисклинации, — в рамках которой получены аналитические выражения для закона дисперсии и колебательных состояний.

Відомий у механіці пружного континууму метод опису хвиль малої амплітуди у неоднорідно деформованому середовищі узагальнено на випадок ізотропного пружного середовища з дисклінаціями Вольтерра, для котрих дисторсія не є однозначною функцією просторових координат. На основі закону стану Мурнагана знайдено вираз для густини пружної енергії і одержано динамічні рівняння, що описують малі коливання середовища, деформованого пружними полями дисклінацій. Розглянуто конкретну задачу про нормальні коливання протяжного циліндра, що містить у собі клинову дисклінацію, лінія якої розташована на осі циліндра. Докладно досліджено вплив дисклінації на сукупність вісесиметричних коливальних мод циліндра. Розвинуто теорію збурень по малому параметру — безрозмірній потужності дисклінації, — в межах якої знайдено аналітичні вирази для закону дисперсії і коливальних станів.

Введение

В современной физике твердого тела общеизвестна роль линейных дефектов кристаллического строения — трансляционных дислокаций, — которые влияют на многие физические характеристики реальных кристаллов.

Наиболее интересной особенностью дислокаций является их одномерность и связанная с этим способность вызывать существенную перестройку длинноволновой части колебательного спектра кристалла. В имеющихся по этой проблеме публикациях рассматривался широкий круг вопросов: смягчение колебательного спектра и локализация колебаний решетки вблизи дислокаций [1–5]; особенности собственного спектра колебаний дислокаций в кристаллах с неупорядоченными точечными дефектами [6]; описание конкретных физических свойств кристаллов, непосредственно связанных с влиянием дислокаций на их колебательный спектр, например дислокационного вклада в низкотемпературную решеточную теплоемкость [7].

Между тем, трансляционные дислокации — это частный тип линейных дефектов. В классической теории упругости давно известен класс дислокаций Вольтерра, в который наряду с трансляционными входят также поворотные дислокации. В свою очередь, дислокации Вольтерра являются частными представителями более общего класса дислокаций Сомилианы [8–10]. По устоявшейся терминологии, трансляционные дислокации Вольтерра принято называть просто дислокациями, а поворотные дислокации Вольтерра — дисклинациями.

Длительный период времени дисклинации воспринимались как экзотические дефекты. Связанные с дисклинациями большие повороты решетки (минимально возможный поворот решетки в кристалле, обусловленный полной дисклинацией, составляет $\pi/3$) приводят к быстрому росту собственной упругой энергии дефекта с ростом размера кристалла, поэтому в силу термодинамических запретов их присутствие в кристаллах макроскопических размеров казалось маловероятным. В последнее время, благодаря непосредственному наблюдению дисклинационных образований в раз-

© В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов, 1996

личных системах и развитию теоретических идей, отношение к дисклинациям заметно меняется. Конструктивность концепции дисклинаций подтверждается их успешным применением для описания разнообразных явлений в широком классе физических объектов [11]. Выяснилось, что в телах макроскопических размеров наиболее вероятными являются мультипольные низкоэнергетические дисклинационные структуры с взаимоэкранированными упругими полями, а одиночные частичные дисклинации могут присутствовать в нанокристаллах [10–12]. В принципе возможно также создание и использование инженерных конструкций обычных размеров, находящихся в упруго деформированном состоянии дисклинационного типа, — специальным образом приготовленных полых толстостенных цилиндров. Поэтому анализ динамики упругого тела с диклинацией может представлять интерес с точки зрения прикладной механики.

В настоящее время закладываются лишь основы весьма разветвленной дисклинационной проблематики и область применения дисклинационных представлений только формируется. Круг изучаемых вопросов и тематика работ, связанных с дисклинациями, непрерывно расширяются, но при этом многие стороны проблемы остаются еще неисследованными.

В частности, насколько нам известно, в литературе не рассматривалось влияние дисклинаций на динамику упругих сред. Между тем, по аналогии с дислокациями, следует ожидать, что дисклинации могут вызывать разнообразные нетривиальные изменения в колебательном спектре кристалла и существенно изменять характер распространения упругих волн в твердых телах.

Некоторые тенденции в перестройке спектра можно предсказать уже на основании общих свойств дисклинаций. Наглядным примером может служить клиновая дисклинация (КД). На рис. 1 показана классическая схема образования КД в полом цилиндре с внешним радиусом R и внутренним r_0. Вначале производится разрез цилиндра по радиальной плоскости. Затем берега разреза поворачиваются как жесткие недеформированные поверхности друг относительно друга вокруг оси цилиндра на угол Ω. Если при этом повороте возникает область перекрытия, то лишний материал в форме клина удаляется, а если при повороте раскрывается щель, то она заполняется дополнительным материалом в виде того же клина. После этого производится склейка поверхностей и материалу предоставляется возможность свободной упругой релаксации*. В первом случае клиновая дисклинация считается положительной (ПКД), а во втором случае — отрицательной (ОКД). Вектор поворота берегов разреза называется вектором Франка, а его величина Ω характеризует мощность дисклинации. Существенно, что средняя плотность тела, содержащего дисклинацию, будет отличаться от плотности исходного материала: ОКД увеличивает, а ПКД уменьшает среднюю плотность. Следовательно, образование КД должно приводить к перенормировке скоростей звука даже без учета изменения модулей упругости материала: в случае ПКД скорости звука увеличиваются, частоты собственных колебаний возрастают и спектр становится более жестким; в случае ОКД скорости звука уменьшаются, что эквивалентно смягчению колебательного спектра. Таким образом, КД неизбежно трансформирует колебательный спектр, причем сдвиг частот может быть достаточно большим.

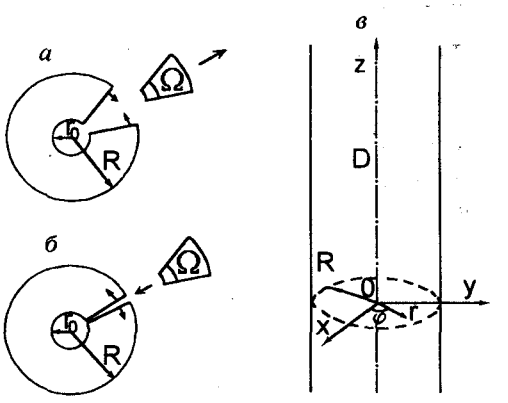

Рис. 1. Дисклинации в упругом цилиндре: схема введения в цилиндр клиновых положительной (*а*) и отрицательной (*б*) дисклинаций; геометрия задачи о нормальных колебаниях цилиндра с КД, расположенной на его оси (*в*).

Итоговая картина оказывается более содержательной: на описанное затравочное изменение спектра накладывается влияние нелинейных упругих эффектов, связанных с неоднородным и большим по величине полем деформаций, что приводит к более сложной и разнообразной структуре изменений. Последовательный учет этого фактора

* Такая схема образования дисклинации может быть в буквальном смысле реализована в инженерной конструкции. В кристаллах малых размеров дисклинации возникают спонтанно при их росте или кристаллизации мелких капель жидкости. Для этих дисклинаций внутренняя полость, естественно, отсутствует, и при их изучении следует полагать $r_0 = 0$.

требует специального анализа, который и предпринят в настоящей работе.

В реальных случаях одиночные дисклинации могут существовать только в твердых телах ограниченных размеров, поэтому при конкретном анализе влияния дисклинаций на спектр упругих колебаний мы ограничимся изучением одного из простейших примеров такого типа — протяженного упругого цилиндра с дисклинацией, линия которой расположена на его оси. В работе рассмотрены следующие задачи:

1) известный в динамике упругой среды метод описания волн малой амплитуды при наличии в среде большого по величине, непрерывного и однозначного статического поля дисторсии, обобщается на случай упругой изотропной среды с дисклинациями Вольтерра, создающими более сложный тип дисторсии;

2) изучена конкретная задача о нормальных колебаниях протяженного цилиндра, содержащего КД, подробно исследовано влияние дисклинации на семейство аксиально-симметричных крутильных колебательных мод.

1. Основные динамические уравнения для изотропного упругого тела с дисклинацией

В рассматриваемой задаче удобно использовать так называемое лагранжево, или материальное, представление, когда независимыми динамическими переменными являются время и координаты бесконечно малого элемента среды в некоторой отсчетной конфигурации. В качестве отсчетного состояния мы примем однородное недеформированное состояние среды, которое моделирует состояние статического равновесия идеального кристалла. Положение произвольной точки в идеальной (отсчетной) конфигурации будем определять ее радиус-вектором $\mathbf{r}$ с компонентами $\{x_i\} = \{x, y, z\}$ в фиксированной системе декартовых координат. В дальнейшем на множестве векторов $\mathbf{r}$ может быть задано как поле смещений элементов среды, обусловленное введением в нее дисклинаций, так и волновое поле малых колебаний. Спектр малых колебаний среды относительно идеального состояния будем называть идеальным колебательным спектром.

Для упругой среды с дисклинациями из многообразия конфигураций целесообразно выделить начальное и текущее состояния. Начальное состояние — это конфигурация, которая отвечает состоянию статического равновесия упругого тела с дисклинациями, такое состояние мы считаем известным: его описание развито в теории стационарных дисклинаций в однородном линейно упругом теле [9–11]. Характеристикой начального состояния может служить тензор упругих деформаций неподвижной дисклинации с компонентами $U_{ik}(\mathbf{r})$, которые будем считать известными, заданными функциями. Текущее состояние — это конфигурация, которая обусловлена малыми колебаниями среды относительно начального состояния. Спектр этих колебаний является спектром неоднородно деформированного кристалла. Для описания колебательных состояний введем полевую динамическую переменную $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещения элементов среды относительно их положений в начальном состоянии.

Чтобы получить уравнение движения в гармоническом приближении, необходимо записать выражение для плотности потенциальной энергии колеблющегося тела в виде квадратичной формы по динамическим дисторсиям $u_{ik} \equiv \partial u_k / \partial x_i$. Введем тезор упругой дисторсии η_{ik} и определяемый им тензор деформации Коши—Грина:

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\eta_{ik} + \eta_{ki} + \eta_{in}\eta_{kn}\right).$$

В качестве базовой модели среды выберем нелинейный материал Мурнагана [13] и воспользуемся общим представлением для удельной (отнесенной к единице объема идеального состояния) потенциальной энергии деформации изотропного материала (см., например, [14]):

$$E = \mu\gamma_{nl}^2 + \frac{1}{2}\lambda\gamma_{nn}^2 + \frac{1}{3}A\gamma_{nl}\gamma_{lm}\gamma_{mn} + \\ + B\gamma_{nk}^2\gamma_{ll} + \frac{1}{3}C\gamma_{nn}^3, \qquad (1)$$

включающим все скалярные инварианты второй и третьей степеней тензора деформации γ_{ik}. Здесь μ, λ — постоянные Ламе второго порядка; A, B, C — упругие модули третьего порядка.

При использовании стандартной процедуры вывода уравнений малых колебаний деформированного тела [2–4,13,15] тензор упругой дисторсии в текущем состоянии η_{ik} формально представляют в виде суммы динамической дисторсии u_{ik} и статической дисторсии начального состояния. При этом неявно предполагается, что поле статической дисторсии непрерывно и однозначно. Однако такая процедура требует уточнения в случае дисклинации, когда тензор упругой дисторсии не определяется однозначно и не может рассматриваться как базовая характеристика деформированного состояния [9]. Условиям однозначности и непрерывнос-

ти удовлетворяют линейный тензор упругой статической деформации $U_{ik}(\mathbf{r})$ и тензор изгиба-кручения. Поскольку энергия E должна быть однозначной и непрерывной функцией пространственных координат, в нашей модели немоментной среды она может зависеть лишь от компонент U_{ik}. Основываясь на этих соображениях, представим тензор деформации γ_{ik} в виде

$$\gamma_{ik} = U_{ik} + \frac{1}{2}\left(u_{ik} + u_{ki} + u_{il}\,u_{kl}\right).$$

Подставляя γ_{ik} в (1) и ограничиваясь квадратичными по u_{ik} слагаемыми, получаем

$$E = E_0 + \mu\varepsilon_{ik}^2 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ll}^2 + \mu U_{ik}u_{in}u_{kn} + \lambda U_{ll}u_{kn}^2 +$$

$$+ AU_{mn}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{km} + B\left(U_{ll}\varepsilon_{nk}^2 + 2U_{nk}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{ll}\right) + CU_{nn}\varepsilon_{ll}^2. \qquad (2)$$

Здесь $\varepsilon_{ik} = 1/2(u_{ik} + u_{ki})$ — линейный тензор динамической деформации; $E_0 = \mu U_{ik}^2 + 1/2\,\lambda U_{ll}^2$ — энергия начального состояния, записанная в приближении линейной теории упругости. Второе и третье слагаемые в (2) описывают энергию колебаний среды относительно идеального состояния, а последующие обусловлены влиянием неоднородного начального состояния.

С помощью энергии E вводится тензор Пиола–Кирхгофа P_{ik} [13,15], компоненты которого являются величинами, сопряженными компонентам u_{ik}:

$$P_{ik} \equiv \frac{\partial E}{\partial u_{ik}}.$$

Используя (2), получаем

$$P_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu U_{in}u_{nk} + \lambda U_{nn}u_{ik} +$$

$$+ A\left(U_{in}\varepsilon_{nk} + U_{kn}\varepsilon_{ni}\right) + 2CU_{nn}\varepsilon_{ll}\delta_{ik} +$$

$$+ 2B\left(U_{nn}\varepsilon_{ik} + U_{ik}\varepsilon_{nn} + U_{mn}\varepsilon_{nm}\delta_{ik}\right), \qquad (3)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Видно, что тензор (3) в общем случае имеет несимметричную часть, пропорциональную компонентам тензора дисторсии u_{ik}.

С помощью тензора P_{ik} уравнения движения при отсутствии объемных сил записываются в виде

$$\rho\frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ki}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k}, \qquad (4)$$

где пространственные производные вычисляются в координатном базисе идеального состояния, а ρ — средняя плотность тела в начальном состоянии, которая может отличаться от средней плотности идеального тела ρ_0.

Для ограниченного тела к уравнениям движения (4) следует добавить граничные условия на его поверхности. В частности, если поверхность тела свободна, то краевое условие принимает вид

$$n_i P_{ik}(\mathbf{R}, t) = 0, \qquad (5)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек поверхности; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности. Общую формулировку краевых условий см., например, в [16].

2. Клиновая дисклинация в упругом цилиндре

В рамках классической теории упругости весьма подробно изучалось распространение упругих волн в изотропном упругом цилиндре [15]. В качестве конкретного применения полученных выше формул мы рассмотрим эту же классическую задачу для случая, когда цилиндр содержит соосную с ним прямолинейную КД (см. рис. 1). Для данной геометрии задачи удобно использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z. Все векторы и тензоры ниже будут представлены своими физическими компонентами в единичном ортонормированном векторном базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$. Тогда, как известно [8,16], тензор деформации U_{ik} является аксиально-симметричным и имеет две отличные от нуля компоненты U_{rr} и $U_{\varphi\varphi}$.

Если $r_0 \ll R$, то учет наличия ядра дисклинации (внутренней полости) дает малые поправки почти везде за исключением малой области вблизи r_0. Важно, что при этом собственная упругая энергия КД (рассчитанная на единицу длины) не имеет расходимости, связанной с ядром дефекта: она слабо зависит от отношения r_0/R и остается конечной при $r_0 = 0$ [10]. Поэтому в интересующей нас задаче приемлемой является более простая модель *сингулярной дисклинации с нулевым диаметром ядра*. Для такой дисклинации компоненты деформации можно выразить через упругую дилатацию $U_{nn}(r)$:

$$U_{rr} = \frac{1}{2}U_{nn} - g,$$

$$U_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}U_{nn} + g. \qquad (6)$$

Здесь

$$U_{nn} = q\left(\ln\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right);$$
$$q = \frac{\Omega(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)}, \quad g = \frac{\Omega}{8\pi(1-\nu)}; \tag{7}$$

Ω — величина вектора Франка (далее будем считать, что $\Omega > 0$ для ПКД и $\Omega < 0$ для ОКД); ν — коэффициент Пуассона. Видно, что U_{nn} является знакопеременной функцией r. В случае ПКД дилатация отрицательна во внутренней области цилиндра и положительна в области, примыкающей к боковой поверхности. В случае ОКД дилатация имеет обратные знаки. Отметим, что интеграл от U_{nn} по площади поперечного сечения цилиндра равен нулю и суммарное изменение объема цилиндра, обусловленное упругой деформацией, отсутствует (этот результат справедлив и в общем случае $r_0 \neq 0$).

Таким образом, в рамках линейной теории упругости изменение средней плотности тела с КД обусловлено только изменением его массы, следовательно,

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\Omega}{2\pi}\right). \tag{8}$$

В связи с этим имеются две возможности сравнения колебаний цилиндра с дисклинацией и колебаний цилиндра относительно идеального состояния. Можно рассматривать: а) цилиндры с одинаковыми радиусами, но с различными плотностями ρ и ρ_0; б) цилиндры с одинаковой массой (имеющие одинаковое число атомов, а следовательно, и равное полное число колебательных степеней свободы), но с различными радиусами $\widetilde{R}$ и R. Во втором случае радиус цилиндра с дисклинацией $\widetilde{R}$ задается соотношением

$$\widetilde{R} = R\left(1 - \frac{\Omega}{2\pi}\right)^{-1/2}.$$

2.1. Уравнения движения и краевые условия

С помощью соотношений (6) плотность упругой энергии E и тензор Пиола–Кирхгофа можно записать в виде выражений, зависящих только от дилатации и безразмерной константы g. Подставляя (6) в (2) и (3), находим

$$E = E_0 + \mu\varepsilon_{nm}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda + CU_{ll}\right)\varepsilon_{nn}^2 + \frac{1}{2}\lambda U_{ll}u_{nm}^2 + \mu\left[\frac{1}{2}U_{ll}\left(u_{rn}^2 + u_{\varphi n}^2\right) + g\left(u_{\varphi n}^2 - u_{rn}^2\right)\right] +$$
$$+ A\left[\frac{1}{2}U_{ll}\left(\varepsilon_{rn}^2 + \varepsilon_{\varphi n}^2\right) + g\left(\varepsilon_{\varphi n}^2 - \varepsilon_{rn}^2\right)\right] + B\left[U_{ll}\varepsilon_{nm}^2 + U_{ll}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\varepsilon_{nn} + 2g\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}\right)\varepsilon_{nn}\right] \tag{9}$$

и соответственно

$$P_{ik} = 2\left(\mu + BU_{ll}\right)\varepsilon_{ik} + \left(\lambda + 2CU_{ll}\right)\varepsilon_{nn}\delta_{ik} + \mu\left[U_{ll}\left(u_{rk}\delta_{ir} + u_{\varphi k}\delta_{i\varphi}\right) + 2g\left(u_{\varphi k}\delta_{i\varphi} - u_{rk}\delta_{ir}\right)\right] +$$
$$+ \lambda U_{ll}u_{ik} + A\left[\frac{1}{2}U_{ll}\left(\varepsilon_{rk}\delta_{ir} + \varepsilon_{ri}\delta_{kr} + \varepsilon_{\varphi k}\delta_{i\varphi} + \varepsilon_{\varphi i}\delta_{k\varphi}\right) + g\left(\varepsilon_{\varphi k}\delta_{i\varphi} + \varepsilon_{\varphi i}\delta_{k\varphi} - \varepsilon_{rk}\delta_{ir} - \varepsilon_{ri}\delta_{kr}\right)\right] +$$
$$+ B\left[U_{ll}\varepsilon_{nn}\left(\delta_{ir}\delta_{kr} + \delta_{i\varphi}\delta_{k\varphi}\right) + 2g\varepsilon_{nn}\left(\delta_{i\varphi}\delta_{k\varphi} - \delta_{ir}\delta_{kr}\right) + U_{ll}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\delta_{ik} + 2g\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}\right)\delta_{ik}\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (4), получаем уравнения движения в явном виде:

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \left(\mu + \lambda + Q_5\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r} + \left(\mu + \lambda + M_4\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\mu + \lambda + M_5\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial z} + \left(\mu + M_1\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} +$$
$$+ \left(\mu + M_2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\mu + M_6\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi^2} + \left(2\mu + \lambda + M_3\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \tag{11а}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \left(2\mu + \lambda + Q_1\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(2\mu + \lambda + Q_2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(2\mu + \lambda + Q_3\right)\frac{u_r}{r^2} + \left(\mu + Q_7\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} +$$
$$+ \left(\mu + Q_4\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \left(\mu + \lambda + Q_8\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi} - \left(3\mu + \lambda + Q_3 + Q_7\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \left(\mu + \lambda + Q_5\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} + Q_6\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{11б}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \left(\mu+\lambda+Q_8\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\varphi} + \left(3\mu+\lambda+T_2+T_4\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \left(\mu+T_1\right)\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \left(\mu+T_2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} +$$

$$+\left(\mu+T_3\right)\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \left(2\mu+\lambda+T_4\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - \left(\mu+T_2\right)\frac{u_\varphi}{r^2} + \left(\mu+\lambda+M_5\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\varphi}. \qquad (11в)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Q_1 = d_1U_{ll} - 2gd_4\,,\quad Q_2 = Q_1 + qd_1\,,$$

$$Q_3 = Q_1 + 4gd_4 - q\left(d_3 - A/4\right),$$

$$Q_4 = d_2U_{ll} - gA/2\,,\quad Q_5 = d_3U_{ll} - 2g(d_2-\lambda)\,,$$

$$Q_6 = q\left(2C - \lambda B/\mu\right)\,,\quad Q_7 = d_5U_{ll} + 2g\mu\,,$$

$$Q_8 = \left(d_2 + d_3 - \lambda\right)U_{ll}\,,$$

$$M_1 = (\mu + d_2)U_{ll} - g\left(2\mu + A/2\right)\,,$$

$$M_2 = M_1 + q(\mu + d_2)\,,\quad M_3 = \left(d_1 - d_4\right)U_{ll}\,,$$

$$M_4 = d_3U_{ll} + g\left(2B - A/2\right) + q\left(d_2 - \lambda\right)\,,$$

$$M_5 = d_3U_{ll} + 2g\left(d_2 - \lambda\right)\,,$$

$$M_6 = \left(\mu + d_2\right)U_{ll} + g\left(2\mu + A/2\right)\,,$$

$$T_1 = d_5U_{ll} - 2g\mu\,,\quad T_2 = T_1 + d_5q\,,$$

$$T_3 = d_2U_{ll} + gA/2\,,\quad T_4 = d_1U_{ll} + 2gd_4\,,$$

$$d_1 = \mu+\lambda+A+4B+2C\,,\quad d_2 = \lambda + A/4 + B\,,$$

$$d_3 = A/4 + 2B + 2C\,,\quad d_4 = \mu + A + 2B\,,$$

$$d_5 = \mu + \lambda + A/2 + B\,.$$

Сравнивая уравнения (11) с известными динамическими уравнениями классической теории упругости (к ним можно перейти, полагая $U_{ll} = 0$, $g = 0$, $q = 0$), отметим следующее. Формальная структура уравнений для u_φ и u_z сохранилась, в них изменились только коэффициенты, а в уравнении для u_r (11б) появился дополнительный член — последнее слагаемое с производной $\partial u_r/\partial z$. Это единственный член с постоянным коэффициентом, все остальные коэффициенты в (11) содержат $U_{ll}(r)$ и являются функциями координаты r.

Краевое условие (5) должно выполняться на свободной боковой поверхности цилиндра $r = R$, где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Учитывая это, получаем

$$P_{rr}(R, t) = P_{r\varphi}(R, t) = P_{rz}(R, t) = 0\,.$$

Используя (10) и то, что $U_{ll}(R) = 2g(1 - 2\nu)$, приходим к равенствам

$$\left\{2\mu+\lambda+4g\left[-\nu A + \left(1-4\nu\right)B + \left(1-2\nu\right)C\right]\right\}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=R} +$$

$$+\left[\lambda + 4g\left(1-2\nu\right)(B+C)\right]\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}\right)_{r=R} + \left\{\lambda + 4g\left[-\nu B + \left(1-2\nu\right)C\right]\right\}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{r=R} = 0\,, \qquad (12а)$$

$$\left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right]_{r=R} = 0\,, \qquad (12б)$$

$$\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right]_{r=R} = 0\,. \qquad (12в)$$

Видно, что параметры КД содержатся только в коэффициентах первого условия (12а), а два последних соотношения имеют такой же вид, как и в идеальной среде.

Решения уравнений (11) $u_i(r, \varphi, z, t)$ можно искать в комплексной форме:

$$u_i = \psi_i(r) \sin m\varphi \exp\left(i(kz - \omega t)\right), \; i = r, z$$
$$u_\varphi = \chi(r) \cos m\varphi \exp\left(i(kz - \omega t)\right), \quad (13)$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

ω — частота колебания; k — постоянная распространения (если k — действительная величина, то она имеет смысл компоненты волнового вектора вдоль оси z). Второе линейно независимое решение уравнений (11) получается, если функции $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ в (13) взаимно поменять местами. Такой выбор функций $u_i(r, \varphi, z, t)$ обеспечивает сокращение тригонометрических множителей после подстановки в уравнения (11) и сводит задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих $\psi_r(r)$, $\psi_z(r)$ и $\chi(r)$. В общем случае волна содержит все три компоненты смещения: u_r, u_z и u_φ.

Для этих волн применима та же классификация, что и для упругих волн в однородных цилиндрах [15]. В соответствии с принятой терминологией каждое значение $m \geq 0$ определяет семейство нормальных волн. Если $m \geq 1$, то ему соответствует семейство изгибных нормальных волн кругового порядка m. Если $m = 0$ и компоненты смещения не зависят от угла, то уравнения (11) расцепляются и имеются два семейства осесимметричных нормальных волн:

1) семейство крутильных нормальных волн, которое определяется лишь одной компонентой вектора смещения u_φ, при этом $\chi(r)$ удовлетворяет уравнению (15) и краевому условию (17), выписанным ниже;

2) семейство продольных нормальных волн, характеризующееся двумя компонентами вектора смещения u_r и u_z, которые удовлетворяют двум уравнениям, получаемым из (11а) и (11б), краевые условия к этим уравнениям задают соотношения (12а) и (12б).

Провести полный анализ рассматриваемой задачи в одной публикации, очевидно, невозможно, поэтому в данной работе мы подробно проанализируем только крутильные нормальные волны. Дальнейшее исследование предполагается продолжить в последующих публикациях.

2.2. Семейство крутильных нормальных волн

Будем рассматривать не зависящие от угла φ решения уравнения (11в), которые, согласно (13), представим в виде

$$u_\varphi(r, z, t) = \chi(r) \exp\left(i(kz - \omega t)\right). \quad (14)$$

Для функции $\chi(r)$ получаем следующее уравнение:

$$\left[1 + \beta_2(r)\right]\chi'' + \left[1 + \beta_1(r)\right]\frac{1}{r}\chi' + \left[\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2\left(1 + \beta_3(r)\right) - \left(1 + \beta_1(r)\right)\frac{1}{r^2}\right]\chi = 0. \quad (15)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по r; $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$;

$$\beta_1(r) = \frac{qd_5}{\mu}\left(\ln\frac{r}{R} + \frac{3}{2}\right) - 2g; \quad (16а)$$

$$\beta_2(r) = \frac{qd_5}{\mu}\left(\ln\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right) - 2g; \quad (16б)$$

$$\beta_3(r) = \frac{qd_2}{\mu}\left(\ln\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right) + \frac{gA}{2\mu}. \quad (16в)$$

Краевое условие для χ вытекает из (12в):

$$R\chi'(R) = \chi(R). \quad (17)$$

Для идеального состояния уравнения (15) и (17) имеют бесконечный набор решений $\chi_n^{(0)}(r)$, каждое из которых описывает крутильные волны соответствующего порядка $n = 0, 1, 2, \ldots$. Крутильные волны низшего порядка являются бездисперсионными:

$$\omega_0^{(0)}(k) = c_{t0}k. \quad (18)$$

Соответствующие волновые состояния описываются функцией

$$\chi_0^{(0)}(r) = D_0 r, \quad (19)$$

где D_0 — постоянная; $c_{t0} = (\mu/\rho_0)^{1/2}$ — скорость поперечного звука в идеальной среде.

Крутильные колебания порядка $n \geq 1$ имеют закон дисперсии

$$\left[\omega_n^{(0)}(k)\right]^2 = c_{t0}^2\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 + c_{t0}^2k^2 \quad (20)$$

и описываются соответственно функциями

$$\chi_n^{(0)}(r) = D_n J_1\left(\gamma_n\frac{r}{R}\right). \quad (21)$$

Здесь γ_n — n-й положительный корень уравнения

$$\gamma J_0(\gamma) = 2J_1(\gamma),$$

$J_i(\gamma)$ — функция Бесселя первого рода порядка i; D_n — константы, определяющие амплитуду колебаний.

При $n \geq 1$ параметр k может принимать как действительные, так и мнимые значения (см. разд 2.5). При действительных k функция (14) описывает волны, распространяющиеся вдоль оси цилиндра 0z, фазовая скорость этих волн обладает существенной дисперсией. Для каждого n частоты колебаний расположены выше своей пороговой частоты $\omega_n^{(0)}(0) \equiv c_{t0}\gamma_n/R$, которая соответствует бесконечно большой длине волны ($k = 0$). В пределе $k \to \infty$ закон дисперсии (20) переходит в (18) и групповая скорость крутильных мод произвольного порядка n асимптотически стремится к универсальному пределу c_{t0}.

2.3. Крутильная мода низшего порядка

В реальных ситуациях эффективная мощность КД $\varepsilon = \Omega/(2\pi)$ является малым параметром: например, для типичных частичных дисклинаций в ГЦК структурах энергетически выгодно образование частичных КД с углом $\Omega = 7°20'$ [10], что соответствует значениям $\varepsilon \approx 0{,}02$. Вследствие этого целесообразно исследовать случай, когда значения функций (16) малы по сравнению с единицей.

Рассмотрим условия выполнения следующих неравенств:

$$\left|\beta_1(r)\right| \ll 1\,, \quad \left|\beta_2(r)\right| \ll 1\,, \quad \left|\beta_3(r)\right| \ll 1\,. \qquad (22)$$

Если для численных оценок взять известные величины упругих модулей (таблица) и рассматривать имеющие смысл в физических задачах значения $R \sim 10$–$10^3 a$ (a — межатомное расстояние), то для $\Omega \lesssim 10°$ условия (22) выполняются почти во всей области поперечного сечения и нарушаются вследствие нефизической логарифмической особенности лишь в области ядра дисклинации $r \leq a$, где континуальное описание неприменимо. Для инженерных конструкций с внутренней полостью всегда можно подобрать такое отношение R/r_0, что условия (22) будут выполняться во всем интервале $r_0 \leq r \leq R$: оценки величины R/r_0 дают 10–10^3. Таким образом, если $a \ll R \lesssim 10^3 a$, то в области $a < r \leq R$ можно использовать метод прямого разложения по малому параметру.

Таблица

Упругие модули второго и третьего порядка и коэффициент Пуассона некоторых материалов.

Материал	μ, 10^{10} н/м^2	ν	λ/μ	A/μ	B/μ	C/μ
Сталь	8,21	0,287	1,35	−8,75	−3,43	−2,18
Ø53S	2,6	0,345	2,23	−9,23	−3,8	−4,79
Д54S	2,6	0,327	1,89	−12,3	−7,61	−7,29
Бронза	4,17	0,365	2,72	−4,8	−4	−5,88
Cu	4,77	0,346	2,24	−33,37	3,73	−5,87
Mg	1,66	0,305	1,56	−10,14	−3,46	−1,97
Fe	8,2	0,286	1,34	−13,66	−5,86	1,59
Mo	12,4	0,295	1,44	−7,32	−3,27	0,78
W	13,7	0,272	1,19	−7,8	−1,88	−1,57

Примечание: Данные при составлении таблицы взяты из монографии [13].

Формально будем искать решение задачи (15), (17) в виде рядов

$$\chi_0(r) = \chi_0^{(0)}(r) + \chi_0^{(1)}(r) + \chi_0^{(2)}(r) + \ldots\,, \qquad (23)$$

$$\left[\omega_0(k)/c_t\right]^2 = k^2 + \kappa_0^{(1)} + \kappa_0^{(2)} + \ldots \qquad (24)$$

Напомним, что, согласно (8), c_t также является функцией ε. Верхний индекс в скобках обозначает порядок малости соотвествующего члена: величины $\chi_0^{(1)}$, $\kappa_0^{(1)}$ того же порядка малости, что и параметр ε, величины $\chi_0^{(2)}$, $\kappa_0^{(2)}$ второго порядка малости и т.д.

Подставляя (23), (24) в (15) и собирая слагаемые одного порядка малости, получаем цепочку линейных дифференциальных уравнений. Вследствие линейности задачи краевому условию (17) должна удовлетворять каждая из функций $\chi_0^{(j)}(r)$. В нулевом приближении находим

$$\hat{L}\chi_0^{(0)}(r) \equiv (\chi_0^{(0)})'' + \frac{1}{r}(\chi_0^{(0)})' - \frac{1}{r^2}\chi_0^{(0)} = 0\,, \qquad (25)$$

а для $\chi_0^{(j)}$ произвольного порядка ($j \geq 1$) имеем следующее уравнение:

$$\hat{L}\chi_0^{(j)}(r) = -\beta_2(\chi_0^{(j-1)})'' - \frac{1}{r}\beta_1(\chi_0^{(j-1)})' + \frac{1}{r^2}\beta_1\chi_0^{(j-1)} + \\ + k^2\beta_3\chi_0^{(j-1)} - \kappa_0^{(1)}\chi_0^{(j-1)} - \kappa_0^{(2)}\chi_0^{(j-2)} - \ldots - \kappa_0^{(j)}\chi_0^{(0)}. \qquad (26)$$

Решением уравнения (25), не имеющим особенности при $r = 0$, является функция (19). С учетом этого получаем уравнение первого приближения:

$$\hat{L}\chi_0^{(1)}(r) = D_0 k^2 r\beta_3(r) - D_0\kappa_0^{(1)} r\,.$$

Достаточно найти частное решение этого уравнения, ограниченное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию (17). Опуская подробности вычислений, приведем конечные выражения для поправок первого приближения:

$$\chi_0^{(1)} = \frac{1}{8} D_0 w r^3 \left(\ln \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right), \quad w = \frac{q d_2 k^2}{\mu}, \qquad (27а)$$

$$\kappa_0^{(1)} = \frac{q}{\mu}\left[\lambda + \frac{(3-2\nu)}{(1-2\nu)} A + B\right] k^2 . \qquad (27б)$$

Уравнение второго приближения, согласно (26), записывается в виде

$$\hat{L}\chi_0^{(2)}(r) = -\beta_2 (\chi_0^{(1)})'' - \frac{1}{r}\beta_1 (\chi_0^{(1)})' + \beta_1 \frac{1}{r^2}\chi_0^{(1)} +$$

$$+ k^2 \beta_3 \chi_0^{(1)} - \kappa_0^{(1)} \chi_0^{(1)} - \kappa_0^{(2)} \chi_0^{(0)} .$$

Мы не будем выписывать частное решение этого уравнения из-за его громоздкости, а приведем только поправку второго приближения к закону дисперсии:

$$\kappa_0^{(2)} = -\frac{w^2 R^2}{432} . \qquad (28)$$

Отметим, что эта поправка всегда отрицательна и не зависит от знака КД. Таким образом, в этом приближении появляется дисперсия наинизшей крутильной моды и зависимость частоты от радиуса цилиндра.

Учитывая (8), (24), (27) и (28), получаем с квадратичной точностью разложение закона дисперсии по степеням параметра ε:

$$\omega_0^2(k) = c_{t0}^2 k^2 \left\{1 + \varepsilon\Gamma + \varepsilon^2\left[\Gamma - \frac{1}{108}\left(\frac{d_2 kR}{2\mu + \lambda}\right)^2\right]\right\},$$

$$\Gamma = 1 + \frac{(1-2\nu)}{\mu(1-\nu)}\left[\lambda + \frac{(3-2\nu)}{(1-2\nu)} A + B\right] . \qquad (29)$$

Поскольку зависимость от R содержится в слагаемом второго порядка малости, в квадратичном по ε приближении закон дисперсии наинизшей крутильной моды одинаков для цилиндров равных размеров и равной массы. Отличие появится в слагаемых третьего по ε порядка. Из (29) следует, что смягчение наинизшей крутильной моды может быть вызвано как ПКД, так и ОКД.

Обсудим подробнее линейное по ε приближение. В этом приближении мода остается бездисперсионной, а дисклинации приводят лишь к перенормировке групповой скорости. Уменьшение скорости волны означает смягчение моды, а увеличение — ее ужестчение. В случае ПКД мода смягчается, если выполнено неравенство

$$A(3-2\nu) + B(1-2\nu) < -(1+\nu)\mu . \qquad (30)$$

Для справедливости (30) необходимо, чтобы хотя бы один из модулей A или B был отрицательным. Для известных нам данных, приведенных в таблице, условие (30) выполняется. В случае ОКД мода ужестчается, если выполнено (30) и смягчается при противоположном неравенстве.

Относительно квадратичного слагаемого в (29) заметим, что для значений упругих модулей, приведенных в таблице, и при выполнении условия $kR \lesssim 1$ его знак совпадает со знаком линейной поправки, т.е. определяется неравенством (30). Подчеркнем, что нелинейная зависимость частоты колебаний от мощности дисклинации (29) найдена на основе тензора статической деформации, который получен в рамках линейной теории упругости и пропорционален ε. Поправки второго и более высоких порядков могут в принципе уточняться в рамках более точной теории. Например, учет поправок высших порядков по ε к компонентам U_{ik} даст дополнительные нелинейные по ε вклады в закон дисперсии, обусловленные двумя причинами: перенормировкой эффективных упругих модулей и нелинейными поправками к средней плотности среды.

2.4. Крутильные моды высших порядков

Как и в предыдущем разделе, будем предполагать, что выполнены условия (22). Представим закон дисперсии крутильной моды n-го порядка в виде ряда

$$\left[\omega_n(k)/c_t\right]^2 = \left[\omega_n^{(0)}(k)/c_{t0}\right]^2 + \kappa_n^{(1)} + \kappa_n^{(2)} + \ldots \qquad (31)$$

и будем искать решение задачи (15), (17) в аналогичной (23) форме

$$\chi_n(r) = \chi_n^{(0)}(r) + \chi_n^{(1)}(r) + \chi_n^{(2)}(r) + \ldots . \qquad (32)$$

Подставляя (31), (32) в (15) и собирая слагаемые одного порядка малости, получаем цепочку линейных дифференциальных уравнений. В силу линейности задачи каждая из функций $\chi_n^{(j)}(r)$ должна удовлетворять краевому условию (17). В нулевом приближении находим

$$\hat{L}\chi_n^{(0)}(r) + \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 \chi_n^{(0)}(r) = 0 , \qquad (33)$$

а для $\chi_n^{(j)}$ произвольного порядка ($j \geq 1$) получаем следующее уравнение:

$$\hat{L}\chi_n^{(j)} + \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 \chi_n^{(j)} = -\beta_2(\chi_n^{(j-1)})'' - \frac{1}{r}\beta_1(\chi_n^{(j-1)})' +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\beta_1\chi_n^{(j-1)} + k^2\beta_3\chi_n^{(j-1)} - \kappa_n^{(1)}\chi_n^{(j-1)} - \kappa_n^{(2)}\chi_n^{(j-2)} - \ldots - \kappa_n^{(j)}\chi_n^{(0)}. \qquad (34)$$

Решением уравнения (33), не имеющим особенности при $r = 0$, является функция (21). Согласно (34), уравнение первого приближения имеет вид

$$\hat{L}\chi_n^{(1)} + \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 \chi_n^{(1)} = -\beta_2(\chi_n^{(0)})'' - \frac{1}{r}\beta_1(\chi_n^{(0)})' + \frac{1}{r^2}\beta_1\chi_n^{(0)} + k^2\beta_3\chi_n^{(0)} - \kappa_n^{(1)}\chi_n^{(0)}.$$

Достаточно найти частное решение этого уравнения, ограниченное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию (17). Опуская подробности вычислений, приведем конечные выражения для поправок первого приближения:

$$\chi_n^{(1)}(r) = D_n\left\{f_n\left[\frac{1}{\xi_n}J_0(\xi_n) + \frac{\pi}{2}N_1(\xi_n) + \xi_n J_0(\xi_n)\right] - \left(f_n - \frac{1}{2}p\right)\xi_n J_0(\xi_n)\ln\frac{r}{R} +\right.$$

$$\left. + \left(f_n - p\right)J_1(\xi_n)\ln\frac{r}{R} + \left[\left(\frac{R}{\gamma_n}\right)^2\left(\kappa_n^{(1)} - h\right) - s\right]\frac{\xi_n}{2}J_0(\xi_n)\right\}, \qquad (35)$$

где $N_i(\xi)$ — функция Неймана порядка i;

$$p = \frac{qd_5}{\mu}; \quad s = \frac{qd_6}{\mu}; \quad h = \frac{qd_7}{\mu}k^2;$$

$$d_6 = \mu + \lambda + \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}B; \quad d_7 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{(1-\nu)}{4(1-2\nu)}A + \frac{1}{2}B; \quad f_n = p + \frac{1}{2}w\left(\frac{R}{\gamma_n}\right)^2; \quad \xi_n = \gamma_n\frac{r}{R}.$$

Поправка к закону дисперсии имеет вид

$$\kappa_n^{(1)} = \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\left[s - 2pF(\gamma_n)\right] + h - wF(\gamma_n), \qquad (36)$$

где обозначено

$$F(\gamma) = \frac{2}{\gamma^2 J_1(\gamma)}\left[\frac{1}{\gamma}J_0(\gamma) + \frac{\pi}{2}N_1(\gamma) - \frac{\pi}{4}\gamma N_0(\gamma) + \left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\right)J_1(\gamma)\right].$$

Поправки более высоких порядков мы здесь рассматривать не будем. С помощью (31) и (36) получаем следующее выражение для закона дисперсии в линейном по ε приближении:

$$\omega_n^2(k) = \omega_n^2(0) + v_n^2k^2, \qquad (37а)$$

$$\omega_n(0) = \omega_n^{(0)}(0)\left\{1 + \varepsilon\left[1 + \frac{2}{2\mu + \lambda}\left[d_6 - 2d_5F(\gamma_n)\right]\right]\right\}^{1/2},$$

$$v_n = c_{t0}\left\{1 + \varepsilon\left[1 + \frac{2}{2\mu + \lambda}\left[d_7 - d_2F(\gamma_n)\right]\right]\right\}^{1/2}. \qquad (37б)$$

Поскольку зависимость от R имеется уже в идеальном законе дисперсии (20), в линейном по ε приближении закон дисперсии крутильных мод высшего порядка будет отличаться для цилиндров равных размеров и равной массы. Ниже мы будем рассматривать случай цилиндров равных размеров. Из (37) видно, что КД приводит к двум эффектам: а) изменяется пороговая частота $\omega_n(0)$, б) изменя-

ется коэффициент при k^2, т.е. изменяется формальная асимптотика групповой скорости

$$v_n \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{\partial\omega_n(k)}{\partial k}.$$

Обсудим вначале изменение $\omega_n(0)$. Пороговая частота может уменьшиться как при ПКД, так и при ОКД. Если выполнено неравенство

$$(1-2\nu)\left(\frac{1}{2}A+B\right) > -\mu\left[1-\frac{(1-2\nu)}{4F(\gamma_n)-3}\right], \quad (38)$$

то в случае ПКД пороговая частота уменьшается, а в случае ОКД увеличивается. Анализ неравенства (38) показывает следующее. Если $\nu = 1/2$, то для ПКД $\omega_n(0) < \omega_n^{(0)}(0)$, а для ОКД $\omega_n(0) > \omega_n^{(0)}(0)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ Если $\nu \neq 1/2$, то на плоскости (AB) существует бесконечная упорядоченная последовательность параллельных прямых, задаваемая соотношением

$$B_n = -\frac{1}{2}A - \mu\left[\frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{4F(\gamma_n)-3}\right].$$

Прямая с бо́льшим номером расположена ниже прямой с меньшим номером. Каждая прямая B_n есть геометрическое место точек, для которых соответствующая пороговая частота не изменяется ($\omega_n(0) = \omega_n^{(0)}(0)$). Указанная последовательность начинается с прямой

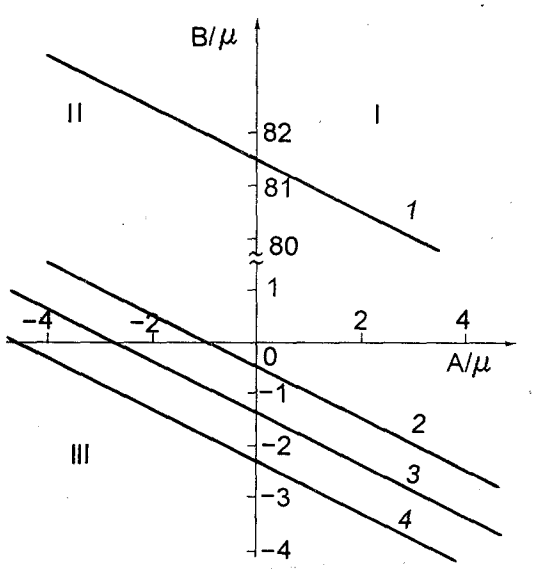

Рис. 2. Области на плоскости (AB), в которых изменения пороговых частот аксиально-симметричных крутильных мод имеют разные знаки (для случая $\nu = 0{,}35$): прямая B_1, определяемая формулой (39) (*1*); прямые B_2 и B_3 (*2* и *3* соответственно); прямая B_∞, определяемая формулой (40) (*4*).

$$B_1 = -\frac{1}{2}A - \mu\left[\frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{4F(\gamma_1)-3}\right] \quad (39)$$

и с ростом n сгущается к нижней границе, которая задается прямой

$$B_\infty = -\frac{1}{2}A - \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}. \quad (40)$$

Прямые B_1 и B_∞ разбивают плоскость (AB) на три различные области (рис. 2). Область I расположена выше прямой B_1, область III — ниже прямой B_∞, область II между — B_1 и B_∞.

В случае ПКД закономерности следующие. Область I: $\omega_n(0) < \omega_n^{(0)}(0)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Область II: если точка находится между прямыми B_j и B_{j+1} ($j \geq 1$), то для конечного числа мод с $n = 1, 2, \ldots j$ справедливо неравенство $\omega_n(0) > \omega_n^{(0)}(0)$, а для бесконечного числа мод с номерами $n \geq j+1$ — обратное неравенство. В открытой области III при всех n выполняется неравенство $\omega_n(0) > \omega_n^{(0)}(0)$.

В случае ОКД знаки неравенств меняются на противоположные. Так, в области II неравенство $\omega_n(0) < \omega_n^{(0)}(0)$ выполняется для конечного числа мод с $n = 1, 2, \ldots j$, ($j \geq 1$), а неравенство $\omega_n(0) > \omega_n^{(0)}(0)$ — для бесконечного числа мод с номерами $n \geq j+1$.

Обсудим теперь изменение асимптотики групповой скорости. Величина v_n может уменьшиться как в случае ПКД, так и в случае ОКД. Если выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}A\left[1-F(\gamma_n)+\frac{\nu}{1-2\nu}\right] - B\left[2F(\gamma_n)-1\right] < -\frac{2[1-2\nu F(\gamma_n)]}{1-2\nu}\mu, \quad (41)$$

то в случае ПКД $v_n < c_{t0}$, а в случае ОКД $v_n > c_{t0}$. Анализ неравенства (41) показывает следующее. Плоскость (AB) разбивается на четыре сектора (рис. 3) пересекающимися прямыми

$$B = \frac{A}{2[2F(\gamma_1)-1]}\left[1-F(\gamma_1)+\frac{\nu}{1-2\nu}\right] + \mu\frac{2[1-2\nu F(\gamma_1)]}{(1-2\nu)[2F(\gamma_1)-1]}, \quad (42)$$

$$B = \frac{\nu}{2(1-2\nu)}A + 2\mu. \quad (43)$$

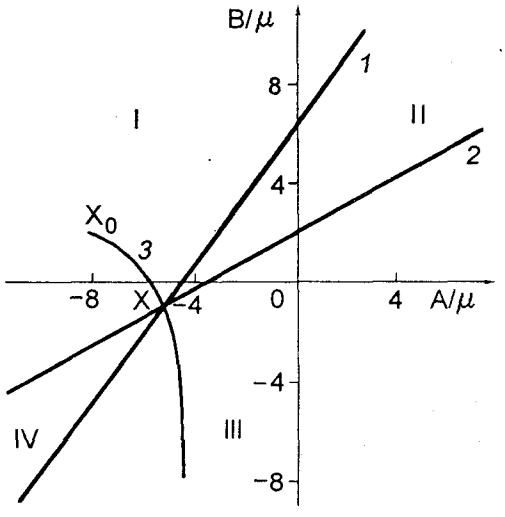

Рис. 3. Области на плоскости (AB), в которых изменения асимптотической величины групповой скорости аксиально-симметричных крутильных мод имеют разные знаки (для случая $\nu = 0{,}35$): прямая, определяемая формулой (42) (*1*); прямая, определяемая формулой (43) (*2*); кривая, по которой перемещается точка пересечения прямых *1* и *2* (точка X) при изменении величины коэффициента Пуассона (*3*), X_0 — предельное положение точки X при $\nu = 0$.

Точка их пересечения (точка X) имеет координаты

$$A = -8\mu(1 - \nu), \quad B = \mu \frac{2(1 - 4\nu + 2\nu^2)}{1 - 2\nu}.$$

При $\nu = 0$ предельное положение точки X задается точкой X_0 с координатами $(-8\mu, 2\mu)$, а при увеличении ν точка X непрерывно смещается к противоположному концу кривой *3*. Наклон прямых (42), (43) при этом увеличивается. Заметим, что прямая (43) при любой величине ν всегда проходит через точку $A = 0$, $B = 2\mu$. На рис. 3 для иллюстрации показан случай $\nu = 0{,}35$.

Для ПКД закономерности следующие. В открытой области I при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $v_n < c_{t0}$. В открытой области III при всех n выполняется неравенство $v_n > c_{t0}$. В областях II и IV (включая границы) проходит пучок прямых, пронумерованных параметром n, которые пересекаются в точке X. Каждая прямая есть геометрическое место точек, для которых выполняется равенство $v_n = c_{t0}$. Если точка расположена в области II между прямыми с номерами j и $j + 1$ ($j \geq 1$), то для конечного числа мод с номерами $n = 1, 2, \ldots j$, справедливо неравенство $v_n > c_{t0}$, а для бесконечного числа мод с номерами $n \geq j + 1$ — обратное неравенство. Если точка расположена в области IV между прямыми с номерами j и $j + 1$ ($j \geq 1$), то для конечного числа мод с номерами $n = 1, 2, \ldots j$, имеет место неравенство $v_n < c_{t0}$, а для бесконечного числа мод с номерами $n \geq j + 1$ — обратное неравенство.

В случае ОКД знаки неравенств меняются на противоположные.

Результаты проведенного исследования показывают, что вопрос о смягчении крутильной колебательной моды произвольного порядка $n \geq 1$ с заданным k требует специального изучения. Можно только утверждать, что при $k \to 0$ основным эффектом является изменение пороговой частоты.

2.5 Колебательные состояния, локализованные вблизи торцов усеченного цилиндра

В соотношениях (14), (20) при $n \geq 1$ постоянная распространения может принимать не только действительные, но и чисто мнимые значения $k = i\delta$. В этом случае частоты колебаний и соответствующие волновые состояния в отсутствие дисклинации определяются функциями

$$\left[\omega_n^{(0)}(\delta)\right]^2 = \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 c_{t0}^2 - c_{t0}^2\delta^2, \qquad (44)$$

$$u_\varphi^{(0)}(r, z, t) = \chi_n^{(0)}(r) \exp\left(-i\omega t - \delta z\right). \qquad (45)$$

При каждом заданном n частоты данных колебаний заполняют интервал от пороговой частоты $\omega_n^{(0)}(0)$ до нуля, а значения величины постоянной затухания δ ограничены условием $0 \leq \delta \leq \gamma_n/R$. Такие решения не реализуются в бесконечно протяженном цилиндре, так как они не удовлетворяют естественным условиям конечности смещений на всей длине цилиндра. Колебательные состояния (45) необходимы для построения точных решений краевых задач для усеченных цилиндров, включающих граничные условия на торцевых поверхностях. Если начало отсчета для координаты z выбрать на торцевой поверхности цилиндра и положительные значения z отсчитывать в глубь цилиндра, то решение (45) будет описывать локализованное на торце колебательное состояние, а обратная величина постоянной затухания будет определять характерную длину локализации.

В присутствии дисклинации характеристики локализованных колебательных состояний можно получить с помощью результатов, полученных в предыдущем разделе. Линейная по ε поправка $\chi_n^{(1)}$ к волновому состоянию (45) определяется формулой (35), где параметры w и h следует заменить на

$$\tilde{w} = -\frac{qd_2}{\mu}\delta^2, \quad \tilde{h} = -\frac{qd_7}{\mu}\delta^2.$$

Частоты локализованных состояний описываются соотношением

$$\left[\omega_n(\delta)\right]^2 = \left[\omega_n(0)\right]^2 - v_n^2\delta^2 . \qquad (46)$$

Здесь параметры $\omega_n(0)$ и v_n определяются формулой (37б). Влияние КД на эти параметры мы подробно проанализировали в разд. 2.4. В формуле (46) постоянная затухания δ при заданном n может принимать значения из интервала $[0, \omega_n(0)/v_n]$. Таким образом, в случае локалилизованных мод КД изменяет также верхнюю границу области допустимых значений для величины постоянной затухания.

Для локализованных состояний основной интерес представляет зависимость постоянной затухания от частоты колебаний $\delta(\omega)$. В однородной среде, согласно (44), имеем

$$\delta_n^{(0)}(\omega) = \left[\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c_{t0}^2}\right]^{1/2} .$$

Изменение постоянной затухания, обусловленное дисклинацией, $\Delta_n(\omega) \equiv \delta_n(\omega) - \delta_n^{(0)}(\omega)$ можно получить с помощью (46):

$$\Delta_n(\omega) = \left[\left(\frac{\omega_n(0)}{v_n}\right)^2 - \frac{\omega^2}{v_n^2}\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c_{t0}^2}\right]^{1/2} .$$

Наиболее сильное изменение постоянной затухания происходит, когда частота ω близка к соответствующей пороговой частоте $\omega_n^{(0)}(0)$. В этом случае величина $|\Delta_n(\omega)|$ может быть сравнима с величиной $\delta_n^{(0)}(\omega)$ и даже превосходить ее. Отметим, что вызываемое дисклинацией изменение пороговых частот должно также приводить к преобразованию одного типа колебаний в другой: при уменьшении пороговой частоты часть локализованных мод превращается в волновые колебательные состояния; при увеличении пороговой частоты часть волновых колебательных состояний трансформируется в локализованные моды. Если частота ω достаточно далека от $\omega_n^{(0)}(0)$, то выражение для $\Delta_n(\omega)$ в линейном по ε приближении можно получить с помощью формул (37б):

$$\Delta_n(\omega) = \frac{1}{2}\varepsilon\delta_n^{(0)}(\omega)\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega R}{\gamma_n c_{t0}}\right)^2\right]^{-1}\left[1 + \frac{2}{2\mu+\lambda}\left[d_6 - 2d_5F(\gamma_n)\right]\right] - 1 - \frac{2}{2\mu+\lambda}\left[d_7 - d_2F(\gamma_n)\right]\right\} . \qquad (47)$$

Проанализируем это выражение для случая предельно низких частот $\omega \to 0$ и выясним, каким образом КД влияет на максимально допустимые величины постоянных затухания. Полагая в (47) $\omega = 0$, получаем

$$\Delta_n(0) = \varepsilon\frac{\gamma_n}{R(2\mu+\lambda)}\left[d_6 - d_7 - \left(2d_5 - d_2\right)F(\gamma_n)\right] . \qquad (48)$$

Эта величина может иметь любой знак как в случае ПКД, так и в случае ОКД. Если выполнено неравенство

$$-\frac{1}{4}\left\{1 - \frac{3(1-2\nu)}{(1-\nu)}\left[1 - F(\gamma_n)\right]\right\}A + \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\left[1 - F(\gamma_n)\right]B > \mu\left[2F(\gamma_n) - 1\right] , \qquad (49)$$

то для ПКД $\Delta_n(0) > 0$, а для ОКД $\Delta_n(0) < 0$. Анализ неравенства (49) показывает следующее. На плоскости (AB) проходит пучок прямых, пронумерованных параметром n, которые пересекаются в одной точке с координатами

$$A = -4\mu , \quad B = \frac{(1-4\nu)}{(1-2\nu)}\mu .$$

Каждая прямая $\widetilde{B}_n$ есть геометрическое место точек, для которых соответствующая величина $\Delta_n(0) = 0$ (т.е. постоянная затухания не изменяется). Между прямыми $\widetilde{B}_1$ и $\widetilde{B}_\infty$ расположена область, где часть величин $\Delta_n(0)$ положительна, а часть отрицательна. Существенно, что имеются две области, где все величины $\Delta_n(0)$ имеют одинаковые знаки. В области $A < -4\mu$, $B > \widetilde{B}_1$ в случае ПКД все $\Delta_n(0) > 0$, а для ОКД все $\Delta_n(0) < 0$. В области $A > -4\mu$, $B < \widetilde{B}_1$ знаки неравенств обратные: в случае ПКД все $\Delta_n(0) < 0$, а в случае ОКД все $\Delta_n(0) > 0$.

В заключение отметим, что проанализированные в разд. 2.2–2.5 решения динамических уравнений составляют полный набор аксиально-сим-

метричных крутильных мод в цилиндре: каждому заданному значению частоты $\omega \geq 0$ соответствует конечное число волновых состояний, отвечающих действительным значениям постоянной распространения, и бесконечное число локализованных колебаний, отвечающих мнимым значениям постоянной распространения.

Основные результаты и выводы

1. Известный в механике упругого континуума метод описания волн малой амплитуды в неоднородно деформированной среде обобщен на случай упруго изотропной среды с дисклинациями Вольтерра, для которых дисторсия является неоднозначной функцией пространственных координат.

2. На основе закона состояния Мурнагана найдены выражения для плотности упругой энергии, тензора Пиола—Кирхгофа и получены динамические уравнения, описывающие малые колебания среды, деформированной упругими полями дисклинаций. Последовательно учтены две причины влияния дисклинации на колебательный спектр — изменение средней плотности тела и нелинейные упругие эффекты, проявляющиеся в перенормировке эффективных упругих модулей.

3. Изучена конкретная задача о нормальных колебаниях протяженного цилиндра, содержащего клиновую дисклинацию, линия которой расположена на оси цилиндра. Подробно исследовано влияние дисклинации на семейство осесимметричных крутильных колебательных мод цилиндра. Развита теория возмущений по малому параметру — безразмерной мощности дисклинации, в рамках которой найдены аналитические выражения для дисклинационных поправок к закону дисперсии и колебательным состояниям.

4. Показано, что дисклинация приводит к появлению дисперсии у низшей крутильной моды, бездисперсионной в однородном кристалле, при этом соответствующая поправка к закону дисперсии всегда отрицательна и не зависит от знака дисклинации. Влияние дисклинации на крутильные моды высших порядков сводится к изменениям пороговой частоты и асимптотического значения групповой скорости, при этом возможно как уменьшение, так и увеличение вышеназванных параметров: конечный эффект зависит от знака дисклинации, а также от соотношения между величинами упругих модулей второго и третьего порядков.

5. Исследованы решения, соответствующие мнимым величинам постоянной распространения, которые описывают колебания, локализованные на торцах усеченного цилиндра. Показано, что в зависимости от соотношения между параметрами среды дисклинация может вызывать как уменьшение, так и увеличение глубины затухания таких колебаний.

Работа финансировалась Государственным комитетом Украины по вопросам науки, техники и промышленной политики, проект 4.2/88 «Струм».

1. I. M. Lifshitz and A.M. Kosevich, *Rep. Progr. Phys.* **29**, 217 (1966).
2. A. A. Maradudin, *Fundamental Aspects of Dislocation Theory, Nat. Bur.Stand. (U.S.), Spec. Publ.* **317**, 205 (1970).
3. И. М. Дубровский, А. С. Ковалев, *ФНТ* **2**, 1483 (1976).
4. А. М. Косевич, *ФНТ* **4**, 902, (1978).
5. В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов, *УФЖ* **34**, 1741 (1989).
6. В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов, *ФНТ* **14**, 172 (1988).
7. В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов, *ФНТ* **18**, 185 (1992).
8. В. А. Лихачев, Р. Ю. Хайров, *Введение в теорию дисклинаций*, Изд-во Ленинградского университета, Ленинград (1975).
9. Р. Де Вит, *Континуальная теория дисклинаций*, Мир, Москва (1977).
10. В. И. Владимиров, А. Е. Романов, *Дисклинации в кристаллах*, Наука, Ленинград (1986).
11. И. А. Овидько, *Дефекты в конденсированных средах*, Наука, Ленинград (1991).
12. Л. Н. Лариков, *Металлофизика* **14**, 3 (1992).
13. А. И. Лурье, *Нелинейная теория упругости*, Наука, Москва (1980).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
15. *Физическая акустика*, У. Мезон (ред.), Мир, Москва (1966), том. 1, часть А.
16. А. И. Лурье, *Теория упругости*, Наука, Москва (1970).

Elastic vibrations of solids containing disclinations

V. D. Natsik and S. N. Smirnov

The method commonly used in elastic continuum mechanics to describe low-amplitude waves in non-uniformly strained medium is generalized to an elastic isotropic medium containing Volterra disclinations for which distortion is a non-unique function of the spatial coordinates. The Murnagan law of state is used to find the equation of elastic energy density and obtain dynamic equations describing small vibrations of the medium strained with elastic disclination fields. The particular problem of normal vibrations of an extended cylinder with a wedge disclination whose line is along the cylinder axis is studied. The disclination effect on the family of axis-symmetrical torsional oscillation modes of the cylinder is studied thoroughly. A theory of small-parameter (dimensionless disclination strength) perturbation has been developed and used to find analytical expressions for the law of dispersion and oscillatory states.