НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ВЫРОЖДЕННЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И СОПРЯЖЕННЫЕ К НИМ

С.М. Чуйко, Е.В. Чуйко

Славян. пед. ин-т,
Украина, 343206, Донецкая обл., Славянск
e-mail: office@sldpi.donetsk.ua

The existence conditions, dual system and generalized Green operator are obtained to construct the solutions of linear systems of ordinary differential equations with singular impulse action. This problem has some characteristic features by which it differs fundamentally from a similar problem with nonsingularly impulsively perturbed differential system. Above all it is the fact that not all solutions can be continued from left to right length of interval on which solutions of linear systems with singular impulse action exists.

Побудована система, спряжена до лінійної однорідної системи з виродженим імпульсним впливом. Знайдено умови існування та побудови оператора Гріна цієї задачі.

1. Однородная система с вырожденным импульсным воздействием. Исследуем задачу о нахождении решений $z(\cdot) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ однородной системы [1 – 5]

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z, \qquad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

с вырожденным ($\operatorname{rank}(I_n + S_i) \leq n$) импульсным воздействием

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0), \qquad i = 1, ..., p. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, элементы которой — непрерывные на отрезке $[0,T]$ функции, S_i — постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы, I_n — единичная $(n \times n)$-мерная матрица.

Как известно [4, 5], система (1), (2) имеет решение $z(t,c) = X(t)c$, где $X(t)$ — нормальная ($X(0) = I_n$ фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0, \tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_0(t)Y_p, & t \in [\tau_p, T], \end{cases} \tag{3}$$

системы (1), (2), $Y_1 = X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_1), ..., Y_p = X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_0(\tau_p)Y_{p-1}$ — $(n \times n)$-мерные матрицы, $X_0(t)$ — нормальная ($X_0(0) = I_n$) фундаментальная матрица системы (1).

В отличие от систем вида (1), (2) с невырожденным импульсным воздействием [1], в случае вырождения хотя бы одной из матриц $I_n + S_i$, $i = 1, ..., p$, количество линейно независимых решений меньше n и при условии $I_n + S_i = 0$, либо в случае нескольких вырожденных импульсных воздействий размерность решений на некотором промежутке $[\tau,\tau_{i+1}[\subset [0,T]$ может быть нулевой. Поскольку количество линейно независимых решений системы (1), (2) вдоль отрезка $[0,T]$ не возрастает, на отрезке $[\tau_{i+1},T]$ решение окажется тривиальным. В этом случае решение неоднородной системы с вырожденным импульсным воздействием и условия его существования можно найти методом, предложенным в [4]. В данной же работе предположим, что $\rho = \operatorname{rank} Y_p > 0$ и зададимся целью построить частное решение системы (1), (2), размерность которого на всем промежутке $[0,T]$ была бы равна ρ. Обозначим через $X_\rho^{(p)}$ $(\rho\times n)$-мерную матрицу, составленную из ρ линейно независимых столбцов матрицы $X_0(t)Y_p$, и из условия (2) найдем $(\rho\times n)$-мерную матрицу полного ранга

$$X_\rho^{(p-1)}(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)^+ X_\rho^{(p)}(\tau_p),$$

составленную из решений системы (1), (2) на промежутке $[\tau_{p-1},\tau_p[$.

Продолжая рассуждения, на промежутке $[0,\tau_1[$ находим $(n\times\rho)$-мерную матрицу, составленную из ρ линейно независимых решений системы (1), (2):

$$X_\rho^{(0)}(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)^+ X_\rho^{(1)}(\tau_1);$$

здесь $(I_n + S_1)^+$ — $(n\times n)$-мерная марица, псевдообратная к матрице $(I_n + S_1)$ по Муру – Пенроузу [3].

Лемма 1. *При условии $\rho > 0$ (1), (2) с вырожденным импульсным воздействием имеет частное решение*

$$z(t,c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho, \qquad c_\rho \in R^\rho, \tag{4}$$

с $(n\times\rho)$-мерной матрицей полного ранга

$$X_\rho(t) = \begin{cases} X_\rho^{(0)} = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1(I_n + S_1)^+ X_\rho^{(1)}(\tau_1), & t\in[0,\tau_1[,\\ X_\rho^{(1)} = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_2(I_n + S_1)^+ X_\rho^{(2)}(\tau_2), & t\in[\tau_1,\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_\rho^{(p)}(t), & t\in[\tau_p,T]. \end{cases} \tag{5}$$

В случае невырожденности импульсного воздействия (2) решение (4) обращается в решение системы (1), (2) вида [1].

2. Система, сопряженная к линейной однородной системе с вырожденным импульсным воздействием. Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y, \qquad t\in[0,T], \quad t\neq\tau_1\in[0,T], \tag{6}$$

с вырожденным импульсным воздействием

$$\Delta y(\tau_i) = -(I_n + S_i^*)^+ S_i^* y\,(\tau_i - 0). \tag{7}$$

Как и в предыдущем пункте, для системы (6), (7) может быть построено частное решение

$$y\,(t,c_\rho) = H_\rho(t)c_\rho\,, \qquad c_\rho\in R^\rho\,,$$

где $H_\rho(t)$ — $(n\times\rho)$-мерная матрица полного ранга, составленная из решений системы (6), (7). Пусть $P_{(I_n+S_i)}$ — $(n\times n)$-мерная матрица-ортопроектор $R^n\to N(I_n+S_i)$ [3].

Лемма 2. *Матрицы $X_\rho(t)$ и $H_\rho(t)$ решений систем (1), (2) и (6), (7) при условии*

$$X_\rho^*(\tau_i-0)\,P_{(I_n+S_i)}S_i^*=0 \tag{8}$$

удовлетворяют соотношению $X_\rho^*(t)H_\rho(t)=C$, где C — постоянная $(\rho\times\rho)$-мерная матрица.

Поскольку производная произведения $X_\rho^*(t)H_\rho(t)$ равна нулю на каждом из промежутков $[\tau_i,\ \tau_{i+1}[$, то $X_\rho^*(t)H_\rho(t)=C_i$, где C_i — постоянные $(\rho\times\rho)$-мерные матрицы. Покажем, что эти матрицы — суть одна $(\rho\times\rho)$-мерная матрица C. Для этого найдем скачок матрицы $X_\rho^*(t)H_\rho(t)$ при переходе через произвольную точку τ_i, $i=1,\ldots,p$:

$$\begin{aligned}&X_\rho^*(\tau_i+0)\,H_\rho(\tau_i+0)-X_\rho^*(\tau_i-0)\,H_\rho(\tau_i-0)=\\&\qquad=X_\rho^*(\tau_i-0)(I_n+S_i^*)\ [I_n-(I_n+S_i^*)^+S_i^*]\ H_\rho(\tau_i-0)-\\&\qquad-X_\rho^*(\tau_i-0)\,H_\rho(\tau_i-0)=X_\rho^*(\tau_i-0)P_{(I_n+S_i)}S_i^*H_\rho(\tau_i-0)\,.\end{aligned}$$

Таким образом, при условии (8) произведение $X_\rho^*(t)H_\rho(t)$ постоянно на всем промежутке $[0,T]$, что и доказывает равенство $X_\rho^*(t)H_\rho(t)=C$.

Доказательство следующих утверждений аналогично доказательству леммы 2.

Следствие 1. *Пусть матрица A постоянна и приведена к жордановой форме; тогда $X_\rho^*(t)H_\rho(t)=I_\rho$, где I_ρ — единичная $(\rho\times\rho)$-мерная матрица.*

Определение. *Систему (6), (7) при условии (8) будем называть сопряженной к системе (1), (2) с вырожденным импульсным воздействием.*

Лемма 3. *При условии (8) нормальные фундаментальные матрицы $X(t)$ и $H(t)$ сопряженных систем (1), (2) и (6), (7) удовлетворяют соотношению $X^*(t)H(t)=C$, где C — постоянная $(n\times n)$-мерная матрица.*

Следствие 2. *Пусть матрица A постоянна и приведена к жордановой форме; тогда $X^*(t)H(t)=I_n$, где I_n — единичная $(n\times n)$-мерная матрица.*

Поскольку неособенной заменой неизвестной постоянная матрица A всегда легко приводится к жордановой форме, следствия 1 и 2 могут быть использованы для нахождения матриц $H_\rho(t)$ и $H(t)$ без построения сопряженной системы (6), (7).

3. Матрица Коши системы с вырожденным импульсным воздействием. Предположим, что условие (8) существования сопряженной системы выполнено, и перейдем к изучению неоднородной системы

$$\frac{dz}{dt}=A\,(t)\,z+f(t)\,,\qquad t\in[0,T]\,,\quad t\neq\tau_i\,, \tag{9}$$

с вырожденным импульсным воздействием

$$\Delta z(\tau_i)=S_iz(\tau_i-0)+a_i\,. \tag{10}$$

Здесь $a_i\in R^n$ — постоянные вектор-столбцы, $f(t)$ — данная вектор-функция, элементы которой принадлежат классу $C\{[0,T]\setminus\{\tau_i\}_I\}$; компоненты решения ищем в том же классе. Пусть $\rho>0$, тогда однородная часть системы (9), (10) — система (1), (2) — имеет нетривиальное частное решение (5).

Матрицу решений однородной сопряженной системы (6), (7) $H_\rho(t)$ будем считать нормированной при $t=0$ и $(n\times\rho)$-блоком нормальной фундаментальной матрицы $H(t)$ этой системы, а именно первыми ρ ее столбцами. Оставшиеся $n-\rho$ столбцов матрицы $H(t)$ составляют $(n\times(n-\rho))$-блок $H_{n-\rho}(t)$, таким образом,

$$H\,(t) = [H_\rho(t),\ H_{n-\rho}(t)]\ .$$

Условие разрешимости системы (9), (10) и конструкцию решения определяет следующая теорема.

Теорема. *Линейная неоднородная задача Коши* $z(0)=c$ *для системы (9), (10) при условии*

$$S_i C_{n-\rho} X_{n-\rho}(\tau_i - 0)\left\{ \int\limits_0^{\tau_i} X^{-1}_{n-\rho}(s) C^*_{n-\rho} f(s)ds + \sum_{j=i}^{p} X^{-1}_{n-\rho}(\tau_j+0) C^*_{n-\rho} a_j \right\} = 0 \tag{11}$$

разрешима в виде

$$z(t,c) = X(t)c + \int\limits_0^T K(t,s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{p} K(t,\tau_i+0)\,a_i\ , \tag{12}$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} X_\rho(t)H^*_\rho(s) + C_{n-\rho}X_{n-\rho}(t)X^{-1}_{n-\rho}(s)C^*_{n-\rho}\ , & 0\le s\le t\le T\ , \\ 0\ , & 0\le t\le s\le T\ , \end{cases}$$

— матрица Коши системы (9), (10), $X_{n-\rho}(t)$ *— нормальная* $(X_{n-\rho}(0)=I_{n-\rho})$ *фундаментальная матрица системы*

$$\frac{dz}{dt} = C^*_{n-\rho} A C_{n-\rho} z\ , \qquad C_{n-\rho} = H_{n-\rho}(0)\ .$$

Решение (12) удовлетворяет системе (9), что непосредственно проверяется дифференцированием. Аналогично [6] легко показать невырожденность матрицы $[H_\rho(t), C_{n-\rho}]$, причем $\{[H_\rho(t), C_{n-\rho}]^*\}^{-1} = [H_\rho(t), C_{n-\rho}]$. Последнее равенство равносильно следующему:

$$X_\rho(t)H^*_\rho(t) + C_{n-\rho}C^*_{n-\rho} = I_n.$$

Обозначим $(n-\rho)\times(n-\rho)$-мерную матрицу $S_0 = C^*_{n-\rho}AC_{n-\rho}$ и покажем, что $AC_{n-\rho} = C_{n-\rho}S_0$. Это верно, поскольку $C^*_{n-\rho} = C^+_{n-\rho}$, поэтому

$$AC_{n-\rho} - C_{n-\rho}S_0 = (I_n - C_{n-\rho}C^+_{n-\rho})AC_{n-\rho} = A^* P_{A^*} C_{n-\rho} = 0\ .$$

Используя условие (11) и равенства

$$K(\tau_i - 0, \tau_j - 0) = 0, \quad K(\tau_i \pm 0, \tau_j + 0) = 0 \ \text{ при } \ i > j,$$

убеждаемся, что решение (12) удовлетворяет условию (10), определяющему импульсное воздействие. Таким образом, теорема доказана.

В случае невырожденного импульсного воздействия

$$H_{n-\rho}(t) = C_{n-\rho} = 0,$$

следовательно, условие (11) выполнено и решение (12) совпадает с известным решением [1] в случае невырожденного импульсного воздействия. Условие (11) не является необходимым условием существования решения системы (9), (10). В случае его невыполнения решение последней системы всегда можно построить методом, изложенным в [4].

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 287 с.
2. *Sčhwabik S.* Differential equations with interface conditions // Čas. pěstov. mat. — 1980. — **105**. — P. 391 – 408.
3. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 1995. — Т. 13. — 320 с.
4. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 – 594.
5. *Чуйко Е.В.* Слабонелинейные краевые задачи с вырожденным импульсным воздействием // Допов. НАН України. — 1996. — № 11. — С. 29 – 34.
6. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

Получено 04.02.99

До уваги читачів журналу !

Витяг з **„Переліку № 1 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук”** (додаток до постанови президії ВАК України від 9 червня 1999 р. № 1-05/7)

Фахові видання з фізико-математичних наук
журнали

18. Нелінійні коливання (Інститут математики НАНУ) (механіка, математика).