УДК 517.9

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**В.С. Ткачук**

*Ин-т математики НАН Украины,*
*Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3*

*By means of the asymptotic method we investigate the $m$-frequency oscillation system $(m \leq 2)$ described by a weakly nonlinear system of four differential equations in the non-resonance case.*

*З допомогою асимптотичного методу досліджується $m$-частотна коливна система $(m \leq 2)$, що описується слабконелінійною системою чотирьох диференціальних рівнянь, в нерезонансному випадку.*

В настоящей работе проведем анализ $m$-частотной колебательной системы $(m \leq 2)$, описываемой системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H x + \varepsilon X(x), \tag{1}$$

где

$$X(x) = (X_1(x), X_2(x)),\ x = (x_1, x_2),\ x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R}^4,$$

$X_i(x)$ — двумерные функции, принадлежащие пространству полиномов по $x$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $H = \operatorname{diag}(H_1, H_2)$, $H_i$ — постоянные матрицы, имеющие вид $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & -\alpha_i \end{pmatrix}$, элементы которых удовлетворяют равенству $\alpha_i^2 + \beta_i\gamma_i + 1 = 0$, $i = 1, 2$; $\varepsilon$ — малый положительный параметр.

Будем рассматривать систему уравнений (1) в предположении , что функция $X(x)$ является полиномом относительно $x$ степени не выше 3. Согласно [1 – 3], при анализе колебаний такой системы в первом приближении к нерезонансному следует отнести случай, когда

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3. \tag{2}$$

Пусть неравенство (2) имеет место. Запишем функции $X_i$ в явном виде

$$X_i(x_1, x_2) = \sum_{|m| \leq 3} C_m^{(i)} \prod_{l=1}^{2} {x_{l1}}^{m_{l1}} {x_{l2}}^{m_{l2}}, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $m = (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами, $|m| = \sum_i l_i(m_{i1} + m_{i2})$, $C_m^{(i)} = \begin{pmatrix} c_m^{(i1)} \\ c_m^{(i2)} \end{pmatrix}$ — числовые коэффициенты.

Уравнения первого приближения системы (1) имеют вид

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \varepsilon Y(y), \tag{4}$$

где

$$Y(y) = (Y_1(y), Y_2(y)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\varphi H} X\left(e^{\varphi H} y\right) d\varphi. \tag{5}$$

В системе уравнений (4) вместо евклидовых координат $y = (y_1, y_2)$ введем амплитудно-фазовые переменные $h = (h_1, h_2), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ по формулам

$$y_i = e^{\varphi_i H_i}\mathbf{h}_i = (\sin\varphi_i H_i + \cos\varphi_i E_2)\mathbf{h}_i, \tag{6}$$

где $\mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} h_i \\ h_i \end{pmatrix}, h_i \in R^+, i = 1, 2,\ \varphi \in \mathcal{T}_2$ — 2-мерный тор.

В результате получим систему уравнений

$$\left(\frac{d\varphi_i}{dt} - \lambda_i\right) H_i \mathbf{h}_i + \frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = \varepsilon e^{-\varphi_i H_i} Y_i\left(e^{\varphi_1 H_1}\mathbf{h}_1, e^{\varphi_2 H_2}\mathbf{h}_2\right),\ i = 1, 2. \tag{7}$$

Для расщепления усредненной системы уравнений (7) нам необходимо найти ее правую часть. Поскольку, согласно [3, 4], функция $Y(y)$ принадлежит ядру оператора

$$L = \frac{d}{dy}\lambda H y - \lambda H,$$

то

$$Y\left(e^{\varphi H} y\right) = e^{\varphi H} Y(y),$$

в результате чего получим

$$e^{-\varphi H} Y\left(e^{\varphi H}\mathbf{h}\right) = Y(\mathbf{h}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\varphi H} X\left(e^{\varphi H}\mathbf{h}\right) d\varphi. \tag{8}$$

Используя формулы (3), (6), имеем

$$Y_i(h_1, h_2) = \frac{1}{8}\left[\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} h_k^2 + a_i\right) E_2 + \left(\sum_{k=1}^{2} b_{ik} h_k^2 + b_i\right) H_i\right] \mathbf{h}_i, \tag{9}$$

где коэффициенты $a_{ik}, a_i$ выражаются через коэффициенты исходной системы уравнений (1) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 4(c^{(11)}_{1000} + c^{(12)}_{0100}), \qquad a_2 = 4(c^{(21)}_{0010} + c^{(22)}_{0001}),\\
&a_{11} = (2\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1)[\beta_1 m_1 - \gamma_1 m_2 - 2\alpha_1 m_3],\\
&a_{12} = 2(2\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2)[\beta_2 n_1 - \gamma_2 n_2 - \alpha_2 n_3],\\
&a_{21} = 2(2\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1)[\beta_1 k_1 - \gamma_1 k_2 - \alpha_1 k_3],\\
&a_{22} = (2\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2)[\beta_2 l_1 - \gamma_2 l_2 - 2\alpha_2 l_3],\\
&m_1 = 3c^{(11)}_{3000} + c^{(12)}_{2100},\ m_2 = c^{(11)}_{1200} + c^{(12)}_{0300},\ m_3 = c^{(11)}_{2100} + c^{(12)}_{1200},\\
&n_1 = c^{(11)}_{1020} + c^{(12)}_{0120}, \quad n_2 = c^{(11)}_{1002} + c^{(12)}_{0102}, \quad n_3 = c^{(11)}_{1011} + c^{(12)}_{0111},\\
&k_1 = c^{(21)}_{2010} + c^{(22)}_{2001}, \quad k_2 = c^{(21)}_{0210} + c^{(22)}_{0201}, \quad k_3 = c^{(21)}_{1110} + c^{(22)}_{1101},\\
&l_1 = 3c^{(21)}_{0030} + c^{(22)}_{0021}, \quad l_2 = c^{(21)}_{0012} + c^{(22)}_{0003}, \quad l_3 = c^{(21)}_{0021} + c^{(22)}_{0012}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Найденное выражение для $Y_i(h_1, h_2)$ позволяет расщепить систему уравнений (7) на уравнения с медленно и быстро меняющимися переменными, в результате чего получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dh_i}{dt} = \frac{\varepsilon}{8}\left[\sum_{k=1}^{2} a_{ik} h_k^2 + a_i\right] h_i = \frac{\varepsilon}{8} A_i(h_1^2, h_2^2) h_i,\\
&\frac{d\varphi_i}{dt} = \lambda_i + \frac{\varepsilon}{8}\left[\sum_{k=1}^{2} b_{ik} h_k^2 + b_i\right] = \lambda_i + \frac{\varepsilon}{8} B_i(h_1^2, h_2^2) h_i, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Система уравнений (11) может иметь квазистатическое положение равновесия

$$h = h^0, \quad h_i^0 > 0, \qquad i = 1, 2,$$

определяемое из уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{11} h_1^2 + a_{12} h_2^2 + a_1 = 0,\\
&a_{21} h_1^2 + a_{22} h_2^2 + a_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В случае невырожденности матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ система (12) имеет решение

$$h_0^2 = ((h_1^0)^2, (h_2^0)^2) = \left(\frac{\triangle_1}{\triangle}, \frac{\triangle_2}{\triangle}\right), \tag{13}$$

где $\triangle_1 = a_2 a_{12} - a_1 a_{22}, \quad \triangle_2 = a_1 a_{21} - a_2 a_{11}, \quad \triangle = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Согласно теореме [3], исходная система уравнений (1) может иметь двумерный инвариантный тор, соответствующий точке $C\left(\frac{\triangle_1}{\triangle}, \frac{\triangle_2}{\triangle}\right)$ в случае, когда $\frac{\triangle_1}{\triangle}, \frac{\triangle_2}{\triangle} > 0$.

Матрица $H$, определяющая устойчивость положения равновесия (13), имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}(h_1^0)^2 & a_{12}(h_1^0)^2(h_2^0)^2 \\ a_{21}(h_1^0)^2(h_2^0)^2 & a_{22}(h_2^0)^2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

откуда находим выражения для собственных значений матрицы $H$ :

$$r_{1,2} = \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4S_2}}{2}, \qquad \text{где} \quad S_1 = \frac{a_{11}\triangle_1 + a_{22}\triangle_2}{\triangle}, \quad S_2 = \frac{\triangle_1\triangle_2}{\triangle}.$$

Собственные числа матрицы $H$ имеют нулевые вещественные части при $S_1 = 0$, $\triangle_1, \triangle_2, \triangle > 0$. Во всех остальных случаях обеспечивается „грубость” матрицы $H$, а значит, и условия теоремы [3], что гарантирует существование двумерного инвариантного тора исходной системы уравнений (1), соответствующего квазистатическому положению равновесия (13). В частности, этот тор будет экспоненциально устойчивым только в том случае, когда

$$\triangle_1, \triangle_2, \triangle > 0 \quad \text{и} \quad a_{11}\triangle_1 + a_{22}\triangle_2 < 0. \tag{15}$$

Гиперплоскости $y_i = 0$ будут инвариантными для усредненных уравнений (4) при любом $i = 1, 2$, и при замене (6) они переходят в инвариантные гиперплоскости $h_i = 0$.

Рассмотрим инвариантные множества $(0, h_2)$ и $(h_1, 0)$. Уравнения квазистатических положений равновесия на этих множествах будут иметь соответственно вид

$$a_{22}h_2^2 + a_2 = 0, \qquad \text{и} \qquad a_{11}h_1^2 + a_1 = 0, \tag{16}$$

в результате чего в первом случае получим $(h_2^0)^2 = -a_2/a_{22}$, , а во втором — $(h_1^0)^2 = -a_1/a_{11}$.

Согласно [3 – 6], исходная система уравнений (1) может иметь предельные циклы, соответствующие точкам $C_1(0; -a_2/a_{22})$ и $C_2(-a_1/a_{11}; 0)$ в случаях $a_2a_{22} < 0$ и $a_1a_{11} < 0$.

Собственные числа матрицы $H$, определяющей устойчивость предельных циклов, отвечающих точкам $C_1$ и $C_2$, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &r_1 = -\triangle_1 a_{22},\ r_2 = -a_2 && \text{для точки } C_1; \\ &r_1 = -\triangle_2 a_{11},\ r_2 = -a_1 && \text{для точки } C_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Грубость матрицы $H$ обеспечивается в этих случаях соответственно условиями

$$\triangle_1 \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \triangle_2 \neq 0; \tag{18}$$

при этом предельные циклы, отвечающие точкам $C_1$ и $C_2$, будут экспоненциально устойчивыми при $a_2 > 0, \triangle_1 < 0$ и $a_1 > 0, \triangle_2 < 0$, экспоненциально неустойчивыми при $a_2 < 0, \triangle_1 < 0$ и $a_1 < 0, \triangle_2 < 0$, и экспоненциально дихотомичными при $\triangle_1 > 0$ и $\triangle_2 > 0$.

Для того чтобы подвести итог, введем в рассмотрение следующие области:

$$A)\quad \begin{array}{l} 2a_1K > a_2M; \\ 2a_2N > a_1L; \\ ML > 4NK, \end{array} \qquad B)\quad \begin{array}{l} 2a_1K < a_2M; \\ 2a_2N < a_1L; \\ ML < 4NK, \end{array} \qquad C)\quad \begin{array}{l} 2a_1K \le a_2M; \\ 2a_2N \le a_1L; \\ ML \ge 4NK, \end{array}$$

$$D)\quad \begin{array}{l} 2a_1K \ge a_2M; \\ 2a_2N \ge a_1L; \\ ML \le 4NK, \end{array} \qquad E)\quad (2a_1K - a_2M)(2a_2N - a_1L) < 0,$$

где

$$M = m_1\beta_1^2 - 2m_3\alpha_1\beta_1 + m_2(\alpha_1^2 + 1), \quad L = l_1\beta_2^2 - 2l_3\alpha_2\beta_2 + l_2(\alpha_2^2 + 1),$$

$$K = k_1\beta_1^2 - k_3\alpha_1\beta_1 + k_2(\alpha_1^2 + 1), \quad N = n_1\beta_2^2 - n_3\alpha_2\beta_2 + n_2(\alpha_2^2 + 1).$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Для грубых положений равновесия амплитудных уравнений первого приближения всегда существует нулевое, устойчивость которого определяется коэффициентами $a_1, a_2$, и в зависимости от коэффициентов системы (1) возможны следующие случаи существования инвариантных множеств исходной системы уравнений:*

*1. В области $A$ существует экспоненциально устойчивый или неустойчивый двумерный инвариантный тор и могут существовать один или два экспоненциально дихотомичных предельных цикла.*

*2. В области $B$ существует экспоненциально дихотомичный двумерный инвариантный тор и могут существовать экспоненциально устойчивые или неустойчивые предельные циклы в любой комбинации.*

*3. В области $C$ могут существовать экспоненциально устойчивые или неустойчивые предельные циклы в любой комбинации.*

*4. В области $D$ могут существовать экспоненциально дихотомичные предельные циклы.*

*5. В области $E$ при одновременном существовании предельных циклов один из них экспоненциально дихотомичный, а другой экспоненциально устойчивый или неустойчивый.*

Рассмотрим все возможные случаи существования двумерного инвариантного тора с предельными циклами, для чего в системе (11) для амплитудных уравнений выполним замену

$$\begin{aligned} &\rho_1 = \left|\frac{a_{11}}{a_1}\right| h_1^2,\ \rho_2 = \left|\frac{a_{22}}{a_1}\right| h_2^2 \quad \text{при} \quad a_{11}, a_{22}, a_1 \ne 0, \\ &\rho_1 = |a_{11}| h_1^2,\ \rho_2 = |a_{22}| h_2^2 \quad \text{при} \quad a_{11}, a_{22} \ne 0,\ a_1 = 0, \\ &\rho_1 = h_1^2 \quad \text{при} \quad a_{11} = 0, \qquad \rho_2 = h_2^2 \quad \text{при} \quad a_{22} = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

в результате которой получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{d\tau} &= (k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3)\rho_1, \\ \frac{d\rho_2}{d\tau} &= (l_1\rho_1 + l_2\rho_2 + l_3)\rho_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где в зависимости от знаков $M, L, a_1$ коэффициенты $k_i, l_i$ могут принимать следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = 0, \pm 1, \quad k_2 = \pm m, \pm m', a_{12}, \quad k_3 = 0, \pm 1, \\
&l_1 = \pm n, \pm n', a_{21}, \quad l_2 = 0, \pm 1, \quad l_3 = \pm\gamma, a_2; \\
&\tau = \frac{\varepsilon}{4}|a_1|t \quad \text{при} \quad a_1 \neq 0 \qquad \text{или} \qquad \tau = \frac{\varepsilon}{4}t \quad \text{при} \quad a_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

В формулах (21) приняты следующие обозначения:

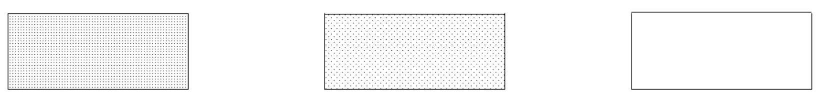
$$\gamma = a_2/a_1,$$

$$m = \frac{2(n_1\beta_2 - n_2\gamma_2 - n_3\alpha_2)}{l_1\beta_2 - l_2\gamma_2 - 2l_3\alpha_2}, \quad m' = 2\frac{2\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2}{a_1}(\beta_2 n_1 - \gamma_2 n_2 - \alpha_2 n_3),$$

$$n = \frac{2(k_1\beta_1 - k_2\gamma_1 - k_3\alpha_1)}{m_1\beta_1 - m_2\gamma_1 - 2m_3\alpha_1}, \quad n' = 2\frac{2\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1}{a_1}(\beta_1 k_1 - \gamma_1 k_2 - \alpha_1 k_3),$$

где $m_i, n_i, k_i, l_i$ — коэффициенты, задающиеся формулами (10).

В результате исследования системы уравнений (20) получим зависимости стационарных амплитуд этого уравнения, отвечающих точке $C$, от коэффициентов $m, n$, и области существования и устойчивости двумерного инвариантного тора исходной системы уравнений (1), обозначенные на рис. 1 – 12 таким образом:



устойчивость неустойчивость дихотомия

1. $M > 0,\ L < 0,\ a_1 > 0.$

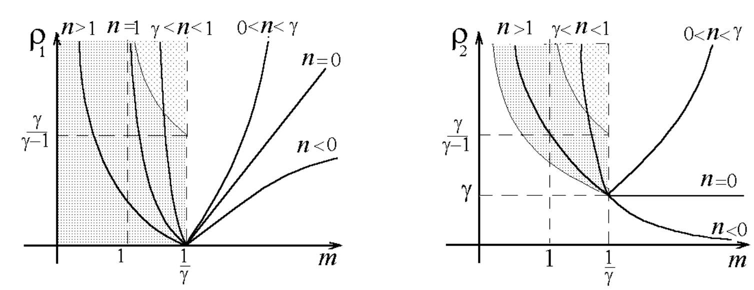



Рис. 1

Существует предельный цикл, отвечающий точке $C_1$ и являющийся экспоненциально устойчивым при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичным при $m < \dfrac{1}{\gamma}, \gamma > 0$ (рис. 1).

2. $M > 0$, $L < 0$, $a_1 < 0$.

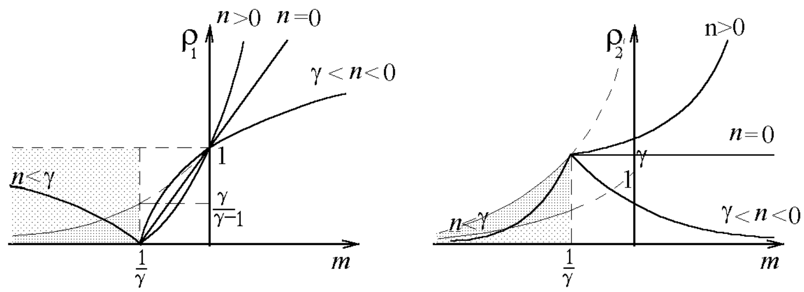



Рис. 2

Существуют два предельных цикла, отвечающих точкам $C_1$ и $C_2$. Цикл, отвечающий точке $C_1$, является экспоненциально устойчивым при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичным при $m < \dfrac{1}{\gamma}$, а цикл, отвечающий точке $C_2$, будет экспоненциально неустойчивым при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичным при $n < \gamma,\ \gamma < 0$ (рис. 2).

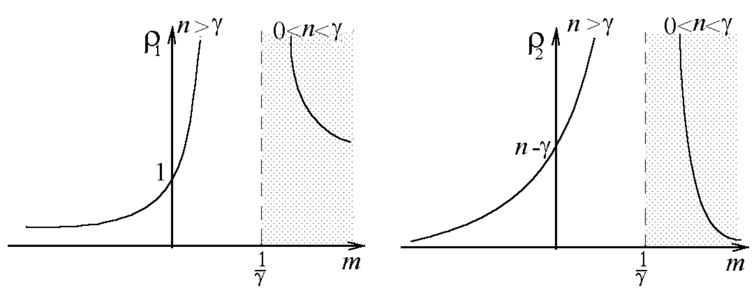



Рис. 3

Существует цикл, отвечающий точке $C_2$, который будет экспоненциально неустойчивым при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичным при $n < \gamma, 0 \le \gamma \le 1$ (рис. 3).

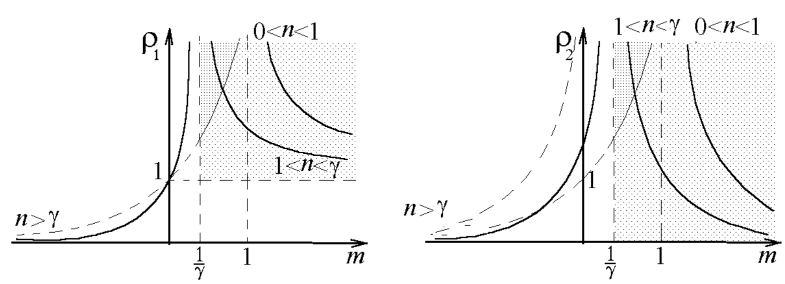



Рис. 4

Существует цикл, отвечающий точке $C_2$, экспоненциально неустойчивый при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичный при $n < \gamma, \gamma > 1$ (рис. 4).

3. $M > 0,\ L < 0,\ a_1 = 0.$

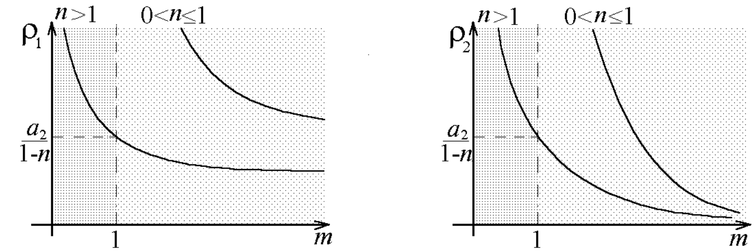



Рис. 5

Существует экспоненциально неустойчивый предельный цикл исходной системы уравнений (1), отвечающий точке $C_1$, $a_2 < 0$ (рис. 5).

4. $M > 0,\ L > 0,\ a_1 > 0.$

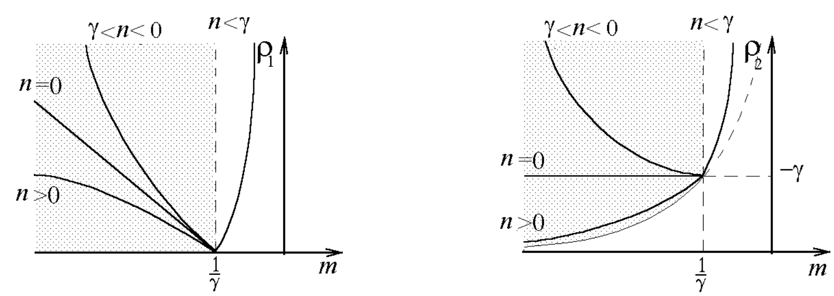



Рис. 6

Существует предельный цикл, отвечающий точке $C_1$, экспоненциально неустойчивый при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичный при $m < \dfrac{1}{\gamma}$, $\gamma < 0$ (рис. 6).

5. $M > 0,\ L > 0,\ a_1 < 0.$

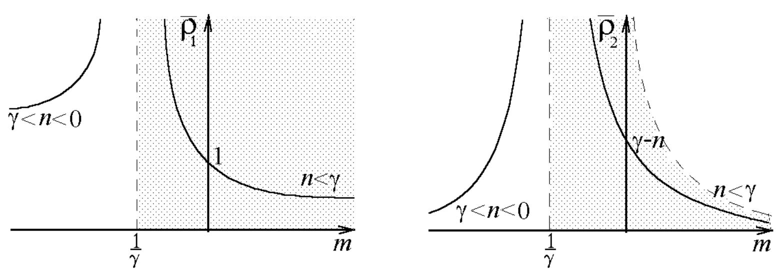



Рис. 7

Существует цикл, отвечающий точке $C_2$, который будет экспоненциально неустойчивым при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичным при $n < \gamma$, ($\gamma \leq 0$ (рис. 7).

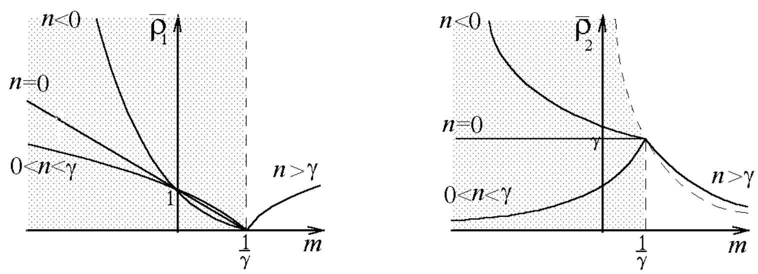



Рис. 8

Существуют два предельных цикла, отвечающих точкам $C_1$ и $C_2$. Цикл, отвечающий точке $C_1$, является экспоненциально неустойчивым при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичным при $m < \dfrac{1}{\gamma}$, а цикл, отвечающий точке $C_2$, будет экспоненциально неустойчивым при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичным при $n < \gamma, \gamma > 0$ (рис. 8).

6. $M > 0,\ L > 0,\ a_1 = 0.$

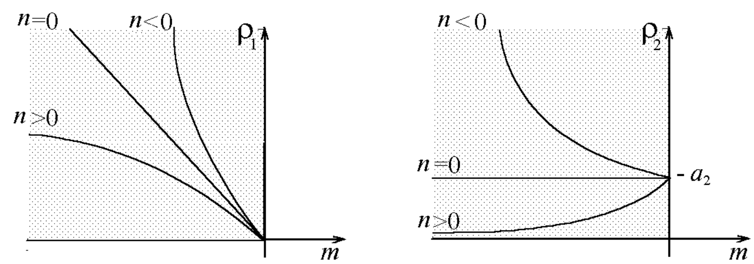
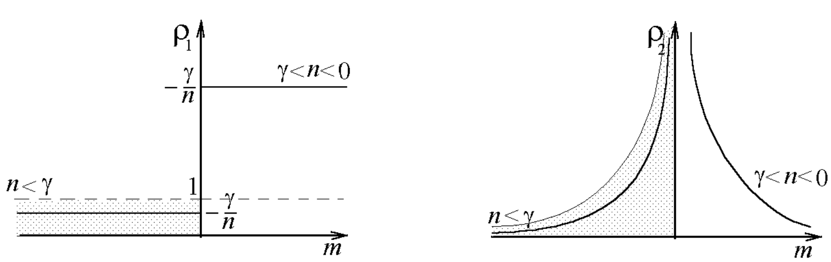


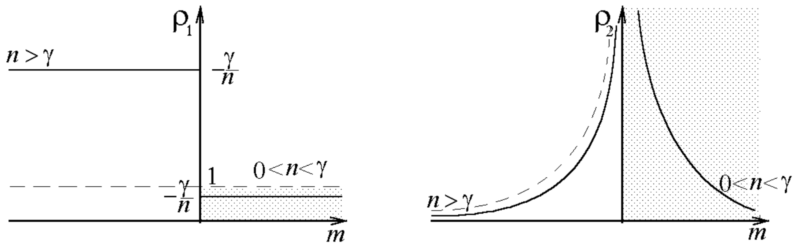

Рис. 9

Существует предельный цикл, отвечающий точке $C_1$ и являющийся экспоненциально неустойчивым при $m > 0$ и экспоненциально дихотомичным при $m < 0, a_2 < 0$ (рис. 9).

7. $M > 0,\ L = 0,\ a_1 < 0.$




*а*




*б*

Рис. 10

В обоих случаях ($a - \gamma < 0$ и $\delta - \gamma > 0$) существует предельный цикл, порождаемый точкой $C_2$, экспоненциально неустойчивый при $n > \gamma$ и экспоненциально дихотомичный при $n < \gamma$ (рис. 10).

8. $M = 0,\ L > 0,\ a_1 > 0.$

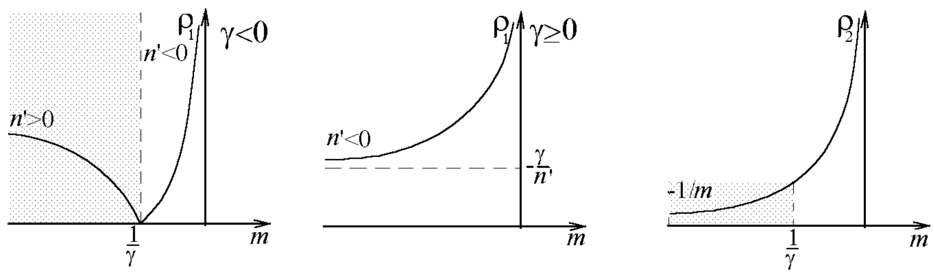



Рис. 11

При $\gamma < 0$ существует предельный цикл, порождаемый точкой $C_1$, экспоненциально неустойчивый при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичный при $m < \dfrac{1}{\gamma}$ (рис. 11).

9. $M = 0,\ L > 0,\ a_1 < 0.$

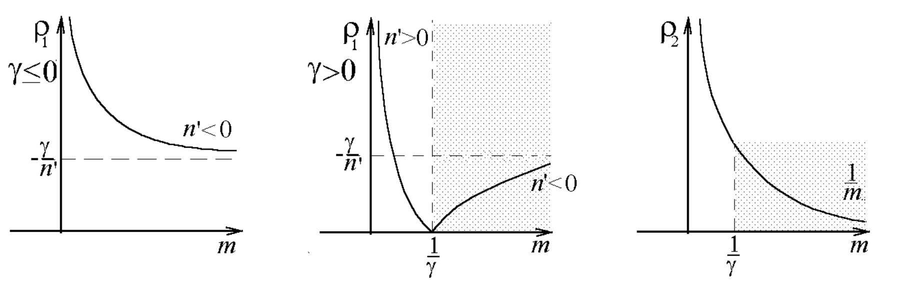



Рис. 12

При $\gamma > 0$ существует предельный цикл, порождаемый точкой $C_1$, экспоненциально неустойчивый при $m < \dfrac{1}{\gamma}$ и экспоненциально дихотомичный при $m > \dfrac{1}{\gamma}$ (рис. 12).

Заметим, что при одновременной замене знаков коэффициентов $M, L, a_1, a_2$ в рассмотренных выше случаях ситуация не изменится, но при этом устойчивые области меняются на неустойчивые, и наоборот.


1. *Митропольский Ю.А.,Самойленко А.М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, № 1. — С. 42 – 53.
2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. — Киев, 1987. — 50 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.41).
3. *Самойленко А.М.* Асимптотический метод исследования $m$-частотных колебательных систем // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1366 – 1387.
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
5. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Исследование колебательных систем второго порядка. — Киев, 1976. — 50 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 76.6).
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.


*Получено 24.04.99*