НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

ПРО ЗЛІЧЕННОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ю.В. Теплінський, В.А. Недокіс

Кам'янець-Поділ. пед. ун-т,
Україна, 281900, Хмельницька обл.,
м. Кам'янець-Подільський, вул. Огієнка, 61
e-mail: univer@kp.khmelnitskiy.ua

We propose a modification of A.M. Samoilenko's numerical-analytic method of solution of cout-point boundary value problems in the $\mathfrak{M}$ space.

Запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка розв'язування зліченноточкових крайових задач у просторі $\mathfrak{M}$.

В останні роки питанням розв'язуваності крайових задач для різноманітних систем звичайних диференціальних рівнянь, в тому числі й зліченних, присвячена значна кількість досліджень. В багатьох з них (див., наприклад, [1 – 5]) вирішальну роль відіграє застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень, запропонованого А.М. Самойленком [6, 7].

У цій статті наведено результати застосування вказаного методу до дослідження існування і наближеної побудови розв'язків зліченноточкових крайових задач для диференціальних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей. Розглянуто питання про редукцію цих задач до скінченновимірного випадку, вивчено умови їх розв'язуваності, знайдено оцінки похибки обчислення початкового значення розв'язку. Теоретичні результати проілюстровано прикладом застосування методу до конкретної зліченноточкової крайової задачі.

1. Рівномірна збіжність послідовних наближень до точного розв'язку. В просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, ...)$ з нормою $\|x\| = \sup_n \{|x_n|\}$ розглянемо крайові задачі для диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

зі зліченноточковою

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) + Cx(T) = d \tag{2}$$

та скінченноточковою

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t_i) + Cx(T) = d \tag{3}$$

крайовими умовами. Тут $x, d \in \mathfrak{M}$; $A_i = [a_{jk}^{(i)}]_{j,k=1}^{\infty}$, $i = 0, 1, 2, ...$, і $C = [c_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ — нескінченні матриці; множина точок $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0, T]$.

Вважатимемо, що функція $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), ...)$ визначена і неперервна в області

$$(t, x) \in D_0 = [0, T] \times D, \tag{4}$$

де $D \subset \mathfrak{M}$ — замкнена, обмежена множина, причому

$$\|f(t, x)\| \le M, \qquad \left\|f(t, x') - f(t, x'')\right\| \le K \left\|x' - x''\right\| \tag{5}$$

для всіх $x', x'' \in D,\ t \in [0, T],\ K = \mathrm{const} < \infty$.

Узгодивши норму матриці $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ з векторною нормою простору $\mathfrak{M}$ формулою $\|A\| = \sup\limits_i \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$, накладемо на крайову задачу (1), (2) наступні умови:

а) матриці $A_I,\ i = 0, 1, 2, ...$, і C обмежені за нормою, причому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|$ збіжний і для матриці $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{t_i}{T} A_i + C$ існує обернена матриця H;

б) множина D_β елементів $x_0 \in \mathfrak{M}$, що належать області D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0), \qquad \beta_1(x_0) = \left\| H \left[d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 \right] \right\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$\alpha_1(t) = 2t \left(1 - \frac{t}{T} \right),$$

є непорожньою:

$$D_\beta \ne \varnothing; \tag{6}$$

в) $Q = \dfrac{KT}{2} \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \right] < 1.$

Введемо лінійні оператори

$$Sf(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \qquad Lf(t) = \int_0^t \left(f(s) - Sf(t) \right) ds$$

і задамо послідовність функцій $x_m(t, x_0)$ рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} x_0(t, x_0) \equiv x_0, \quad & x_m(t, x_0) = x_0 + Lf(t, x_{m-1}(t, x_0)) + \\ & + \frac{t}{T} H \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i Lf(t_i, x_{m-1}(t, x_0)) \right\}, \\ & m = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{7}$$

Застосовуючи чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, одержуємо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі (1), (2) в області (4) виконуються умови (5) і а) – в). Тоді для довільного* $x_0 \in D_\beta$ *існує єдиний керуючий параметр* $\Delta(x_0) \in \mathfrak{M}$*, при якому розв'язок* $x^* = x^*(t, x_0)$ *рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(x_0)$$

такий, що $x^*(0, x_0) = x_0$*, задовольняє крайові умови (2). Для того щоб функція* $x^*(t, x_0)$ *була розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і досить, щоб елемент* x_0 *був розв'язком рівняння*

$$\Delta(x_0) = 0. \tag{8}$$

При цьому

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i L f(t, x^*(t, x_0)) \right\} - S f(t, x^*(t, x_0)), \tag{9}$$

а $x^*(t, x_0)$ *є граничною функцією послідовності (7).*

Розглядаючи крайову задачу (1), (3), накладаємо такі обмеження:

г) матриці $A_i, i = 0, 1, 2, ..., p$, і C обмежені за нормою, причому для матриці $\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{t_i}{T} A_i + C$ існує обернена матриця H_p;

д) множина D_{β_p} елементів $x_0 \in \mathfrak{M}$, що належать області D разом зі своїм β_p-околом, де

$$\beta_p(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_{1p}(x_0), \quad \beta_{1p}(x_0) = \left\| H_p \left[d - \Big(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \Big) x_0 \right] \right\| + \sum_{i=1}^{p} H_p A_i \| \alpha_1(t_i) M,$$

є непорожньою:

$$D_{\beta_p} \neq \varnothing; \tag{10}$$

е) $Q_p = \dfrac{KT}{2} \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{p} \| H_p A_i \| \right] < 1.$

Побудувавши послідовність $\{x_{p_m}(t, x_0)\}$ вигляду

$$\begin{aligned} & x_{p_0}(t, x_0) \equiv x_0, \quad x_{p_m}(t, x_0) = x_0 + L f(t, x_{p_{m-1}}(t, x_0)) + \\ & \quad + \frac{t}{T} H_p \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i L f(t_i, x_{p_{m-1}}(t, x_0)) \right\}, \\ & \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{11}$$

після застосування чисельно-аналітичного методу отримуємо наступне твердження, аналогічне до теореми 1.

Теорема 2. *Якщо для крайової задачі (1), (3) в області (4) виконуються умови (5) і г) – е), то для довільного $x_0 \in D_{\beta_p}$ існує єдиний керуючий параметр $\Delta_p(x_0) \in \mathfrak{M}$, при якому розв'язок $x_p = x_p(t, x_0)$ рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta_p(x_0)$$

такий, що $x_p(0, x_0) = x_0$, задовольняє крайові умови (3). Для того щоб функція $x_p(t, x_0)$ була розв'язком крайової задачі (1), (3), необхідно і досить, щоб $\Delta_p(x_0) = 0$. При цьому

$$\Delta_p(x_0) = \frac{1}{T} H_p \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i L f(t_i, x_p(t, x_0)) \right\} - S f(t, x_p(t, x_0)),$$

а $x_p(t, x_0)$ є граничною функцією послідовності (11).

2. Редукція до випадку скінченновимірної крайової задачі. Розглянемо тепер поряд з крайовими задачами (1), (2) та (1), (3) у просторі $\mathfrak{M}$ крайову задачу у просторі R^n для рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}) \tag{12}$$

з крайовою умовою вигляду

$$\overset{(n)}{A}_0 \overset{(n)}{x}(0) + \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i \overset{(n)}{x}(t_i) + \overset{(n)}{C} \overset{(n)}{x}(T) = \overset{(n)}{d}, \tag{13}$$

де

$$\overset{(n)}{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \overset{(n)}{d} = (d_1, d_2, ..., d_n), \quad \overset{(n)}{f} = (f_1, f_2, ..., f_n),$$

$$f(t, \overset{(n)}{x}) = f(t, x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...), \qquad \overset{(n)}{A}_i = \left[\overset{(i)}{a}_{jk} \right]_{j,k=1}^{n}, \qquad \overset{(n)}{C} = [c_{jk}]_{j,k=1}^{n}.$$

Крайова задача (12), (13) є скінченновимірною і детально вивчена [4, 6]. Зокрема, припустивши виконання умов:

є) для матриці $\sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}$ існує обернена матриця $\overset{(n)}{H}_p$;

ж) множина $D_{\overset{(n)}{\beta}_p}$ точок $\overset{(n)}{x} = (x_{01}, ..., x_{0n}) \in R^n$ таких, що відповідні точки $(x_{01}, ..., x_{0n}, 0, 0, ...)$ належать області D разом зі своїм $\overset{(n)}{\beta}_p$-околом, де

$$\overset{(n)}{\beta}_p = \frac{T}{2} M + \overset{(n)}{\beta}_{1p}(\overset{(n)}{x}_0), \; \overset{(n)}{\beta}_{1p}(\overset{(n)}{x}_0) = \left\| \overset{(n)}{H}_p \left[\overset{(n)}{d} - \Big(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \Big) \overset{(n)}{x}_0 \right] \right\| + \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i \right\| \alpha_1(t_i) M,$$

є непорожньою:

$$D_{\overset{(n)}{\beta}_p} \neq \varnothing; \tag{14}$$

з) $\overset{(n)}{Q}_p = \dfrac{KT}{2}\left[1+\sum\limits_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n)}{H}_p\overset{(n)}{A}_i\right\|\right] < 1,$

легко перевірити справедливість наступного твердження, що випливає з теорем 7.1, 8.1, 8.2, доведених у [4].

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі (12), (13) виконуються умови (5) і є) – з). Тоді для довільної точки* $\overset{(n)}{x}_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ *такої, що точка* $\overline{x}_0 = (x_{01}, ..., x_{0n}, 0, 0, ...)$ *належить множині* $D_{\overset{(n)}{\beta}_p}$, *існує єдиний керуючий параметр* $\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) \in R^n$, *при якому розв'язок* $\overset{(n)}{x}_p = \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)$ *рівняння*

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}) + \overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0)$$

такий, що $\overset{(n)}{x}_p(0, \overset{(n)}{x}_0) = \overset{(n)}{x}_0$, *задовольняє крайову умову (13). Для того щоб функція* $\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)$ *була розв'язком крайової задачі (12), (13), необхідно і досить, щоб* $\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) = 0$. *При цьому*

$$\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) = \frac{1}{T}\overset{(n)}{H}_p\Bigg\{\overset{(n)}{d} - \Big(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\Big)\overset{(n)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{p}\overset{(n)}{A}_i L\overset{(n)}{f}(t_i, \overset{(n)}{x}_p, (t, \overset{(n)}{x}_0))\Bigg\} -$$

$$-S\overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}_p, (t, \overset{(n)}{x}_0)),$$

а $\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)$ *є граничною функцією послідовності*

$$\overset{(n)}{x}_{p_m}(t, \overset{(n)}{x}_0) = \overset{(n)}{x}_0 + \frac{1}{T}\overset{(n)}{H}_p\Bigg\{\overset{(n)}{d} - \Big(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\Big)\overset{(n)}{x}_0 \sum_{i=1}^{p}\overset{(n)}{A}_i L\overset{(n)}{f}(t_i, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}, (t, \overset{(n)}{x}_0))\Bigg\},$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Для того щоб здійснити редукцію крайової задачі (1), (2) до задачі (12), (13), накладемо на функцію $f(t,x)$ в області D_0 умову належності простору $\widehat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$:

$$\left\|f(t,x') - f(t,x'')\right\| \leq \gamma(t)\varepsilon(m)\ \left\|x' - x''\right\|,$$

де $x' = (x_1, ..., x_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, ...)$, $x'' = (x_1, ..., x_m, x''_{m+1}, x''_{m+2}, ...)$ — дві довільні точки області D_0, перші m координат яких співпадають, $\gamma(t)$ — неперервна функція від t, $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to 0$. Замість виконання умов в), е), з) вимагатимемо виконання відповідно умов

в$_1$) $Q' = \dfrac{KT}{2}\left[1 + \|H\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right] < 1;$

е$_1$) $Q'_p = \dfrac{KT}{2}\left[1 + \|H_p\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right] < 1;$

з$_1$) $\overset{(n)}{Q}{}'_p = \dfrac{KT}{2}\left[1 + \|\overset{(n)}{H}_p\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right] < 1.$

Введемо позначення

$$\beta^*(x) = \frac{2/KT - 1}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|} \left(\|d\| + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| + \|C\| \right) \|x\| \right) + \frac{M}{K}. \tag{15}$$

Оскільки $\beta(x) \le \beta^*(x),\ \beta_p(x) \le \beta^*(x),\ \overset{(n)}{\beta}_p(\overset{(n)}{x}) \le \beta^*(x)$ при довільних натуральних p і n, то з (15) неважко встановити, що із співвідношення

$$D_{\beta^*} \ne \varnothing \tag{16}$$

випливає справедливість співвідношень (6), (10), (14) при $p, n \in N$.

Застосовуючи до крайової задачі (1), (2) ідею вкорочення, розвинену в [8], одержуємо таке твердження.

Теорема 4. *Припустимо, що $f(t,x) \in \widehat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$ в області D_0, виконується співвідношення (15) і для всіх натуральних $p \ge p_0$, $n \ge n_0$ виконуються умови теорем* 1 – 3. *Якщо при цьому*

$$\|H_p - H\| \le \nu(p), \tag{17}$$

де $\nu(p) \to 0$ при $p \to \infty$, то справедливі граничні співвідношення

$$x_p(t, x_0) = \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0), \quad x^*(t, x_0) = \lim_{p\to\infty} x_p(t, x_0),$$

і, як наслідок,

$$x^*(t, x_0) = \lim_{p\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0) \right), \tag{18}$$

де збіжність по n здійснюється покоординатно, а збіжність по p — за нормою, причому повторна границя у правій частині (18) має властивість комутативності.

Відзначимо, що остання теорема передбачає, взагалі кажучи, справедливість всіх умов теорем 1 – 3, деякі з яких є, до того ж, посиленими. Проте іноді вдається обмежитись умовами, що накладаються лише на вихідну крайову задачу (1), (2).

Припустимо, що всі елементи матриць A_i, $i = 1, 2, \ldots$, невід'ємні, причому

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\| < 1 \tag{19}$$

і

$$\frac{KT}{2} \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|}{1 - \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{t_i}{T} A_i + C - E \right\|} \right) < 1, \tag{20}$$

де E — нескінченна одинична матриця. Оскільки в цьому випадку

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A}_i+\overset{(n)}{C}-\overset{(n)}{E}\right\|\le\left\|\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}A_i+C-E\right\|\le\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}A_i+C-E\right\|<1 \tag{21}$$

при довільних натуральних n і p, то при довільних натуральних n і p існують матриці

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}\left(E-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}A_i-C\right)^k,\qquad H_p=\sum_{k=0}^{\infty}\left(E-\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}A_i-C\right)^k,$$

$$\overset{(n)}{H}_p=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\overset{(n)}{E}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A}_i-\overset{(n)}{C}\right)^k.$$

При цьому, згідно з теоремою про обернений оператор [9],

$$\|H\|\le\frac{1}{1-\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}A_i+C-E\right\|}=H^*. \tag{22}$$

Нерівності (21) приводять до того, що при довільних натуральних n і p

$$\|H_p\|\le H^*,\qquad \|\overset{(n)}{H}_p\|\le H^*. \tag{23}$$

З оцінок (19) – (23) випливає справедливість умов в), е), з).

Таким чином, одержуємо наступний результат.

Теорема 5. *Нехай $f(t,x)\in\widehat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$ в області D_0, всі елементи матриць A_i, $i=1,2,3,\ldots$, невід'ємні, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|$ збіжний, виконуються оцінки (5), (17), (19), (20) і множина D_{β^*} непорожня. Тоді справедливі твердження теорем* 1 – 4.

Окремо розглянемо випадок, коли рівняння (1) лінійне відносно x. Позначимо через $P(t)=[p_{ik}(t)]_{i,k=1}^{\infty}$ обмежену за нормою нескінченну матрицю, елементи якої неперервні по t на $[0,T]$, а через $\overset{(n)}{P}(t)=[p_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n}$ — скінченновимірну матрицю, одержану з $P(t)$ видаленням елементів, для яких хоча б один з номерів рядка чи стовпця більший за n. Покладемо тепер $f(t,x)=P(t)x$ і розглянемо для рівняння

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x \tag{24}$$

крайові задачі з крайовими умовами (2), (3), а для рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}=\overset{(n)}{P}(t)\overset{(n)}{x} \tag{25}$$

— крайову задачу з крайовою умовою (13).

Через M_0 позначимо сталу, для якої

$$\max\left\{\|P(t)\|_{t\in[0,T]}, \sup_i\{\|A_i\|\}, \sup_p\{\|H_p\|\}, \|d\|\right\} \le M_0 = \text{const} < \infty, \tag{26}$$

і припустимо, що справджується нерівність

$$\max\left\{\left\|P(t) - \overset{(n)}{P}(t)\right\|_{t\in[0,T]}, \sup_i\left\{\left\|A_i - \overset{(n)}{A}_i\right\|\right\}, \left\|C - \overset{(n)}{C}\right\|,\right.$$
$$\left.\sup_p\left\{\left\|H_p - \overset{(n)}{H}_p\right\|\right\}, \left\|d - \overset{(n)}{d}\right\|\right\} \le \beta(n), \tag{27}$$

де $\beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Легко переконатись, що в цьому випадку функція $f(t,x) = P(t)x$ при $x \in D_{\beta^*}$, задовольняє умови (5), де можна взяти, наприклад, $K = M_0$, і при виконанні відповідних умов для задач (24), (2); (24), (3) і (25), (13) справедливі твердження теорем 1 – 4.

Зберігаючи попередній зміст виразів $\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0), x_p(t,x_0)$ і $x^*(t,x_0)$, сформулюємо аналог теореми 5 для розглядуваних задач.

Теорема 6. *Нехай матриця $P(t)$ обмежена і неперервна на відрізку $[0,T]$, всі елементи матриць A_i, $i = 1,2,3,...$, невід'ємні, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|A_i\|$ збіжний, виконуються оцінки (19), (20), (26), (27) і множина D_{β^*} непорожня. Тоді при будь-якому $x_0 \in D_{\beta^*}$, що задовольняє нерівність*

$$\left\|x_0 - \overset{(n)}{x}_0\right\| \le \beta(n),$$

і при довільних натуральних p, n справедливі твердження теорем 1 – 5, і збіжність як по p, так і по n здійснюється за нормою. При цьому виконується оцінка

$$\left\|\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0) - x_p(t,x_0)\right\| \le \beta(n)\frac{1 + 2M_0 + 3(p+2)M_0^2 + pM_0MT}{1-Q}.$$

3. Достатні та необхідні умови розв'язуваності крайової задачі. Поряд з визначальною функцією (9) введемо до розгляду наближену визначальну функцію

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T}H\left\{d - \left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i + C\right)x_0 - \sum_{i=1}^{\infty}A_i Lf(t_i, x_m(t,x_0))\right\} - Sf(t, x_m(t,x_0)), \tag{28}$$

і на її основі — наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0. \tag{29}$$

Застосовуючи лему 6.4 з [8], одержуємо такий результат.

Теорема 7. *Нехай виконуються припущення теореми* 1, *і, крім того:*

1) для деякого цілого m, $m = 1,2,...$, відображення існує ізольований розв'язок рівняння (29);

2) існує замкнена обмежена множина $D_1 \subset D_\beta$, що містить точку x_0, така, що Δ_m топологічно відображає D_1 на $\Delta_m D_1$, переводячи межу Γ_{D_1} множини D_1 в $\Gamma_{\Delta m D_1}$;

3) на Γ_{D_1} виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in \Gamma_{D_1}} \|\Delta_m(x_0)\| \geq K\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|\right)\frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок $x = x^*(t), x^*(0) = x_0^*$, причому $x_0^* \in D_1$.

Для наближеного відшукання початкового значення розв'язку крайової задачі (1), (2) сформулюємо допоміжне твердження.

Лема 1. *Якщо для крайової задачі (1), (2) виконуються умови теореми 1, то для довільних точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ відхилення граничних функцій $x^*(t, x_0')$, $x^*(t, x_0'')$ послідовностей $x_m(t, x_0'), x_m(t, x_0'')$ вигляду (7) оцінюється нерівністю*

$$\left\|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')\right\| \leq \frac{1 + \|R\|}{1-Q}\,\|x_0' - x_0''\|,$$

де $R = H\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i + C\right)$.

Наступні теореми неважко перевірити за схемою, запропонованою в [5].

Теорема 8. *При виконанні припущень теореми 1 визначальна функція $\Delta(x_0)$ вигляду (9) визначена, неперервна в області D_β і для всіх $x_0', x_0'' \in D_\beta$ справедлива оцінка*

$$\left\|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')\right\| \leq \left\{\frac{1}{T}\|R\| + K\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\| + 1\right)\frac{1+\|R\|}{1-Q}\right\}\|x_0' - x_0''\|.$$

З одержаних оцінок випливає така необхідна умова розв'язуваності крайової задачі (1), (2).

Теорема 9. *Припустимо, що виконуються умови теореми 1. Тоді для того щоб деяка область $D_2 \subset D_\beta$ містила елемент $x_0 = x_0^*$, який визначає при $t = 0$ початкове значення $x^*(0) = x_0^*$ розв'язку крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\overline{x}_0 \in$ $\in D_2$ виконувалася нерівність*

$$\|\Delta_m(\overline{x}_0)\| \leq \sup_{x \in D_2}\left\{\left\{\frac{1}{T}\|R\| + K\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\| + 1\Big)\frac{1+\|R\|}{1-Q}\right\}\|x - \overline{x}_0\| + \right.$$

$$\left. + K\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\| + 1\Big)\frac{Q^m}{1-Q}\beta(\overline{x}_0)\right\}.$$

На підставі останньої теореми неважко вказати конструктивний алгоритм наближеного відшукання початкового значення розв'язку крайової задачі (1), (2), аналогічний до сформульованого в [5].

Подібні результати можна одержати і для багатоточкової крайової задачі (1), (3).

4. Оцінка похибки обчислення початкового значення розв'язку. В теоремі 7 вже вказано достатні умови, при виконанні яких з існування ізольованого розв'язку рівняння (28) випливає існування розв'язку точного визначального рівняння (8). Наведемо умови, при виконанні яких, навпаки, з розв'язуваності точного випливає розв'язуваність наближеного визначального рівняння. Одержано також умови, що забезпечують існування розв'язків наближеного визначального рівняння.

Застосовуючи до послідовності відображень $\{\Delta_m\}$ лему 6.4 з [8], аналогічно до теореми 1 з [10] одержуємо такий результат.

Лема 2. *Нехай для крайової задачі (1), (2), що задовольняє в області (4) умови теореми 1, існує розв'язок $x = x^*(t)$ такий, що задовольняє початкову умову $x^*(0) = x_0^*$, і при цьому:*

1) x_0^* в деякій кулі

$$D_\delta = \{x_0 : \|x_0 - x_0^*\| \le \delta,\ \delta > 0\} \tag{30}$$

є ізольованим розв'язком рівняння (8);

2) Δ топологічно відображає D_δ на $\Delta D_\delta \subset \mathfrak{M}$.

Тоді наближене визначальне рівняння (29) при досить великих m має в кулі (30) розв'язок $x_0 = x_{0m}$, причому при $m \to \infty$ послідовність $\{x_{0m}\}$ збіжна за нормою до значення x_0^*:

$$\|x_{0m} - x_0^*\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{31}$$

При деяких умовах сильної диференційовності для правої частини рівняння (1) оцінимо швидкість збіжності в (31), а також знайдемо відхилення $x_m(t, x_{0m})$ від $x^*(t, x_0^*)$. Для довільної функції $f(x_1, x_2, ..., x_s) : \underbrace{\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{M}}_{s} \longmapsto \mathfrak{M}$ через $\dfrac{\partial_\Phi f(x_1, x_2, ..., x_s)}{\partial_\Phi x_i}$ позначатимемо часткову похідну Фреше цієї функції по аргументу x_i.

Справедливе таке твердження.

Лема 3. *Нехай права частина рівняння (1) задовольняє в області (4) припущення теореми 1 і є сильно диференційовною по x, причому виконуються співвідношення*

$$\left\|\frac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x}\right\| \le K,$$

$$\left\|\frac{\partial_\Phi f(t, x'(t,x_0))}{\partial_\Phi x_0} - \frac{\partial_\Phi f(t, x''(t,x_0))}{\partial_\Phi x_0}\right\| \le K \left\|\frac{\partial_\Phi x'(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0} - \frac{\partial_\Phi x''(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\|,$$

де $x, x'(t,x_0), x''(t,x_0) \in D$.

Тоді при $x_0 \in D_\beta$ для похідних Фреше $\dfrac{\partial_\Phi x_m(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0}$, $\dfrac{\partial_\Phi x_p(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0}$, $\dfrac{\partial_\Phi \Delta_m(x_0)}{\partial_\Phi x_0}$, $\dfrac{\partial_\Phi \Delta_p(x_0)}{\partial_\Phi x_0}$ від функцій (7), (28) справджуються нерівності

$$\left\|\frac{\partial_\Phi x_p(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\| \le \beta_R; \qquad \left\|\frac{\partial_\Phi x_m(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0} - \frac{\partial_\Phi x_p(t,x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\| \le R_{1p};$$

$$\left\|\frac{\partial_\Phi \Delta_p(x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\| \le \frac{1}{T}\|R\| + K\beta_R R_2, \qquad \left\|\frac{\partial_\Phi \Delta_m(x_0)}{\partial_\Phi x_0} - \frac{\partial_\Phi \Delta_p(x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\| \le K R_{1p} R_2,$$

де $\beta_R = \dfrac{1+\|R\|}{1-Q},\ R_1 = Q^p\beta_R,\ R_2 = \left[1+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|\right]$, p, m *— довільні натуральні числа.*

Використовуючи оцінки останньої леми і теорему про обернений оператор [9], одержуємо такий результат.

Теорема 10. *Нехай справедливе твердження леми 3 і для всіх* $x_0, x_0', x_0'' \in D_\beta$ *виконуються умови:*

1) похідна $\dfrac{\partial_\Phi \Delta_m(x_0)}{\partial_\Phi x_0}$ *визначальної функції* $\Delta_m(x_0)$ *вигляду (28) неперервна по* x_0*;*

2) $\|\Delta_m(x_0') - \Delta_m(x_0'')\| \geq \inf\limits_{0\leq\theta\leq 1}\left\|\dfrac{\partial_\Phi \Delta_m(x_0' + \theta(x_0'' - x_0'))}{\partial_\Phi x_0}\right\| \|x_0' - x_0''\|$*;*

3) при деякому $p < m$ *існують числа* $q_1, q_2, 0 < q_1, q_2 < 1$*, такі, що виконуються оцінки*

$$\left\|E - \frac{\partial_\Phi \Delta_p(x_0)}{\partial_\Phi x_0}\right\| \leq q_1, \qquad \frac{KR_{1p}R_2}{1-q_1} \leq q_2,$$

де $E : \mathfrak{M} \longmapsto \mathfrak{M}$ *— тотожний оператор.*

Тоді:

1) для відхилення розв'язків x_{0m} *і* x_0^* *відповідно наближеного і точного визначальних рівнянь справедлива оцінка*

$$\|x_0^* - x_{0m}\| \leq \frac{Q^m KR_2\beta(x_0^*)}{(1-Q)(1-q_1)(1-q_2)},$$

і $\|x_0^* - x_{0m}\| \to 0$ *при* $m \to \infty$*;*

2) наближений розв'язок $x_m(t, x_{0m})$ *крайової задачі (1), (2), знайдений за рекурентною формулою (7), при* $m \to \infty$ *рівномірно збіжний до її точного розв'язку* $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ *— граничної функції послідовності (7), причому*

$$\|x^*(t) - x_m(t, x_{0m})\| \leq \frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_{0m})\left[1 + \frac{KR_2\beta_R(1+\|R\|)}{(1-Q)(1-q_1)(1-q_2)}\right].$$

Зрозуміло, що з міркувань практичного обчислення похибки постає питання про конкретну природу похідної Фреше зліченновимірної вектор-функції $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ...)$ по $x_0 \in \mathfrak{M}$.

Покладемо

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f_i(x_1, x_2, ..., x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, ...) - f_i(x_1, x_2, ..., x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, ...)}{\Delta x_j}. \tag{32}$$

Означення. *Будемо говорити, що функція* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ...)$ *належить простору* $\widehat{C}^1_{\mathrm{Lip}}(\overline{S})$ *на кулі*

$$\overline{S}(x_0, \delta) = \{x \in \mathfrak{M} \mid \|x - x_0\| \leq \delta,\ x_0 \in \mathfrak{M}\}, \tag{33}$$

якщо на цій кулі виконуються такі умови:

1) *функція* $f(x)$ *обмежена за нормою і задовольняє посилену умову Ліпшиця* $\|f(x') - f(x'')\| \leq L\varepsilon(m)\,\|x' - x''\|$*, де* $x', x'' \in \overline{S}(x_0, \delta)$ *— довільні точки, перші* $m - 1$ *координат яких співпадають,* $L > 0$ *— стала,* $\varepsilon(m) \to 0$ *при* $m \to \infty$*;*

2) *всі часткові похідні* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,\ldots$, *вигляду (32) існують і матриця* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$ *обмежена за нормою;*

3) *при довільному* $j \in N$ *вектор* $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_j}, \cdots\right)$ *задовольняє посилену умову Гельдера*

$$\left\| \frac{\partial f(x')}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x'')}{\partial x_j} \right\| \le K' \varepsilon'(m) \left\| x' - x'' \right\|^{\alpha},$$

де $x', x'' \in \overline{S}(x_0, \delta)$ — *довільні точки, перші* $m-1$ *координат яких співпадають,* K', α — *додатні сталі, ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varepsilon'(m)$ *збіжний.*

Справедливе таке твердження.

Теорема 11. *Нехай функція* $f(x) : \mathfrak{M} \longmapsto \mathfrak{M}$ *належить простору* $\widehat{C}^1_{\mathrm{Lip}}(\overline{S})$ *на деякій кулі (38). Тоді в кожній внутрішній точці* x *цієї кулі функція* $f(x)$ *має похідну Фреше по* x, *причому* $\frac{\partial_\Phi f(x)}{\partial_\Phi x} = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$.

5. Реалізація методу. Проілюструємо розроблений метод дослідження і відшукання розв'язків крайових задач на конкретному прикладі. Нехай на відрізку $t \in [0,1]$ потрібно проінтегрувати зліченну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{1-2t}{2^{n+2}} x_{n+1}^2, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{34}$$

визначену в області

$$D_0 = [0,1] \times D = [0,1] \times \{x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| \le 2\} \tag{35}$$

при зліченноточковій крайовій умові

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) + C x(1) = d, \tag{36}$$

де крайові моменти t_i, матриці $A_i = \left[a^i_{jk}\right]_{j,k=1}^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots$, $C = [c_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$, вектор $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ мають вигляд

$$\begin{gathered} A_0 = -E, \quad C = E, \quad a^i_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot 4^{i+1}}, & j = k = i; \\ 0, \ \ (j-i)^2 + (k-i)^2 \ne 0, \end{cases} \\ d_i = \frac{1}{2 \cdot 4^{i+1}} e^{\frac{1}{2 \cdot 4^{i+1}}}, \quad t_i = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{i+1}}}, \ \ i = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{37}$$

E — нескінченна одинична матриця.

Неважко перевірити, що:

1) для зліченновимірної вектор-функції $f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), ...)$, де $f_n(t,x) = \dfrac{1-2t}{2^{n+2}} x_{n+1}^2$, в області (35) виконуються умови (5) зі сталими $M = \dfrac{1}{2}$, $K = \dfrac{1}{2}$;

2) матриці A_i, $i = 1, 2, ...$, і C обмежені в сукупності за нормою одиницею, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^{i+1}} = \dfrac{1}{24}$ збіжний, і для матриці $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{t_i}{T} A_i + C$ існує обернена матриця $H = [h_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$. Елементи останньої мають вигляд

$$h_{jk} = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{2 \cdot 4^{i+1}} \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{i+1}}}\right)\right)^{-1}, & j = k = i; \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

і число $\|H\| = \sup\limits_j \sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_{jk}| = \sup\limits_j |h_{ii}| = 1$;

3) стала $Q = \dfrac{KT}{2} \left[1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right] = \dfrac{1}{4} \left[1 + \dfrac{1}{24}\right] = \dfrac{25}{96} < 1$.

Визначимо множину точок D_β, що належать області D разом зі своїм β-околом, або хоча б якусь її підмножину. З (35) маємо, що $D_\beta \neq \varnothing$, якщо існують $x_0 \in D$, для яких

$$\|x_0\| + \beta(x_0) \leq 2. \tag{38}$$

З виразу для $\beta(x_0)$, враховуючи наведені вище значення вхідних величин, одержуємо

$$\begin{aligned} \|x_0\| + \beta(x_0) \leq \|x_0\| + \frac{T}{2} M + \\ + \|H\| \left(\|d\| + \left\|\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right\| \|x_0\|\right) + \|H\| \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| \alpha_1(t_i) M \leq \\ \leq \|x_0\| + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{32} e^{\frac{1}{32}} + \frac{1}{32}\|x_0\|\right) + \\ + 1 \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{33}{32}\|x_0\| + \frac{35}{96} + \frac{1}{32} e^{\frac{1}{32}} \leq 2. \end{aligned}$$

Очевидно, якщо виконується остання нерівність, то справджується і нерівність (38). Тому досить вимагати виконання оцінки

$$\frac{33}{32}\|x_0\| + \frac{25}{96} + \frac{1}{32} e^{\frac{1}{32}} \leq 2,$$

звідки $\|x_0\| \leq 1,65560436$.

Отже, множина

$$D_\gamma = \{x_0 \in \mathfrak{M} \,|\, \|x_0\| \leq 1,65560436\} \subset D_\beta. \tag{39}$$

Тоді в області $[0,1] \times D_\gamma$, згідно з (39) та теоремою 1, всі умови якої виконуються, до крайової задачі (1), (2) можна застосувати чисельно-аналітичний метод послідовних наближень.

Початкове значення $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ...)$ розв'язку знайдемо, розв'язавши визначальне рівняння нульового наближення, яке одержимо з (28) при $m = 0$:

$$\Delta_0(x_0) = 0. \tag{40}$$

Використовуючи одержані числові дані, для i-ї координати векторної рівності (40) маємо рівняння

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{i+1}}}\right)}\left\{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} x_{0i} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{i+1}}}} \left[\frac{1-2t}{2^{i+2}} x_{0i+1}^2 - \int\limits_0^1 \frac{1-2s}{2^{i+2}} x_{0i+1}^2 ds\right] dt\right\} - \int\limits_0^1 \frac{1-2t}{2^{i+2}} x_{0i+1}^2\, dt = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots ,$$

яке рівносильне такій зліченній системі алгебраїчних рівнянь:

$$e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - x_{0i} - \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} x_{0i+1}^2 = 0, \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{41}$$

З (41) неважко встановити, що

$$1 < x_{0i} < e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots ,$$

і оскільки $0 < |x_{0i} - 1| = x_{0i} - 1 < e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - 1$, $\left(e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - 1\right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то за наближене значення точного розв'язку рівняння (40) можна взяти вектор $x_0 = (1, 1, ..., 1, ...) \in D_\beta$.

За рекурентною формулою (7) знаходимо перше наближення до точного розв'язку крайової задачі (1), (2) вигляду $x_1(t, x_0) = (x_{11}(t, x_0), x_{12}(t, x_0), ..., x_{1n}(t, x_0), ...)$. Для $x_{1i}(t, x_0)$ з (7) маємо

$$x_{1i}(t, x_0) = 1 + \frac{t - t^2}{2^{i+2}} + \alpha_{1i} t, \qquad i = 1, 2, \dots , \tag{42}$$

де $\alpha_{1i} = \left(e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - 1 - \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}\right) \Big/ \left(2\cdot 4^{i+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{i+1}}}\right)$.

Неважко встановити справедливість подвійної нерівності

$$0 < \alpha_{1i} < \frac{12}{95\cdot 64^{i+1}},$$

і оскільки $\alpha_{1i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то для більшої зручності подальших обчислень знехтуємо останнім доданком в (42) і візьмемо за перше наближення вектор $x_1(t, x_0)$ з координатами

$$x_{1i}(t, x_0) = 1 + \frac{t - t^2}{2^{i+2}}, \qquad i = 1, 2, \dots .$$

Аналогічно, для другого наближення $x_2(t,x_0) = (x_{21}(t,x_0), x_{22}(t,x_0), ..., x_{2n}(t,x_0), ...)$, згідно з (7), одержуємо

$$x_{2i}(t,x_0) = 1 + \frac{t-t^2}{2^{i+2}} + \left(\frac{t-t^2}{2^{i+2}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{t-t^2}{2^{i+2}}\right)^3 + \alpha_{2i}t, \qquad i = 1,2,\ldots,$$

де

$$\alpha_{2i} = \left(e^{\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}} - 1 - \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} - \left(\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 4^{i+1}}\right)^3\right) \Big/ \left(2\cdot 4^{i+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{i+1}}}\right),$$

$$\alpha_{2i} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

і т. д.

Можна перевірити, що точним розв’язком крайової задачі (34) – (37) є зліченновимірна вектор-функція $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), ...)$ така, що

$$x_n^*(t) = \exp\left(\frac{t-t^2}{2^{n+2}}\right), \qquad n = 1,2,...,$$

і, виходячи з результатів, викладених в п. 2 даної статті, здійснити редукцію цієї задачі до відповідної скінченновимірної багатоточкової задачі вигляду (12), (13).

1. *Мартинюк О.М.* Дослідження розв’язків крайових задач для зліченних нелінійних систем диференціальних рівнянь: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1993. — 115 с.
2. *Мартынюк С.В.* Исследование решений краевых задач для счетных систем нелинейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1992. — 128 с.
3. *Перестюк Н.А., Ронто А.Н.* Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 9. — С. 1243 – 1253.
4. *Савіна Т.В.* Дослідження розв’язків багатоточкових крайових задач чисельно-аналітичним методом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1995. — 114 с.
5. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
6. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, № 4. — С. 16 – 23.
7. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Там же. — 1966. — **18**, № 2. — С. 9 – 18.
8. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
9. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища шк., 1974. — 456 с.
10. *Вайникко Г.М.* О сходимости метода коллокации для нелинейных систем дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1966. — **6**, № 1. — С. 35 – 42.

Одержано 13.09.98