НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ

А.М. Самойленко

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: imath2@mail.kar.net

Я.Р. Петришин

Чернів. ун-т,
Україна, 274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

By using the averaging method, we prove the solvability of multipoint problems with the parameters for nonlinear oscillation systems. The deviation of solutions of original and averaged problems is estimated.

Доведена розв'язність багатоточкових задач з параметрами для нелінійних коливних систем за допомогою методу усереднення. Встановлено також оцінки відхилення розв'язків вихідних і усереднених задач.

Розглядається типова для багатьох задач нелінійної механіки [1, 2] багаточастотна коливна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \tau, \mu), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \tau, \mu), \tag{1}$$

права частина якої визначена при $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in [0, L]$, $\mu \in G \subset \mathbb{R}^s$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, D і G — обмежені області, $\varepsilon_0 << 1$.

Задамо для рівнянь (1) багатоточкові крайові умови вигляду

$$F(x|_{\tau=\tau_1}, \dots, x|_{\tau=\tau_r}, \varphi|_{\tau=\tau_1}, \dots, \varphi|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

де $F(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, \mu, \varepsilon)$ — $(n + m + s)$-вимірна вектор-функція змінних $p_j \in D$, $q_j \in \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in G$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $j = \overline{1, r}$; $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_r \le L$, $r \ge 2$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти неперервно диференційовну вектор-функцію $(x; \varphi) = (x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ змінної τ і такі значення невідомих параметрів: $\mu = = \mu(\varepsilon) = (\mu_1, \dots, \mu_s)$, тобто сукупність $\{x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon); \mu(\varepsilon)\} \in D \times \mathbb{R}^m \times G$, яка задовольняє рівняння (1) для всіх $(\tau; \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ і крайові умови (2). Згідно з прийнятою термінологією, задача (1), (2) називається крайовою задачею з параметрами. Зазначимо, що в даний час відомі різні підходи до розв'язання таких задач. Зокрема, в монографії [3] розглядаються проекційно-ітеративні методи, а в роботі [4] — чисельно-аналітичні.

В даній статті продовжуються дослідження, розпочаті в роботах [5, 6]. Для розв'язання задачі (1), (2) використаємо метод усереднення за всіма швидкими змінними $\varphi =$

$= (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Така схема усереднення викликає значні труднощі, оскільки коливна система (1) містить повільні та швидкі змінні і їй властиве явище резонансу [7].

Припустимо, що:

а) функція $c(x, \varphi, \tau, \mu) = (a(x, \varphi, \tau, \mu); b(x, \varphi, \tau, \mu))$ має неперервні і обмежені сталою σ_1 частинні похідні по $(x, \varphi, \tau, \mu) \in D \times \mathbb{R}^m \times [0, L] \times G$ до другого порядку включно, майже періодична по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, причому

$$c(x, \varphi, \tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k(x, \tau, \mu); b_k(x, \tau, \mu)) e^{i(\lambda_k, \varphi)},$$

де i — уявна одиниця, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq 0$ при $k \geq 1$, (λ_k, φ) — скалярний добуток векторів $\lambda_k = (\lambda_k^{(1)}, \ldots, \lambda_k^{(m)})$ і $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, а функції $c_k = (a_k(x, \tau, \mu); b_k(x, \tau, \mu))$ задовольняють нерівність

$$\sup \|c_0\| + \sup \left\| \frac{\partial c_0}{\partial x} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial c_0}{\partial \mu} \right\| + \sum_{j=1}^{n} \left(\sup \left\| \frac{\partial^2 c_0}{\partial x \partial x_j} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 c_0}{\partial \mu \partial x_j} \right\| \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\|\lambda_k\| + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \right) \sup \|c_k\| + \left(1 + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \right) \left(\sup \left\| \frac{\partial c_k}{\partial x} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial c_k}{\partial \tau} \right\| + \right. \right.$$

$$\left. + \sup \left\| \frac{\partial c_k}{\partial \mu} \right\| \right) + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sup \left\| \frac{\partial^2 c_k}{\partial x \partial x_j} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 c_k}{\partial \tau \partial x_j} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 c_k}{\partial \mu \partial x_j} \right\| \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \sup \left\| \frac{\partial^2 c_k}{\partial \mu \partial \tau} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1;$$

тут супремум береться по всіх $(x, \tau, \mu) \in D \times [0, L] \times G$, а під нормою матриці розуміємо суму модулів її елементів;

б) $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)) \in C_{[0,L]}^{m-1+l}$, а вронскіан функцій $\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)$ має на відрізку $[0, L]$ нулі кратності не більшої l;

в) $F(Q, \varepsilon)$ і $\dfrac{\partial}{\partial Q} F(Q, \varepsilon)$ рівностайно по ε рівномірно неперервні по $\Theta = (p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots$ $\ldots, q_r, \mu) \in K = D \times \ldots \times D \times \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m \times G$ і $\left\| \dfrac{\partial}{\partial Q} F(Q, \varepsilon) \right\| \leq \sigma_2 = \text{const}$.

Розглянемо усереднену за всіма змінними φ задачу

$$\frac{d\overline{x}}{\tau} = \overline{a}(\overline{x}, \tau, \mu), \tag{3_1}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{\partial \tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{b}(\overline{x}, \tau, \mu), \tag{3_2}$$

$$F(\overline{x}|_{\tau=\tau_1}, \ldots, \overline{x}|_{\tau=\tau_r}, \overline{\varphi}|_{\tau=\tau_1}, \ldots, \overline{\varphi}|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon) = 0, \tag{3_3}$$

де

$$(\overline{a}; \overline{b}) = \lim_{T \to \infty} T^{-m} \int_0^T \cdots \int_0^T (a(\overline{x}, \varphi, \tau, \mu); b(\overline{x}, \varphi, \tau, \mu)) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m \equiv$$

$$\equiv (a_0(\overline{x}, \tau, \mu); b_0(\overline{x}, \tau, \mu)) = c_0(\overline{x}, \tau, \mu).$$

Усереднена задача часто буває значно простіша, ніж вихідна, оскільки рівняння для повільних змінних $\overline{x}$ розв'язуються незалежно від швидких змінних $\overline{\varphi}$, після чого $\overline{\varphi}$ визначається інтегруванням.

Надалі через $(x(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon); \varphi(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon))$ і $(\overline{x}(\tau, y, \mu); \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon))$ позначатимемо ті розв'язки систем відповідно (1) і (3_1), (3_2), які при $\tau = 0$ набувають значення $(y; \psi) \in D \times \mathbb{R}^m$, а через $D_\rho \times G_\rho$ — множину тих точок $(y; \mu) \in D \times G$, для яких крива $\overline{x} = \overline{x}(\tau, y, \mu)$ лежить в D разом із своїм ρ-околом для $\tau \in [0, L]$. Вважатимемо, що при деякому $\rho_0 > 0$ множина $D_{\rho_0} \times G_{\rho_0}$ непорожня.

Лема 1. *Якщо виконуються умови а), б), то при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для всіх $(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon) \in [0, L] \times D_{\rho_0} \times \mathbb{R}^m \times G_{\rho_0} \times (0, \varepsilon_0] \equiv B$ виконується нерівність*

$$\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \psi}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \leq \overline{\sigma}\varepsilon^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{m+l}, \tag{4}$$

де $u = (x(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon) - (\overline{x}(\tau, y, \mu); \varphi(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon)) - \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon))$, σ — стала, незалежна від ε.

Доведення. При зроблених припущеннях нерівності вигляду

$$\|u\| \leq \underline{\sigma_1}\varepsilon^\alpha, \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| \leq \underline{\sigma_1}\varepsilon^\alpha, \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial \psi}\right\| \leq \underline{\sigma_1}\varepsilon^\alpha \tag{5}$$

доведені в роботі [7], тому встановимо оцінку

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \leq \overline{\sigma_1}\varepsilon^\alpha. \tag{6}$$

Із рівнянь (1), (3_1), (3_2) для $\dfrac{\partial u}{\partial \mu} \equiv v(\tau)$ випливає зображення

$$v(\tau) = \int\limits_0^\tau \left[A_1 v(t) + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + A_3 \frac{\partial \overline{x}}{\partial \mu} + A_4\right] dt, \tag{7}$$

в якому

$$A_1 = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad A_2 = \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \quad A_3 = \frac{\partial}{\partial x}(c - \overline{c}), \quad A_4 = \frac{\partial}{\partial \mu}(c - \overline{c}),$$

$$c = c(x, \varphi, t, \mu), \quad \overline{c} = c_0(\overline{x}, t, \mu), \quad x = x(t, y, \psi, \mu, \varepsilon),$$

$$\varphi = \varphi(t, y, \psi, \mu, \varepsilon), \quad \overline{x} = \overline{x}(t, y, \mu), \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, y, \psi, \mu, \varepsilon).$$

Оскільки середнє по φ матриці A_2 тотожно дорівнює нулю, а норми матриць $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ і $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}$, згідно з рівняннями (1), обмежені для всіх $t \in [0, L]$, то, використовуючи умови а), б) та рівномірні оцінки осциляційних інтегралів [7], дістаємо нерівність

$$\left\|\int\limits_0^\tau A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\, dt\right\| \leq \sigma^{(1)}\varepsilon^\alpha \quad \forall\, (t, y, \psi, \mu, \varepsilon) \in B. \tag{8}$$

Подамо далі A_3 у вигляді

$$A_3 = \frac{\partial}{\partial x}(c(x,\varphi,t,\mu) - c(\overline{x},\overline{\varphi},t,\mu)) + \frac{\partial}{\partial x}(c(\overline{x},\overline{\varphi},t,\mu) - \overline{c}(\overline{x},t,\mu)). \qquad (9)$$

Перший доданок у правій частині (9) завдяки умові гладкості а) і нерівностям (5) оцінюється зверху величиною $\sigma_1\underline{\sigma_1}\varepsilon^\alpha$, а середнє по φ від другого доданка є тотожним нулем, тому існує така стала $\sigma^{(2)}$, незалежна від ε, що

$$\left\|\int\limits_0^\tau A_3\frac{\partial\overline{x}}{\partial\mu}\,dt\right\| \le \sigma^{(2)}\varepsilon^\alpha \quad \forall\,(t,y,\psi,\mu,\varepsilon)\in B. \qquad (10)$$

Аналогічно встановлюється оцінка

$$\left\|\int\limits_0^\tau A_4\,dt\right\| \le \sigma^{(3)}\varepsilon^\alpha \quad \forall\,(t,y,\psi,\mu,\varepsilon)\in B. \qquad (11)$$

Враховуючи нерівності (8), (10), (11), із рівності (7) за допомогою леми Гронуолла – Беллмана виводимо оцінку (6). Лему доведено.

Позначимо через $P(\varepsilon)$ квадратну $(n+m+s)$-вимірну матрицю

$$\left(\sum_{j=1}^r\left(\frac{\partial F^0}{\partial p_j}\frac{\overline{x}(\tau_j,x^0,\mu^0)}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial q_j}\int\limits_0^{\tau_j}\frac{\partial\overline{b}(\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0),\tau,\mu^0)}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)}{\partial x^0}\,d\tau\right);\ \sum_{j=1}^r\frac{\partial F^0}{\partial q_j};\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^r\left(\frac{\partial F^0}{\partial p_j}\frac{\partial\overline{x}(\tau_j,x^0,\mu^0)}{\partial\mu^0} + \frac{\partial F^0}{\partial q_j}\int\limits_0^{\tau_j}\frac{\partial\overline{b}(\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0),\tau,\mu^0)}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)}{\partial\mu^0}\,d\tau\right) + \frac{\partial F^0}{\partial\mu^0}\right),$$

де $\dfrac{\partial F^0}{\partial p_j}$, $\dfrac{\partial F^0}{\partial q_j}$ і $\dfrac{\partial F^0}{\partial\mu^0}$ — значення матриць частинних похідних функції $F(p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r,\mu,\varepsilon)$ при $p_k = \overline{x}(\tau_k,x^0,\mu^0)$, $q_k = \overline{\varphi}(\tau_k,x^0,\varphi^0,\mu^0,\varepsilon)$, $\mu = \mu^0$, $k=\overline{1,r}$.

Теорема 1. *Нехай: 1) виконуються умови а) – в); 2) при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $\{\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0);\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\mu^0,\varepsilon);\mu^0\}$ усередненої задачі (3_1) – (3_3), для якого $x^0=x^0(\varepsilon)\in D_{\rho_0}$, $\varphi^0=\varphi^0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^m$, $\mu^0=\mu^0(\varepsilon)\in G_{\rho_0}$; 3) $\|P^{-1}(\varepsilon)\|\le\sigma_0=\mathrm{const}$. Тоді для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0>0$ — досить мале) існує єдиний розв'язок $\{x(\tau,\varepsilon);\varphi(\tau,\varepsilon);\mu(\varepsilon)\}$ крайової задачі (1), (2), який задовольняє нерівність*

$$\begin{gathered}\|x(\tau,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\mu^0,\varepsilon)\| + \|\mu(\varepsilon)-\mu^0\| \le \sigma_3\varepsilon^\alpha \\ \forall\,(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]\end{gathered} \qquad (12)$$

зі сталою σ_3, незалежною від ε.

Доведення. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered}\{x(\tau,\varepsilon);\varphi(\tau,\varepsilon);\mu(\varepsilon)\} = \{x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon); \\ \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon);\ \mu^0+\Delta\},\end{gathered} \qquad (13)$$

а невідомі параметри $y \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і $\Delta \in \mathbb{R}^s$ визначаємо із крайових умов (2). Якщо позначити $z = (y, \psi, \Delta)$, то одержимо рівність

$$z = -P^{-1}(\varepsilon)\{[F - \overline{F}] + [\overline{F} - P(\varepsilon)z]\} \equiv M(z, \varepsilon), \tag{14}$$

в якій $F = F(x(\tau_1, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon), \ldots, \varphi(\tau_r, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon), \mu^0 + \Delta, \varepsilon)$, $\overline{F} = F(\overline{x}(\tau_1, x^0 + y, \mu^0 + \Delta), \ldots, \overline{\varphi}(\tau_r, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon), \mu^0 + \Delta, \varepsilon)$.

Враховуючи обмеження в) і оцінку (4), дістаємо нерівність

$$\|\overline{F}\| \leq \sigma_2 \overline{\sigma} \varepsilon^{\alpha}. \tag{15}$$

Із умов гладкості правих частин усереднених рівнянь (3_1), (3_2) випливають рівності

$$\begin{gathered}
\overline{x}(\tau, x^0 + y, \mu^0 + \Delta) = \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0) + \frac{\partial \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0)}{\partial x^0} y + \frac{\partial \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0)}{\partial \mu^0} \Delta + X(\tau, y, \Delta), \\
\overline{\varphi}(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon) = \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon) + \psi + \\
+ \int\limits_0^{\tau} \frac{\partial \overline{b}(\overline{x}(\tau, x^0, \mu^0), \tau, \mu^0)}{\partial \overline{x}} \frac{\partial \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0)}{\partial x^0} \, d\tau y + \\
+ \int\limits_0^{\tau} \left[\frac{\partial \overline{b}(\overline{x}(\tau, x^0, \mu^0), \tau, \mu^0)}{\partial \overline{x}} \frac{\partial \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0)}{\partial \mu^0} + \frac{\partial \overline{b}(\overline{x}(\tau, x^0, \mu^0), \tau, \mu^0)}{\partial \mu^0} \right] d\tau \Delta + Y(\tau, y, \Delta),
\end{gathered} \tag{16}$$

в яких

$$\|X(\tau, y, \Delta)\| + \|Y(\tau, y, \Delta)\| \leq \widetilde{\sigma}_3, \quad \widetilde{\sigma}_3 = \text{const}, \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial x^0} \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0) \right\| \leq n e^{\sigma_1 L},$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mu^0} \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0) \right\| \leq L s \sigma_1 e^{L s \sigma_1}.$$

Оскільки $\dfrac{\partial}{\partial Q} F(Q, \varepsilon)$ рівностайно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ рівномірно неперервна по $Q \in K$, то для довільної точки Q^0 і додатного числа δ_1 (його ми означимо нижче) існує таке $\delta_2 > 0$, незалежне від Q^0 і ε, що

$$\left\| \frac{\partial}{\partial Q} F(Q^0 + Q, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial Q} F(Q^0, \varepsilon) \right\| \leq \delta_1 \quad \text{при} \quad \|Q\| < \delta_2. \tag{17}$$

Тоді, враховуючи рівності

$$F(Q^0 + Q, \varepsilon) = F(Q^0, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Q} F(Q^0, \varepsilon) Q + F_1,$$

$$F_1 = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial Q} F(Q^0 + tQ, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial Q} F(Q^0, \varepsilon) \right] dt Q$$

і крайову умову (3_3), для $\overline{F}$ можна записати зображення

$$\overline{F} = P(\varepsilon)z + L_1(z,\varepsilon), \tag{18}$$

в якому

$$\|L_1(z,\varepsilon)\| \leq \delta_1\sigma_4\|z\|, \quad \|z\| \leq \delta_2\sigma_4^{-1},$$

$$\sigma_4 = r\left[e^{Ls\sigma_1}(n + Ls\sigma_1)(1 + Ln\sigma_1) + Ls\sigma_1 + 1 + \widetilde{\sigma}_3\right].$$

Таким чином, із рівностей (14), (18) і нерівності (15) одержимо оцінку $\|M(z,\varepsilon)\| \leq$ $\leq (\overline{\sigma}\sigma_2\varepsilon^\alpha + \delta_1\sigma_4\|z\|)\sigma_0$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і $\|z\| \leq \delta_2\sigma_4^{-1}$. Звідси випливає, що $M(z,\varepsilon)$ відображає множину $U = \{z\colon z \in \mathbb{R}^{n+m+s},\ \|z\| \leq \sigma_5\varepsilon^\alpha\}$, $\sigma_5 = 2\sigma_0\overline{\sigma}\sigma_2$, в себе, якщо вибрати

$$\delta_1 \leq \frac{1}{4\sigma_0\sigma_4}, \quad \varepsilon_0 \leq [\delta_2^{-1}\sigma_4\sigma_5]^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Покажемо, що $M\colon U \to U$ є відображенням стиску. Із (14) маємо

$$\frac{\partial M(z,\varepsilon)}{\partial z} = -P^{-1}(\varepsilon)\left\{\left(\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\frac{\partial\overline{x}}{\partial y} + \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y}\right)\right];\right.\right.$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial\psi} + \frac{\partial F}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\psi}\right];$$

$$\left.\left.\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\frac{\partial\overline{x}}{\partial\Delta} + \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial\Delta}\right) + \frac{\partial F}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\Delta} + \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\Delta}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial\mu^0}\right) - P(\varepsilon)\right\}, \tag{19}$$

де

$$\overline{x} = \overline{x}(\tau_j, x^0 + y, \mu^0 + \Delta), \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\tau_j, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon),$$

$$\widetilde{x} = x(\tau_j, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon) - \overline{x}, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi(\tau_j, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon) - \overline{\varphi}.$$

Враховуючи рівності (16) і нерівності (4), (17), одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = \frac{\partial F^0}{\partial p_j} + F_j^{(1)}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{\partial F^0}{\partial q_j} + F_j^{(2)}, \quad \frac{\partial F}{\partial\mu^0} = \frac{\partial F^0}{\partial\mu^0} + F^{(3)}, \tag{20}$$

в яких $\|F_j^{(1)}\| + \|F_j^{(2)}\| + \|F^{(3)}\| < \delta_1$ при

$$\left[re^{\sigma_1 L}(n + Ls\sigma_1 + (Ln\sigma_1 + 1)(Ls\sigma_1 + 1)) + 1\right]\|z\| + 2r\overline{\sigma}\varepsilon^\alpha \leq \delta_2.$$

Оскільки $\|z\| \leq \sigma_5\varepsilon^\alpha$, то останню нерівність можна задовольнити за рахунок досить малого $\varepsilon_0 > 0$.

Розглянемо далі усереднені рівняння (3_1), (3_2). Згідно з припущеннями, функції $\overline{a}$ і $\overline{b}$ мають обмежені частинні похідні по x, φ, μ до другого порядку включно і $z \in U$, тому можна вказати таку сталу σ_6, незалежну від ε, що функція $v(\tau, a, \theta, \mu, \varepsilon) = (\overline{x}(\tau, a, \mu); \overline{\varphi}(\tau, a, \theta, \mu, \varepsilon))$ справджує нерівність

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^0} v(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x^0} v(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon) \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{\partial}{\partial \mu^0} v(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \mu^0} v(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon) \right\| \leq \sigma_6 \varepsilon^\alpha \tag{21}$$

$$\forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0].$$

Використовуючи рівності (20) і оцінки (4), (21), із (19) дістаємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial M(z, \varepsilon)}{\partial z} \right\| \leq 6\sigma_0 \sigma_2 r (\overline{\sigma} + \sigma_6) \varepsilon^\alpha + \sigma_7 \delta_1,$$

де

$$\sigma_7 = \sigma_0 r \left[2 + n e^{\sigma_1 L} (1 + L n \sigma_1) + L s \sigma_1 e^{L s \sigma_1} (1 + L + L n \sigma_1) \right].$$

Виберемо $\varepsilon_0 > 0$ настільки малим, щоб

$$6\sigma_0 \sigma_2 r (\overline{\sigma} + \sigma_6) \varepsilon_0^\alpha \leq \sigma_7 \delta_1,$$

і покладемо в (17)

$$\delta_1 = \frac{1}{4} \min \left\{ \frac{1}{\sigma_0 \sigma_4}; \frac{1}{\sigma_7} \right\}.$$

Тоді

$$\left\| \frac{\partial M(z, \varepsilon)}{\partial z} \right\| \leq 2\sigma_7 \delta_1 \leq \frac{1}{2},$$

тобто $M\colon U \to U$ є відображенням стиску. Тому існує єдиний розв'язок $z(\varepsilon) \equiv \{y(\varepsilon); \psi(\varepsilon); \Delta(\varepsilon)\} \in U$ рівняння (14), а значить, і єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), який можна задати формулою (13) при $y = y(\varepsilon)$, $\psi = \psi(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ і який лежить в малому околі розв'язку усередненої задачі (3_1) – (3_3). Оцінка (12) зі сталою $\sigma_3 = \overline{\sigma} + L\sigma_1 \sigma_5 e^{L\sigma_1}$ випливає із обмеження $z(\varepsilon) \in U$ і нерівності (4). Зазначимо, що коли покласти $\varepsilon_0^\alpha \leq \dfrac{\rho}{2\sigma_3}$, то крива $x = x(\tau, \varepsilon)$ лежатиме в D разом зі своїм $\dfrac{1}{2}\rho$-околом для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$. Теорему доведено.

Зауваження. Отриманий вище результат встановлений при суттєвому припущенні $\|P^{-1}(\varepsilon)\| \leq \sigma_0$. Відмітимо, що аналогічне теоремі 1 твердження справедливе в тому випадку, коли

$$\|P^{-1}(\varepsilon)\| \leq \sigma_0 \varepsilon^{-\beta} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{22}$$

а матриця $\dfrac{\partial}{\partial Q} F(Q, \varepsilon)$ справджує умову Гельдера

$$\left\| \frac{\partial}{\partial Q} F(Q, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial Q} F(Q_1, \varepsilon) \right\| \leq \overline{\sigma_0} \|Q - Q_1\|^l \tag{23}$$

для всіх $Q, Q_1 \in K, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тут $\sigma, \overline{\sigma_0}, \beta, l$ $(l \leq 1)$ — додатні сталі, причому

$$\beta < \frac{l}{l+1}\alpha. \tag{24}$$

Доведення наступної теореми по суті повторює доведення теореми 1.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1, 2 теореми 1 і нерівності (22) – (24), то при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $\{x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon); \mu(\varepsilon)\}$ задачі (1), (2), який лежить в $\overline{\sigma_3}\varepsilon^{\alpha-\beta}$-околі розв'язку усередненої задачі $(З_1)$ — $(З_3)$ для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$.*

Задамо тепер для рівнянь (1) крайові умови

$$\Phi(x|_{\tau=\nu_1}, \ldots, x|_{\tau=\nu_r}, \mu, \varepsilon) = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon)\varphi|_{\tau=\nu_j} = C(\varepsilon), \tag{26}$$

в яких $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$ і $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ — невідомі параметри, $r \geq 2$, $0 \leq \nu_j \leq L$, Φ — $(n+s+r)$-вимірна вектор-функція, $B_j(\varepsilon)$ і $C(\varepsilon)$ — відповідно $(m \times m)$- і $(m \times 1)$-матриці.

Істотна відмінність задачі (1), (23), (26) від задачі (1), (2) полягає в тому, що в першій з них невідомі параметри ν_j, $j = \overline{1, r}$, пов'язані з часовою змінною τ. В цьому випадку значно ускладнюється розв'язання крайової задачі, оскільки $\dfrac{d\varphi_k}{d\tau} \sim \dfrac{1}{\varepsilon}$, $k = \overline{1, m}$, тобто мала зміна часової змінної τ породжує, взагалі кажучи, велику зміну величини φ_k. Цим обумовлений один з найпростіших варіантів крайових умов (26) для змінних φ.

Припустимо, що

г) $\Phi(S, \varepsilon)$ і $\dfrac{\partial}{\partial S}\Phi(S, \varepsilon)$ рівностайно по ε рівномірно неперервні по $S = (p_1, \ldots, p_r, \mu) \in$ $\in D \times \cdots \times D \times G \equiv \widetilde{K}$ і

$$\left\| \frac{\partial}{\partial S}\Phi(S, \varepsilon) \right\| \leq \overline{\sigma_2} = \mathrm{const}.$$

Лема 2. *Нехай: 1) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $x^0 = x^0(\varepsilon) \in D_{\rho_0}$, $\mu^0 = \mu^0(\varepsilon) \in G_{\rho_0}$, $\nu^0 = (\nu_1^0, \ldots, \nu_r^0) = \nu^0(\varepsilon)$ рівняння*

$$\Phi(\overline{x}(\nu_1^0, x^0, \mu^0), \ldots, \overline{x}(\nu_r^0, x^0, \mu^0), \mu^0, \varepsilon) = 0,$$

для якого

$$d_1 = \min_{1 \leq j \leq r} \inf_{\varepsilon} \nu_j^0(\varepsilon) > 0, \quad d_2 = \max_{1 \leq j \leq r} \sup_{\varepsilon} \nu_j^0(\varepsilon) < L;$$

2) $\det \sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon) \neq 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв 'язок $\{\overline{x}(\tau, \varepsilon); \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon); \mu^0; \nu^0\}$ усередненої задачі $(З_1)$, $(З_2)$, (25), (26).

Доведення. Покладемо $\overline{x}(\tau, \varepsilon) \equiv \overline{x}(\tau, x^0, \mu^0,)$, $\overline{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon)$, де

$$\varphi^0 = \left(\sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon) \right)^{-1} \left[C(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_0^{\nu_j^0} (\omega(\tau) + \varepsilon \overline{b}(\overline{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \mu^0))\, d\tau \right].$$

Оскільки $x^0 \in D_{\rho_0}$, $\mu^0 \in G_{\rho_0}$, то крива $(\overline{x}(\tau,\varepsilon);\overline{\varphi}(\tau,\varepsilon))$ лежить в $D\times\mathbb{R}^m$ для всіх $(\tau,\varepsilon)\in$ $\in [0,L]\times(0,\varepsilon_0]$. Лему доведено.

Для розв'язання задачі (1), (25), (26) застосуємо схему, яка була запропонована при доведенні теореми 1. Якщо розв'язок вказаної задачі шукати у вигляді

$$\{x(\tau,\varepsilon);\varphi(\tau,\varepsilon);\mu(\varepsilon);\nu(\varepsilon)\}\equiv\{x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon);$$
$$\varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon);\mu^0+\Delta;\nu^0+h\}, \tag{27}$$

то для визначення невідомих величин $(y;\Delta;h)\equiv v\in\mathbb{R}^{n+r+s}$, згідно з (25), одержимо рівняння

$$v=-P_1^{-1}(\varepsilon)[(\Phi-\overline{\Phi})+(\overline{\Phi}-P_1(\varepsilon)v)]\equiv M_1(v,\psi,\varepsilon). \tag{28}$$

Тут $\Phi=\Phi(x(\nu_1^0+h_1,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon),\dots,x(\nu_r^0+h_r,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+\Delta,\varepsilon),\mu^0+\Delta,\varepsilon)$, $\overline{\Phi}=\Phi(\overline{x}(\nu_1^0+h_1,x^0+y,\mu^0+\Delta),\dots,\overline{x}(\nu_r^0+h_r,x^0+y,\mu^0+\Delta),\mu^0+\Delta,\varepsilon)$, $h=(h_1,\dots,h_r)$, а квадратна $(n+r+s)$-вимірна матриця $P_1(\varepsilon)$ визначається рівністю

$$P_1(\varepsilon)=\Bigg(\sum_{j=1}^r\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j}\frac{\partial\overline{x}(\nu_j^0,x^0,\mu^0)}{\partial x^0};\ \sum_{j=1}^r\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j}\frac{\partial\overline{x}(\nu_j^0,x^0,\mu^0)}{\partial\mu^0}+\frac{\partial\Phi^0}{\partial\mu^0};$$
$$\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_1}\overline{a}(\overline{x}(\nu_1^0,x^0,\mu^0),\nu_1^0,\mu^0);\dots;\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_r}\overline{a}(\overline{x}(\nu_r^0,x^0,\mu^0),\nu_r^0,\mu^0),\Bigg)$$

в якій через $\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial p_j}$, $j=\overline{1,r}$, і $\dfrac{\partial\Phi^0}{\mu^0}$ позначено значення матриць частинних похідних функції $\Phi(p_1,\dots,p_r,\mu,\varepsilon)$ при $p_i=\overline{x}(\nu_i^0,x^0,\mu^0)$, $i=\overline{1,r}$, $\mu=\mu^0$.

Нехай

$$\|P_1^{-1}(\varepsilon)\|\le\sigma_0=\mathrm{const}\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{29}$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що при досить малому $\varepsilon_0>0$ для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $\psi\in\mathbb{R}^m$ відображення $M_1\colon U_1\to U_1$, де $U_1=\{v\colon v\in\mathbb{R}^{n+r+s},\|v\|\le\sigma_8\varepsilon^\alpha\}$, σ_8 — незалежна від ε стала, є стиснутим, тому існує єдиний розв'язок $v=v(\psi,\varepsilon)\equiv$ $\equiv\{y(\psi,\varepsilon);\Delta(\psi,\varepsilon);h(\psi,\varepsilon)\}\in U_1$ рівняння (28), який неперервно залежить від ψ.

Після підстановки у (26) замість v значення $v(\psi,\varepsilon)$ одержимо рівняння для визначення ψ:

$$\psi=-\left(\sum_{j=1}^r B_j(\varepsilon)\right)^{-1}\sum_{j=1}^r B_j(\varepsilon)\Bigg\{\underset{\sim}{\varphi}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\nu_j^0}^{\nu_j^0+h_j(\psi,\varepsilon)}[\omega(\tau)+\varepsilon\overline{b}(\overline{x}(\tau,x^0+y(\psi,\varepsilon),$$
$$\mu^0+\Delta(\psi,\varepsilon)),\tau,\mu^0+\Delta(\psi,\varepsilon))]\,d\tau+\int\limits_0^{\nu_j^0}[\overline{b}(\overline{x}(\tau,x^0+y(\psi,\varepsilon),$$
$$\mu^0+\Delta(\psi,\varepsilon)),\tau,\mu^0+\Delta(\psi,\varepsilon))-\overline{b}(\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0),\tau,\mu^0)]\,d\tau\Bigg\}\equiv M_2(\psi,\varepsilon), \tag{30}$$

де $\varphi = \varphi(\nu_j, x^0 + y(\psi,\varepsilon), \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta(\psi,\varepsilon), \varepsilon) - \overline{\varphi}(\nu_j, x^0 + y(\psi,\varepsilon), \varphi^0 + \psi, \mu^0 + \Delta(\psi,\varepsilon), \varepsilon)$, $h(\tilde{\psi}, \varepsilon) = (h_1(\psi,\varepsilon), \ldots, h_r(\psi,\varepsilon))$.

При зроблених вище припущеннях існує така незалежна від ε стала σ_9, що для всіх $(\psi,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\|M_2(\psi,\varepsilon)\| \le \left\| \left(\sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon) \right)^{-1} \right\| \sum_{j=1}^{r} \|B_j(\varepsilon)\| \sigma_9 \varepsilon^{\alpha-1} \equiv f(\varepsilon).$$

Крім того, вектор-функція $M_2(\psi,\varepsilon)$ неперервна по ψ. Тому, згідно з теоремою Шаудера [8] про нерухому точку, існує розв'язок $\psi = \psi(\varepsilon)$, $\|\psi(\varepsilon)\| \le f(\varepsilon)$, рівняння (30), тобто існує розв'язок

$$\{x(\tau,\varepsilon); \varphi(\tau,\varepsilon); \mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)\} \equiv \{x(\tau, x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \mu^0 + \Delta(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varepsilon);$$
$$\varphi(\tau, x^0 + y(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \mu^0 + \Delta(\psi(\varepsilon),\varepsilon), \varepsilon); \mu^0 + \Delta(\psi(\varepsilon),\varepsilon); \nu^0 + h(\psi(\varepsilon),\varepsilon)\}$$

крайової задачі (1), (25), (26), який задовольняє нерівність

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon) - \psi(\varepsilon)\| + \|\mu(\varepsilon) - \mu^0\| +$$
$$+ \|\nu(\varepsilon) - \nu^0\| \le \sigma_{10}\varepsilon^{\alpha} \quad \forall (\tau,\varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0] \tag{31}$$

зі сталою σ_{10}, незалежною від ε.

Зазначимо, що вибір малим $\varepsilon_0 > 0$ обумовлений також обмеженнями $x(\tau,\varepsilon) \in D$, $\mu(\varepsilon) \in G \quad \forall (\tau,\varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ і нерівністю $\sigma_{10}\varepsilon_0^{\alpha} \le \dfrac{1}{2}\min\{d_1; L - d_2\}$, яка гарантує належність кожної із координат $\nu_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1, r}$, вектора $\nu(\varepsilon)$ відрізку $[0, L]$.

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Припустимо, що виконуються умови а), б), г) умови леми 2 і нерівність (29). Тоді можна вказати такі сталі $\varepsilon_0 > 0$ і $\sigma_{10} > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує розв'язок $\{x(\tau,\varepsilon); \varphi(\tau,\varepsilon); \mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)\}$ крайової задачі (1), (25), (26), який задовольняє нерівність (31).*

1. *Митропольский Ю.А.* Адиабатический инвариант для двойного маятника с медленно меняющимися длинами // Мат. физика и нелинейн. механика. — 1990. — **14**. — С. 30 – 39.
2. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 395 с.
3. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
4. *Ронто Н.И., Король И.И.* Исследование и решение краевых задач с параметром численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 8. — С. 1031 – 1043.
5. *Самойленко А.М., Петришин Я.Р.* Метод усереднення в багатоточкових задачах теорії нелінійних коливань // Там же. — 1996. — **48**, № 8. — С. 1036 – 1043.
6. *Самойленко А.М., Петришин Я.Р.* Крайові задачі з параметрами для багаточастотної коливної системи // Там же. — 1997. — **49**, № 4. — С. 581 – 589.
7. *Петришин Р.І.* Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення: Дис. . . . д-ра фіз-мат. наук. — Київ, 1995. — 248 с.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

Одержано 21.12.98