НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

УСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ СЛУЧАЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Л.И. Каранджулов

Техн. ун-т, Ин-т прикл. математики и информатики,
Болгария, 1000, София, п.к. 384
e-mail: likar@vmei.acad.bg

A criterion for existence of an unique asymptotic solution is obtained for a singular perturbed linear Noetherian boundary value problem for ordinary differential equation assumption that the matrix of the linear part has a spectrum, which is non equal to zero.

It is proved that boundary value problem has a solution with two boundary layers and it is constructed the asymptotic of thos solution.

Для нетерової сингулярно збуреної лінійної крайової задачі отримано критерій існування єдиного асимптотичного розв'язку у випадку, коли спектр матриці лінійної частини не дорівнює нулю. Доведено, що крайова задача має розв'язок з двома примежовими шарами, та побудовано асимптотику цього розв'язку.

1. Постановка задачи. В работах А.Н. Тихонова [1, 2] заложены основы теории сингулярных возмущений для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разные методы для асимптотического исследования сингулярно возмущенных задач приведены в [3]. Результаты А.Б. Васильевой [4, 5] и А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова [6, 7] широко используются для построения асимптотических решений систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Вопросы, связанные с асимптотическим вычислением релаксационных колебаний, рассмотрены в [8, 9]. Метод регуляризации сингулярных возмущений изложен в [10]. В работах [11, 12] разработан метод расщепления дифференциальных уравнений для получения асимптотических разложений, близких к регуляризованным.

В данной работе рассматривается поведение при $\varepsilon \to 0$ решения линейной краевой задачи

$$\varepsilon\dot{x} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \qquad t \in [a,b], \;\; 0 < \varepsilon << 1, \tag{1}$$

$$l(x) = h, \qquad h \in R^m, \tag{2}$$

причем коэффициенты системы (1) и равенство (2) подчинены условиям:

1) $A_1(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, $A_1(t) \in C^\infty[a,b]$; $\varepsilon(t)$ — n-мерная вектор-функция, $\varepsilon(t) \in C^\infty[a,b]$;

2) A — постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, $\det\, A \neq 0$; если λ_i — собственные числа матрицы A, то предполагаем, что $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{1,k}$, $k < n$; $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ $i = \overline{k+1,n}$;

3) l — линейный векторный функционал, определенный на пространстве n-мерных, непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций: $l = \operatorname{col}(l_1, ..., l_m)$, $l : C[a,b] \to R^m$.

 © Л.И. Каранджулов, 1999

Условие 2 показывает, что мы рассматриваем условно устойчивый случай [6].

Рассмотрим задачу (1), (2) в классе непрерывно дифференцируемых функций. Тогда область определения $D(L_\varepsilon)$ оператора $(L_\varepsilon x)(t) = \varepsilon \dot{x}(t) - Ax(t) - \varepsilon A_1(t)x(t)$ состоит из функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные и удовлетворяющих краевому условию (2). При $\varepsilon = 0$ получаем вырожденное уравнение $Ax_0(t) + \varphi(t) = 0$, решение которого $x_0(t) = -A^{-1}\varphi(t)$ для произвольных $\varphi(t) \in C^\infty[a, b]$ не принадлежит области определения $D(L_\varepsilon)$ оператора L_ε, так как, вообще говоря, условие $l(x_0) = h$ не выполняется.

Пусть уравнение (1) разрешимо при любом $\varepsilon \in C^\infty[a, b]$. Тогда размерность ядра оператора L_ε равна размерности n системы, и краевая задача (1), (2) является нетеровой с индексом $n - m : \operatorname{ind}[L_\varepsilon, l] = n - m \neq 0$. Она будет фредгольмовой ($\operatorname{ind}[L_\varepsilon, l] = 0$) тогда и только тогда, когда $m = n$ [1].

В настоящей работе мы получим условие разрешимости и построим асимптотическое решение задачи (1), (2) в случае $m \neq n$. Покажем, что при определенных условиях краевая задача (1), (2) имеет решение с двумя пограничными слоями в окрестностях точек $t = a$ и $t = b$. Приведем асимптотическую оценку этого решения относительно малого параметра ε. Решение при $\varepsilon \to 0$ будет стремится к решению вырожденной системы при $t \in (a, b)$.

Случай $\det\ A \neq 0$ исследован в [13].

В фредгольмовом случае $(m = n)$ асимптотическое интегрирование краевой задачи для нелинейных и слабонелинейных систем с краевым условием в двух точках изучено в [6, 7] с помощью пограничных функций, а в [10] с помощью метода регуляризации.

2. Формальное асимптотическое разложение. Формальное асимптотическое разложение решений задачи (1), (2) будем искать в виде ряда

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} [x_i(t) + \Pi_i(\tau) + Q_i(\nu)]\, \varepsilon^i, \qquad \tau = \frac{t-a}{\varepsilon},\ \nu = \frac{t-b}{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $x_i(t)$, $\Pi_i(\tau)$ и $Q_i(\nu)$ — неизвестные n-мерные вектор-функции, причем через $\Pi_i(\tau)$ (см. [6, 7]) обозначены пограничные функции в окрестности точки $t = a$, а через $Q_i(\nu)$ — пограничные функции в окрестности точки $t = b$. Они будут построены так, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняются неравенства

$$\|\Pi_i(\tau)\| \leq \gamma_i \exp(-\alpha_i \tau), \quad \tau \geq 0, \qquad \|Q_i(\nu)\| \leq \overline{\gamma}_i \exp(\overline{\alpha}_i, \nu), \quad \nu \leq 0.$$

Здесь $\gamma_i, \overline{\gamma}_i$ и $\alpha_i, \overline{\alpha}_i$ — некоторые положительные постоянные при $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Подставляя ряд (3) в систему (1), для $x_i(t)$ получаем рекуррентные выражения

$$x_i(t)q = \begin{cases} -A^{-1}\varphi(t), & i = 0; \\ A^{-1}(Lx_{i-1})(t), & i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

где L — дифференциальный оператор, $L = \dfrac{d}{dt} - A_1(t)$.

Пограничные функции $\Pi_i(t)$ и $Q_i(\nu)$ получаем как решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_i(\tau) = A\Pi_i(\tau) + f_i(\tau), \qquad \tau \in [0, \tau_b],\ \tau_b = \frac{b-a}{\varepsilon}, \tag{5}$$

$$f_i(\tau) = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \sum\limits_{q=i-1}^{0} \dfrac{1}{q!} \tau^q A_1^{(q)}(a) \Pi_{i-1-q}(\tau), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{d}{d\nu} Q_i(\nu) = A Q_i(\nu) + \overline{f}_i(\nu), \qquad \nu \in [\nu_a, 0], \;\; \nu_a = \frac{b-a}{\varepsilon}, \tag{7}$$

$$\overline{f}_i(\nu) = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \sum\limits_{q=i-1}^{0} \dfrac{1}{q!} \nu^q A_1^{(q)}(b) Q_{i-1-q}(\nu), & i = 1, 2, \dots . \end{cases} \tag{8}$$

На основании (2) коэффициенты ряда (3) удовлетворяют краевым условиям

$$l(x_i) + l\left(\Pi_i\left(\frac{(\cdot) - a}{\varepsilon}\right)\right) + l\left(Q_i\left(\frac{(\cdot) - b}{\varepsilon}\right)\right) = \begin{cases} h, \; i = 0; \\ 0, \; i = 1, 2, \dots . \end{cases} \tag{9}$$

Известно, что если спектр оператора A распадается на два спектральных множества, лежащих внутри левой и правой полуплоскости, то для уравнения $\dot{x} = Ax$ существуют интегральные многообразия S^+ (устойчивое) и S^- (неустойчивое). Решения, начинающиеся в S^+, экспоненциально убывают (оставаясь в S^+), а решения, начинающиеся в S^-, экспоненциально возрастают (оставаясь в S^-).

Решение системы (5), (7) будем искать в виде суммы решений однородной системы $\dot{x} = Ax$ с начальным условием, принадлежащим S^+, и частного решения, которое экспоненциально затухает.

Для системы $\dfrac{d}{d\tau}\Pi_i(\tau) = A\Pi_i(\tau)$ устойчивое интегральное многообразие имеет вид

$$\Pi_{i2}(\tau) = H\Pi_{i1}(\tau), \qquad i = 0, 1, \dots, \tag{10}$$

где $\Pi_i(\tau) = [\Pi_{i1}(\tau), \Pi_{i2}(\tau)]^T$, $\Pi_{i1}(\tau)$ и $\Pi_{i2}(\tau)$ — соответственно k- и $(n-k)$-мерные вектор-функции.

Для системы $\dfrac{d}{d\nu} Q_i(\nu) = AQ_i(\nu)$ это многообразие имеет аналогичный вид

$$Q_{i1}(\nu) = \overline{H} Q_{i2}(\tau), \qquad i = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

где $Q_i(\nu) = [Q_{i1}(\nu)\, Q_{i2}(\nu)]^T$, $Q_{i1}(\nu)$ и $Q_{i2}(\nu)$ — соответственно k- и $(n-k)$-мерные вектор-функции.

Обозначим через B постоянную матрицу, которая удовлетворяет условию

$$B^{-1}AB = [A_+, A_-],$$

так что $\mathrm{Re}\lambda_j(A_+) < 0, \; j = \overline{1,k}, \; \mathrm{Re}\lambda_j(A_-) > 0, j = \overline{1,n}$. Если

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

и $\det B_{11} \neq 0, \det B_{22} \neq 0$, то $H = B_{21}B_{11}^{-1}$, $\overline{H} = B_{12}B_{22}^{-1}$, где H имеет размерность $(n - -k) \times k$, а $\overline{H}$ — $k \times (n-k)$.

Обозначим через $X(t)$ нормированную фундаментальную матрицу системы $\dot{x} = Ax$.

Лемма 1. *Пусть для матрицы A выполняется условие 2, P — спектральный проектор матрицы A на левую полуплоскость, а для функций $g(\tau) \in C[0,\infty), \overline{g}(\nu) \in C(-\infty, 0]$ выполнены неравенства*

$$\|g(\tau)\| \le c^* \exp(-\alpha^* \tau), \quad c^* > 0,\ \alpha^* > 0,\ \tau \ge 0,$$

$$\|\overline{g}(\nu)\| \le \overline{c}^* \exp(-\overline{\alpha}^* \nu), \quad \overline{c}^* > 0,\ \overline{\alpha}^* > 0,\ \nu \le 0.$$

Тогда система $\dfrac{d}{d\tau}x = Ax + g(\tau),\ \tau \in [0,\infty),\ \dfrac{d}{d\nu}y = Ay + \overline{g}(\nu),\ \nu \in (-\infty, 0]$*, имеет частные решения* $(L_r g)(\tau), (L_\nu \overline{g})(\nu)$ *вида*

$$(L_\tau g)(\tau) = \int\limits_0^\infty K(\tau,s)g(s)ds, \qquad (L_\nu \overline{g})(\nu) = \int\limits_{-\infty}^0 \overline{K}(\nu,s)\overline{g}(s)ds, \tag{12}$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\|(L_\tau g)(\tau)\| \le c \exp(-\gamma\tau), \quad \tau \ge 0; \qquad \|(L_\nu \overline{g})(\nu)\| \le \overline{c} \exp(\overline{\gamma}\nu), \quad \nu \le 0,$$

где $c, \overline{c}, \gamma, \overline{\gamma}$ *— некоторые положительные постоянные, а*

$$K(\tau,s) = \begin{cases} X(\tau)PX^{-1}(s), & 0 \le s \le \tau < +\infty; \\ -X(\tau)(I-P)X^{-1}(s), & 0 \le \tau \le s < +\infty, \end{cases}$$

$$\overline{K}(\nu,s) = \begin{cases} -X(\nu)(I-P)X^{-1}(s), & -\infty < \nu \le s \le 0; \\ X(\nu)PX^{-1}(s), & -\infty < s \le \nu < 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы проверяется непосредственно.

Пусть $i = 0$. Из (5) и (7) следует, что решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0(\tau) = A\Pi_0(\tau), \qquad \tau \in [0, +\infty), \tag{13}$$

$$\frac{d}{d\nu}Q_0(\nu) = AQ_0(\nu), \qquad \nu \in (-\infty, 0], \tag{14}$$

имеют вид

$$\Pi_0(\tau) = X(\tau)\Pi_0(0),\ \ \tau \in [0, +\infty), \qquad Q_0(\nu) = X(\nu)Q_0(0),\ \ \nu \in (-\infty, 0], \tag{15}$$

причем $\Pi_0(0)$ и $Q_0(0)$ принадлежат линейным интегральным многообразиям (10), (11). Получаем

$$\Pi_0(0) = [E_k\,, H]^T \Pi_{01}(0), \qquad Q_0(0) = [\overline{H}\,, E_{n-k}]^T Q_{02}(0),$$

где E_k и E_{n-k} — соответственно $(k \times k)$- и $(n-k) \times (n-k)$-мерные единичные матрицы.

Обозначим через $X_k(\tau) = X(\tau)[E_k,\, H]^T$ $(n-k)$-мерную матрицу, а через $\overline{X}_{n-k}(\nu) = [\overline{X}, E_{n-k}]^T$ — $(n\times(n-k))$-мерную матрицу. Тогда решения $\Pi_0(\tau)$ и $Q_0(\nu)$ (15) принимают вид

$$\begin{aligned} &\Pi_0(\tau) = X_k(\tau)\Pi_{01}(0), \ \ \tau \in [0, +\infty), \\ &Q_0(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu) Q_{02}(0), \ \ \nu \in (-\infty, 0]. \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть $D_1(\varepsilon) = l\Big(X_k\Big(\dfrac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\Big)\Big)$ — $(m \times k)$-мерная матрица; $D_2(\varepsilon) = l\Big(\overline{X}_{n-k}\Big(\dfrac{(\cdot)-b}{\varepsilon}\Big)\Big)$ — $(m \times (n-k))$-мерная матрица; $h_0 = h + l(A^{-1}\phi(\cdot))$.

Все коэффициенты разложения (3) должны удовлетворять краевым условиям (9). Подставим $x_0(t)$ из (4), $\Pi_0(\tau), Q_0(\nu)$ из (16) в (9) при $k = 0$. Для определения $\Pi_{01}(0)$ и $Q_{02}(0)$ получим алгебраическую систему

$$D_0 \begin{bmatrix} \Pi_{01}(0) \\ Q_{02}(0) \end{bmatrix} = h_0, \tag{17}$$

в которой $D(\varepsilon) = [D_1(\varepsilon),\ D_2(\varepsilon)]$ — $(m \times n)$-мерная матрица.

Структура матрицы $D(\varepsilon)$ зависит от вида функционала l. Матрицы $D(\varepsilon)$ содержат как слагаемые элементы

$$\varepsilon^s \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right), \qquad \alpha > 0, \ \ q \in N.$$

В зависимости от структуры матрицы $D(\varepsilon)$ рассмотрим случай, когда $D(\varepsilon) = D_0 + O\left(\varepsilon^s \exp\Big(-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\Big)\right)$, где $\alpha > 0, s \in N,\ D_0$ — $(m \times n)$-мерная постоянная матрица.

Все члены $\varepsilon^s \exp\left(-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ экспоненциально малы по ε и их можно опустить, поскольку они более высокого порядка малости. Тогда система (17) принимает вид

$$D_0 \begin{bmatrix} \Pi_{01}(0) \\ Q_{02}(0) \end{bmatrix} = h_0. \tag{18}$$

Пусть выполнено условие 4) $\operatorname{rank} D_0 = n_1 < \min(m, n)$. Введем матрицы-ортопроекторы P_{D_0} и $P_{D_0^*}$:

$$P_{D_0} : R^n \to \ker(D_0), \qquad P_{D_0^*} : R^m \to \ker(D_0^*), \qquad D_0^* = D_0^T.$$

Через D_0^+ обозначим единственную по Муру – Пенроузу $(n\times m)$-мерную псевдообратную матрицу к матрице D_0 [14 – 17]. Пусть $P_{D_{0d}^*}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы $P_{D_0^*}$, и $P_{D_{0r}}$ — матрица, составленная из $r = n - n_1$ линейно независимых столбцов матрицы P_0.

Система (18) имеет решение

$$\Pi_{01}(0) = [P_{D_0}^r]_k c_0^r + [D_0^+ h_0]_k, \qquad Q_{02}(0) = [P_{D_0}^r]_{n-k} c_0^r + [D_0^+ h_0]_{n-k} \tag{19}$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{D_0^*} h_0 = 0 \Longrightarrow P_{D_0^*}^d h_0 = 0.$$

Матрицы $[D_0^+h_0]_k$ и $[D_0^+h_0]_{n-k}$ составлены соответственно из k и $n-k$ строк матрицы $D_0^+h_0$ (то же самое можно сказать и о матрицах $[P^r_{D_0}]_k, [P^r_{D_0}]_{n-k}$). Подставим (19) в (16). Тогда $\Pi_0(\tau)$ и $Q_0(\nu)$ будут зависеть от постоянного вектора $c_0^r \in R^r$:

$$\Pi_0(\tau) = X_{kr}(\tau)c_0^r + \overline{\Pi}_0(\tau), \qquad \overline{Q}_0(\nu) = \overline{X}_{n-k,r}(\nu)c_0^r + \overline{Q}_0(\nu), \tag{20}$$

где $X_{kr}(\tau) = X_k(\tau)[P^r_{D_0}]_k$ — $(n\times r)$-мерная матрица, $\overline{X}_{n-k,r}(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu)[P^r_{D_0}]_{n-k}$ — $((n-k)\times r)$-мерная матрица, $\overline{\Pi}_0(\tau) = X_k(\tau)[D_0^+h_0]_k$, $\overline{Q}_0(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu)[D_0^+h_0]_{n-k}$.

Постоянный вектор c_0^r определим при нахождении $\Pi_1(\tau), Q_1(\nu)$.

Из системы (5), (7) при $i=1$ получаем

$$\Pi_1(\tau) = X_k(\tau)\Pi_{11}(0) + (L_\tau f_1)(\tau), \qquad Q_1(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu)Q_{12}(0) + (L_\nu \overline{f}_1)(\nu). \tag{21}$$

Частные решения $(L_\tau f_1)(\tau)$ и $(L_\nu \overline{f}_1)(\nu)$ имеют вид (12). Из (6), (8) и (20) имеем

$$f_1 = f_1(\tau, c_0^r) = A_1(a)\Pi_0(\tau) = F_0(\tau)c_0^r + F_1(\tau),$$

$$\overline{f}_1 = \overline{f}_1(\nu, c_0^r) = A_1(b)Q_0(\nu) = \overline{F}_0(\nu)c_0^r + \overline{F}_1(\nu),$$

где

$$F_0(\tau) = A_1(a)X_{kr}(\tau), \qquad \overline{F}_0(\nu) = A_1(b)X_{n-k,r}(\nu),$$

$$F_1(\tau) = A_1(a)\overline{\Pi}_0, \qquad \overline{F}_1 = A_1(b)\overline{Q}_0(\nu).$$

Функции $f_1(\tau)$, $\overline{f}_1(\nu)$ удовлетворяют условиям леммы 1.

Подставляя (21) в краевые условия (9) при $i=1$:

$$lx_1(\cdot) + l\Pi_1(\cdot) + lQ_1(\cdot) = 0,$$

получаем систему типа (17)

$$D(\varepsilon)\begin{bmatrix}\Pi_{11}(0)\\ Q_{12}(0)\end{bmatrix} = h_1, \tag{22}$$

где

$$h_1(\varepsilon, c_0^r) = -\big(l(L_\tau F_0 + L_\nu \overline{F}_0)\big)(\cdot)c_0^r - \big(lA^{-1}(L_1x_0)\big)(\cdot) - \big(l(L_\tau F_1 + L_\nu \overline{F}_1)\big)(\cdot). \tag{23}$$

Опуская экспоненциально малые элементы в $D(\varepsilon)$, в силу условия 4 получаем решение системы (22):

$$\Pi_{11}(0) = \left[P^r_{D_0}\right]_k c_1^r + \left[D_0^+h_1(\varepsilon)\right]_k, \qquad Q_{12}(0) = \left[P^r_{D_0}\right]_{n-k} c_1^r + \left[D_0^+h_1(\varepsilon)\right]_{n-k}$$

в том и только в том случае, когда

$$P_{D_0^*}h_1(\varepsilon) = 0 \Longrightarrow P^d_{D_0^*}h_1(\varepsilon) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство (23) и обозначая

$$\overline{D}(\varepsilon) = P^d_{D_0^*}\left(l(L_\tau F_0 + L_\nu \overline{F}_0)\right)(\cdot),$$

$$\overline{b}_1(\varepsilon) = -\left(lA^{-1}(L_1 x_0)\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau F_1 + L_\nu \overline{F}_1)\right)(\cdot),$$

имеем

$$\overline{D}(\varepsilon) c_0^r = P^d_{D_0^*} \overline{b}_1(\varepsilon). \tag{24}$$

Предположим, что $\overline{D}(\varepsilon) = \overline{D}_0 + O\Big(\varepsilon^k \exp\Big(-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\Big)\Big)$, $\alpha > 0, k \in N$, $\overline{D}_0$ — $(d \times r)$-мерная постоянная матрица, $\overline{b}_1(\varepsilon) = \overline{b}_{10} + \varepsilon \overline{b}_{11} + \cdots + \varepsilon^s \overline{b}_{1s} + O\Big(\varepsilon^q \exp\Big(-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\Big)\Big)$, $b_{is} \in R^d$. После отбрасывания экспоненциально малых элементов система (24) принимает вид

$$\overline{D}_0 c_0^r = P^d_{D_0^*} (\overline{b}_{10} + \varepsilon \overline{b}_{11} + \cdots + \varepsilon^s \overline{b}_{1s}). \tag{25}$$

Пусть выполнены следующие условия:
5) $\operatorname{rank} \overline{D}_0 = r$;
6) $P^{d_1}_{\overline{D}_0^*} P^d_{D_0^*} = 0, \quad d_1 = d - r.$

Решение системы (25) c_0^r ищем в виде

$$c_0^r = c_{00}^r + \varepsilon c_{01}^r + \cdots + \varepsilon^s c_{0s}^r.$$

Из (25) с учетом условий 5 и 6 находим

$$c_{0j}^r = \overline{D}_0^+ P^d_{D_0^*} \overline{b}_{1j}, \qquad j = \overline{0, s}.$$

Подставляя c_0^r в (20), получаем окончательные выражения для $\Pi_0(\tau)$ и $Q_0(\nu)$:

$$\begin{aligned} \Pi_0(\tau) &= X_{kr}(\tau) \overline{D}_0^+ P^d_{D_0^*} \sum_{j=0}^s \varepsilon^j \overline{b}_{1j} + \overline{\Pi}_0(\tau), \\ Q_0(\nu) &= \overline{X}_{n-k,r}(\nu) \overline{D}_0^+ P^d_{D_0^*} \sum_{j=0}^s \varepsilon^j \overline{b}_{1j} + \overline{Q}_0(\nu). \end{aligned} \tag{26}$$

Предположим, что определены пограничные функции

$$\Pi_{i-1}(\tau) = X_{kr}(\tau) \overline{D}_0^+ P^d_{D_0^*} \sum_{j=0}^s \varepsilon^j \overline{b}_{1j} + \overline{\Pi}_{i-1}(\tau),$$

$$Q_{i-1}(\nu) = \overline{X}_{n-k,r}(\nu) \overline{D}_0^+ P^d_{D_0^*} \sum_{j=0}^s \varepsilon^j \overline{b}_{1j} + \overline{Q}_{i-1}(\nu).$$

Это полностью определяет и векторы $c_{i-1}^r \in R$. Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ и $Q_i(\nu)$ имеют вид

$$\Pi_i(\tau) = X_{kr}(\tau) c_i^r + \overline{\Pi}_i(\tau), \qquad Q_i(\nu) = \overline{X}_{n-k,r}(\nu) c_i^r + \overline{Q}_i(\nu), \tag{27}$$

где

$$\overline{\Pi}_i(\tau) = X_{kr} \left[D_0^+ h_i(\varepsilon)\right]_k + (L_\tau f_i)(\tau),$$

$$\overline{Q}_i(\nu) = \overline{X}_{n-k,r}(\nu)\left[D_0^+ h_i(\varepsilon)\right]_{n-k} + (L_\nu \overline{f}_i)(\nu),$$

$$h_i(\varepsilon) = \left(l(L_\tau F_0 + L_\nu \overline{F}_0)\right)(\cdot)c_{i-1}^r - \left(lA^{-1}(L_1 x_{i-1})\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau F_i + L_\nu \overline{F}_i)\right)(\cdot),$$

$$F_i(\tau) = \sum_{q=i-1}^{1} \frac{1}{q!}\tau^q A_1^{(q)}(a)\Pi_{i-1-q}(\tau) + A_1(a)\overline{\Pi}_i(\tau),$$

$$\overline{F}_i(\nu) = \sum_{q=i-1}^{1} \frac{1}{q!}\nu^q A_1^{(q)}(b) Q_{i-1-q}(\nu) + A_1(b)\overline{Q}_i(\nu).$$

Вектор c_i^r определим с помощью пограничных функций $\Pi_{i+1}(\tau)$ и $Q_{i+1}(\nu)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\Pi_{i+1}(\tau) = X_k(\tau)\Pi_{i+1,1}(0) + (L_\tau f_{i+1})(\tau),\\ &Q_{i+1}(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu) Q_{i+1,2}(0) + (L_\nu \overline{f}_{i+1})(\nu), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$f_{i+1} = f_{i+1}(\tau, c_i^r) = F_0(\tau)c_i^r + F_{i+1}(\tau),$$

$$\overline{f}_{i+1} = \overline{f}_{i+1}(\nu, c_i^r) = \overline{F}_0(\nu)c_i^r + \overline{F}_{i+1}(\nu),$$

$$F_{i+1}(\tau) = \sum_{q=i}^{1} \frac{1}{q!}\tau^q A_1^{(q)}(a)\Pi_{i-q}(\tau) + A_1(a)\overline{\Pi}_{i+1}(\tau),$$

$$\overline{F}_{i+1}(\nu) = \sum_{q=i}^{1} \frac{1}{q!}\nu^q A_1^{(q)}(b) Q_{i-q}(\nu) + A_1(b)\overline{Q}_{i+1}(\nu).$$

Для функций $f_{i+1}, \overline{f}_{i+1}$ выполняются условия леммы 1.

Из краевого условия $lx_{i+1}(\cdot) + l\Pi_{i+1}(\cdot) + lQ_{i+1}(\cdot) = 0$ и из (5), (28) получаем

$$D(\varepsilon)\begin{bmatrix} \Pi_{i+1,1}(0) \\ Q_{i+1,2}(0) \end{bmatrix} = h_{i+1}(\varepsilon), \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} h_{i+1}(\varepsilon, c_i^r) &= -\left(lA^{-1}(L_1 x_i)\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau f_{i+1})\right)(\cdot) - \left(l(L_\nu \overline{f}_{i+1})\right)(\cdot) = \\ &= -\left(l(L_\tau F_0 + L_\nu \overline{F}_0)\right)(\cdot)c_i^r - \left(lA^{-1}(L_1 x_i)\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau F_{i+1} + L_\nu \overline{F}_{i+1})\right)(\cdot). \end{aligned}$$

Условие разрешимости $P_{D_0^*}^d h_{i+1}(\varepsilon, c_i^r) = 0$ системы (29) приводит к определению c_i^r. Имеем

$$\overline{D}(\varepsilon)c_i^r = P_{D_0^*}^d \overline{b}_{i+1}(\varepsilon), \quad c_i^r \in R^r,$$

где

$$\overline{b}_{i+1}(\varepsilon) = -\left(lA^{-1}(L_1 x_i)\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau F_{i+1} + L_\nu \overline{F}_{i+1}\right)(\cdot).$$

Если

$$\overline{D}(\varepsilon)=\overline{D}_0+O\left(\varepsilon^k\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right),\ \ \alpha>0,\ k\in N,$$

$$\overline{b}_{i+1}(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j\overline{b}_{i+1,j}+O\left(\varepsilon^j\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right),$$

то, опуская экспоненциально малые элементы, с учетом условий 5, 6 получаем коэффициенты c_{ij}^r разложения $c_i^r=\sum\limits_{j=0}^{s}\varepsilon^j c_{i,j}^r$:

$$c_{ij}^r=\overline{D}_0^+P_{D_0^*}^d\overline{b}_{i+1,j},\qquad j=\overline{0,s}.$$

Следовательно, из (27) окончательно имеем

$$\begin{aligned}\Pi_i(\tau)&=X_{kr}(\tau)\overline{D}_0^+P_{D_0^*}^d\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j\overline{b}_{i+1,j}+\overline{\Pi}_i(\tau),\\ Q_i(\nu)&=\overline{X}_{n-k,r}\overline{D}_0^+P_{D_0^*}^d\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j\overline{b}_{i+1,j}+\overline{Q}_i(\nu).\end{aligned}\tag{30}$$

Теорема 1. *Пусть* $D(\varepsilon)=D_0+O\left(\varepsilon^q\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right)$ *и выполнены условия 1 – 6. Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное формальное асимптотическое разложение вида (3), если* $\varphi(t)\in C^\infty[a,b]$ *и* $h\in R^m$ *удовлетворяют условию* $P_{D_0^*}^d h_0=0$, $h_0=h+l(A^{-1}\varphi(\cdot))$. *Коэффициенты разложения* $x_i(t)$ *и* $\Pi_i(\tau),Q_i(\nu)$ *имеют вид (4) и (30). Кроме того, пограничные функции* $\Pi_i(\tau),Q_i(\nu)$ *экспоненциально убывают при* $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Из изложенного выше и приведенных условий видно, что действительно коэффициенты асимптотического разложения (3) имеют вид (4), (30). Покажем, что функции $\Pi_i(\tau),\ Q_i(\nu)$, $i=0,1,...$, экспоненциально убывают.

Определим норму $(l\times m)$-мерной матрицы $B=[b_{ij}]$ равенством $\|B\|=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$. С учетом вида $X(\tau)$, $\overline{\Pi}_0(\tau)$ и $\overline{Q}_0(\nu)$ из (26) следует, что существует ε_0 такое, что при $0<\varepsilon\le$ $\le\varepsilon_0$ выполнено

$$\|X_{kr}(\tau)\|\le m_1\exp(-\alpha_1\tau),\qquad m_1>0,\ \alpha_1>0,\ \tau\ge 0,$$

$$\|\overline{X}_{n-k,r}(\nu)\|\le m_2\exp(\alpha_2\tau),\qquad m_2>0,\ \alpha_2>0,\ \nu\le 0,$$

$$\|D_0^+h_0\|\le m_3,\ m_3>0;\qquad \left\|\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j c_{0j}^r\right\|\le m_4,\ m_4>0.$$

Тогда можно указать положительные постоянные γ_0,β_0 и $\overline{\gamma}_0,\overline{\beta}_0$ такие, что

$$\|\Pi_0(\tau)\|\le\gamma_0\exp(-\beta_0\tau),\ \tau\ge 0,\qquad \|Q_0(\nu)\|\le\overline{\gamma}_0\exp(\beta_0\nu),\ \nu\le 0,$$

т. е. $\Pi_0(\tau)$ и $Q_0(\nu)$ экспоненциально убывают.

Последовательно показывается, что $f_i(\tau)$ и $\overline{f}_i(\nu)$ экспоненциально убывают, и тогда из леммы 1 и (30) следует, что все пограничные функции экспоненциально убывают.

Следствие. *Пусть выполнены условия 1 – 3 и* $\operatorname{rank} D_0 = n_1 = n$. *Тогда краевая задача (1), (2) при каждом значении функции* $\varphi(t) \in C^\infty[a,b]$ *и каждом* $h \in R^m$, *удовлетворяющем* $P^d_{D_0^*} h_i(\varepsilon) = 0, i = 0, 1, \ldots$, *имеет единственное формальное асимптотическое разложение вида (3). Коэффициенты разложения* $x_i(t)$ *имеют вид (4), а пограничные функции* $\Pi_i(\tau), Q_i(\nu)$ *таковы:*

$$\Pi_i(\tau) = X_k(\tau)[D_0^* h_i]_k + (L_\tau f_i)(\tau), \qquad Q_i(\nu) = \overline{X}_{n-k}(\nu)[D_0^+ h_i]_{n-k} + (L_\nu \overline{f}_i)(\nu).$$

В этом случае $P_{D_0} = 0$ и $[\Pi_{i1}(0),\ Q_{i2}(0)]^T = D_0^+ h_i(\varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots$, где

$$h_i(\varepsilon) = -\left(lA^{-1}(L_1 x_{i-1})\right)(\cdot) - \left(l(L_\tau f_i)\right)(\cdot) - \left(l(L_\nu \overline{f}_i)\right)(\cdot), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$h_0 = h + (lA^{-1}\varphi)(\cdot).$$

Замечание 1. Если $m = n$ и $\det D_0 \neq 0$, то $D_0^+ = D_0^{-1}$. Если $m = n$ и $\operatorname{rank} D_0 < m = n$, то все выкладки совпадают с изложенным выше.

Замечание 2. Если $m \neq n$, $\operatorname{rank} D_0 = n_1 = m$, то $P_{D_0^*} = 0$, и все системы для определения $[\Pi_{i1}(0),\ Q_{i2}(0)]^T$, $i = 0, 1, \ldots$, всегда разрешимы. В этом случае имеем семейство пограничных функций.

3. Оценка остаточного члена. Решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left[x_i(t) + \Pi_i(\tau) + Q_i(\nu)\right] + \varepsilon^{n+1}\xi(t,\varepsilon), \tag{31}$$

где $P_i(\tau), Q_i(\nu)$ — пограничные функции, определенные в п. 2, $\xi(t,\varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор, n — любое целое положительное число.

Докажем, что на сегменте $[a,b]$ при $\varepsilon \to 0$ функция $\xi(t,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\|\xi(t,\varepsilon)\| \le c,\ c$ — положительная постоянная.

Подставляя (31) в (1), (2) и учитывая (4) – (8), для определения $\xi(t,\varepsilon)$ получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{\xi}(t,\varepsilon) = A\xi(t,\varepsilon) + \varepsilon A_1(t)\xi(t,\varepsilon) + H_1(t,\varepsilon), \\ &l\left(\xi(\cdot,\varepsilon)\right) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

С помощью результатов, изложенных в предыдущем пункте, доказывается, что

$$\|H_1(t,\varepsilon)\| \le K^* + K^* \exp\left(-\chi^* \frac{t-a}{\varepsilon}\right) + K^* \exp\left(\chi^* \frac{t-b}{\varepsilon}\right), \tag{33}$$

где $K^* > 0,\ \chi^* > 0$. Подстановкой

$$\xi(t,\varepsilon) = B \begin{bmatrix} \eta(t,\varepsilon) \\ \delta(t,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

где $\eta(t,\varepsilon) = (\eta_1, ..., \eta_k)$, $\delta(t,\varepsilon) = (\delta_1, ..., \delta_{n-k})$, система дифференциальных уравнений (32) приводится к виду

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = B^{-1}AB \begin{bmatrix} \eta \\ \delta \end{bmatrix} + \varepsilon B^{-1}AB \begin{bmatrix} \eta(t,\varepsilon) \\ \delta(t,\varepsilon) \end{bmatrix} + B^{-1}H_1(t,\varepsilon). \tag{34}$$

По предположению $(n \times n)$-мерная матрица B удовлетворяет условию

$$B^{-1}AB = [A_+, A_-], \quad \operatorname{Re}\lambda_j(A_+) < 0, \;\; j = \overline{1,k}, \quad \operatorname{Re}\lambda_j(A_-) > 0, \;\; j = \overline{k+1,n}.$$

Запишем систему (34) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{\eta} = A_+\eta + \varepsilon[A_{11}(t)\eta + A_{12}(t)\delta] + [B^{-1}H_1(t,\varepsilon)]_k, \\ &\varepsilon\dot{\delta} = A_-\delta + \varepsilon[A_{21}(t)\eta + A_{22}(t)\delta] + [B^{-1}H_1(t,\varepsilon)]_{n-k}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $B^{-1}A_1(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}$, A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22} — $(k \times n)$-, $(k \times (n-k))$-, $((n-k) \times k)$- и $((n-k) \times (n-k))$-мерные матрицы, а $\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]_k$ и $\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]_{n-k}$ — первые k и последние $(n-k)$ строк матрицы $\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]$.

С учетом (33) непрерывные матричные функции $\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]_k$ и $\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]_{n-k}$ на интервале $[a,b]$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\|[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)]_k\right\| \le K_1 + K_1 \exp\left(-\chi\frac{t-a}{\varepsilon}\right) + K_1 \exp\left(\chi\frac{t-b}{\varepsilon}\right),$$

$$\left\|\left[B^{-1}H_1(t,\varepsilon)\right]_{n-k}\right\| \le K_1 + K_1 \exp\left(-\chi\frac{t-a}{\varepsilon}\right) + K_1 \exp\left(\chi\frac{t-b}{\varepsilon}\right),$$

где $K_1 > 0, \; \chi > 0$.

Из (32) получим дополнительное условие для системы (35)

$$l(\xi(\cdot),\varepsilon) \Longrightarrow l\left(B\begin{bmatrix} \eta(\cdot,\varepsilon) \\ \delta(\cdot,\varepsilon) \end{bmatrix}\right) = 0. \tag{36}$$

Обозначим соответственно через $W(t,s,\varepsilon), \overline{W}(t,s,\varepsilon)$ фундаментальные матрицы систем

$$\varepsilon\frac{d\eta}{dt} = A_+\eta, \; W(s,s,\varepsilon) = E_n, \qquad \varepsilon\frac{d\delta}{dt} = A_-\delta, \; \overline{W}(s,s,\varepsilon) = E_{n-k}.$$

Тогда для норм матриц $W(t,s,\varepsilon), \overline{W}(t,s,\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\|W(t,s,\varepsilon)\| \le K_0 \exp\left(-\sigma\frac{t-s}{\varepsilon}\right), \quad a \le s \le t \le b,$$

$$\left\|\overline{W}(t,s,\varepsilon)\right\| \le K_0 \exp\left(-\sigma\frac{s-t}{\varepsilon}\right), \quad a \le t \le s \le b,$$

где постоянные $K_0 > 0, \; \sigma > 0$.

Систему дифференциальных уравнений (35) преобразуем к системе интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
\eta &= W(t,a,\varepsilon)\eta(a,\varepsilon) + \int\limits_a^t W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{11}(s)\eta + A_{12}(s)\delta] + [B^{-1}H_1(s,\varepsilon)]_k\right\} ds, \\
\delta &= \overline{W}(t,b,\varepsilon)\delta(b,\varepsilon) + \int\limits_a^t \overline{W}(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{21}(s)\eta + A_{22}(s)\delta] + [B^{-1}H_1(s,\varepsilon)]_{n-k}\right\} ds,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где $\eta(a,\varepsilon)$ и $\delta(b,\varepsilon)$ — произвольные k- и $(n-k)$-мерные постоянные векторы.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\eta_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad \delta_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= W(t,a,\varepsilon)\eta(a,\varepsilon) + \int\limits_a^t W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{11}(t)\eta_{i-1} + A_{12}(t)\delta_{i-1}] + \right. \\
&\quad \left. + [B^{-1}H_1(t,\varepsilon)]_k\right\} ds, \\
\delta_i &= \overline{W}(t,b,\varepsilon)\delta(b,\varepsilon) + \int\limits_t^b \overline{W}(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{21}(t)\eta_{i-1} + A_{22}(t)\delta_{i-1}] + \right. \\
&\quad \left. + [B^{-1}H_1(t,\varepsilon)]_{n-k}\right\} ds.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Введем банахово пространство M [18] из всех непрерывных n-мерных вектор-функций

$$z(t,\varepsilon) = (\eta_1(t,\varepsilon), ..., \eta_k(t,\varepsilon), \delta_1(t,\varepsilon), ..., \delta_{n-k}(t,\varepsilon))^T$$

на интервале $[a,b]$ с нормой

$$\|z(t,\varepsilon)\| = \sum_{i=1}^{k} \max_{t\in[a,b]} |\eta_i(t,\varepsilon)| + \sum_{i=1}^{n-k} \max_{t\in[a,b]} |\delta_i(t,\varepsilon)|$$

и расстоянием между элементами

$$\|z_2(t,\varepsilon) - z_1(t,\varepsilon)\| = \sum_{i=1}^{k} \max_{t\in[a,b]} |\eta_i^2(t,\varepsilon) - \eta_i^1(t,\varepsilon)| + \sum_{i=1}^{n-k} \max_{t\in[a,b]} |\delta_i^2(t,\varepsilon) - \delta_i^1(t,\varepsilon)|.$$

Правые части интегральных уравнений (37) будем рассматривать как воздействие некоторого оператора $F(\cdot)$ на векторную функцию $z(t,\varepsilon)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $\|B_{-1}A_1(t)\| \le K$, *где* $K > 0$*;*

2) при $\sigma > \chi$ *и* $0 < \varepsilon < 1$ *существуют положительные постоянные* c_1, $\overline{c}_1$, c_2, c_3 *такие, что выполнено* $1 + \exp\left(-\sigma\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right) \le \overline{c}_1$, *где* $0 < \overline{c}_1 < \dfrac{1}{2K_0}$, $1 -$

$-\exp\left(-\sigma\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = c_1$, *где* $c_1 > \dfrac{\sigma(1-2K_0\bar{c}_1)}{4KK_0}$, $\exp\left(-\chi\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\sigma\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \le c_2$, $1-\exp\left(-(\sigma-\chi)\frac{a+b}{\varepsilon}\right) \le c_3$;

3) $R = 2K_0K_1\left(\dfrac{c_1}{\sigma} + \dfrac{c_2}{\sigma-\chi} + \dfrac{c_3}{\sigma+\chi}\right)$;

4) $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \dfrac{\sigma(1-2K_0\bar{c}_1)}{KK_0c_1}$;

5) $\|\eta(a,\varepsilon)\| \le R,\ \|\delta(b,\varepsilon)\| \le R$.

Тогда оператор $F(z)$ *является оператором сжатия.*

Доказательство леммы проводится традиционным способом.

Пусть c_4, c_5, c_6 — положительные постоянные такие, что

$$\left\|\bar{\bar{D}}^{+}\right\| \le c_4, \quad \|l(\psi)\| \le c_5\|\psi\|, \quad \|B\| \le c_6.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и леммы 2. Тогда асимптотическое решение краевой задачи (1), (2) имеет представление (31), где* $\|\xi(t,\varepsilon)\| \le c$ *при* $c > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $t \in [a,b]$. *Векторы* $\eta(a,\varepsilon)$ *и* $\delta(b,\varepsilon)$ *определяются из системы алгебраических уравнений*

$$\bar{\bar{D}}\begin{bmatrix}\eta(a,\varepsilon)\\ \delta(b,\varepsilon)\end{bmatrix} = \bar{g}(\varepsilon), \tag{39}$$

где

$$\bar{\bar{D}} = l\left(\begin{bmatrix}B_{11}W(t,s,\varepsilon) & B_{12}\overline{W}(t,s,\varepsilon)\\ B_{21}W(t,s,\varepsilon) & B_{22}\overline{W}(t,s,\varepsilon)\end{bmatrix}\right) \ — \ (m\times n)\text{-мерная матрица,}$$

$$\bar{g}(\varepsilon) = -l\left(B\begin{bmatrix}\displaystyle\int_a^{(\cdot)} W(\cdot,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{11}\eta + A_{12}\delta] + [B^{-1}H_1(s,\varepsilon)]_k\right\}ds\\ \displaystyle\int_{(\cdot)}^{b} \overline{W}(\cdot,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon[A_{21}\eta + A_{22}\delta] + [B^{-1}H_1(s,\varepsilon)]n_k\right\}ds\end{bmatrix}\right),$$

если $\operatorname{rank}\bar{\bar{D}}_0 = n$, $c_4c_5c_6 < \dfrac{1}{4}$ *и* $P_{\bar{\bar{D}}_0}\bar{g}(\varepsilon) = 0$. *При этом* $x(t,\varepsilon)$ *стремится к вырожденной системе при* $\varepsilon \to 0$ *и* $t \in (a,b)$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что система (37) имеет единственное непрерывное решение, не выходящее из области

$$\Omega = \{(t,z,\varepsilon) | t \in [a,b],\ \|z\| \le 2R,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\}$$

и зависящее от произвольных векторов $\eta(a,\varepsilon), \delta(b,\varepsilon)$. Это решение находится с помощью итерационного процесса (38).

Для первого приближения из (38) с учетом условий леммы 2 имеем

$$\|z_1 - z_0\| \le \Delta_1 + \Delta_3 \le K_0Rc_1 + \frac{r}{2} \le \left(K_0\bar{c}_1 + \frac{1}{2}\right)R \le R.$$

Если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\varepsilon_0 = \dfrac{\sigma(1-2K_0\overline{c}_1)}{4KK_0c_1}$, то

$$\|z_j - z_{j-1}\| \le KK_0\frac{\varepsilon}{\sigma}\left(2-\exp\left(-\sigma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)-\exp\left(-\sigma\frac{b-t}{\varepsilon}\right)\right)\|z_{j-1}-z_{j-2}\| \le$$

$$\le KK_0\frac{\varepsilon}{\sigma}\left(1-\exp\left(-\sigma\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right)\|z_{j-1}-z_{j-2}\| \le KK_0\frac{\varepsilon}{\sigma}c_1\|z_{j-1}-z_{j-2}\| \le$$

$$\le \frac{1-2K_0\overline{c}_1}{4}\|z_{j-1}-z_{j-2}\| \le \frac{1}{2}\|z_{j-1}-z_{j-2}\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|z_2 - z_1\| \le \frac{1}{2}R, \quad \|z_3 - z_2\| \le \frac{1}{2^2}R, \ldots, \|z_j - z_{j-1}\| \le \frac{1}{2^{j-1}}R.$$

Следовательно, последовательные приближения (38) сходятся абсолютно и равномерно.

Имеем

$$\|z_j(t,\varepsilon)\| \le \sum_{k=1}^{j}\|z_k(t,\varepsilon)-z_{k-1}(t,\varepsilon)\| \le \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{j-1}}\right) \le 2R.$$

Отсюда следует, что $\|z_j(t,\varepsilon)\| \le 2R$ при всех $j\to\infty$. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty} z_j(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon)$ обращает (37) в тождество. Тогда при $\varepsilon \to 0$ на отрезке $[a,b]$ выполнено

$$\|z(t,\varepsilon)\| = \left\|\begin{bmatrix}\eta(t,\varepsilon)\\ \delta(t,\varepsilon)\end{bmatrix}\right\| \le 2R.$$

Следовательно, система интегральных уравнений (37) имеет единственное непрерывное решение, не выходящее из области Ω и зависящее от произвольных векторов $\eta(a,\varepsilon), \delta(b,\varepsilon)$.

Определим $\eta(a,\varepsilon)$ и $\delta(b,\varepsilon)$ из системы уравнений (39), где $\overline{\overline{D}}(\varepsilon), \overline{g}(\varepsilon)$ определяются из выражений (40). Система (39) получается из условия (36).

Пусть

$$\overline{\overline{D}}(\varepsilon) = \overline{\overline{D}} + O\left(\varepsilon^s \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right), \qquad \gamma > 0,\ s \in N,$$

где $\overline{\overline{D}}$ — $(m\times m)$-мерная постоянная матрица и $\operatorname{rank}\overline{\overline{D}} = n$. Система (49) при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix}\eta(a,\varepsilon)\\ \delta(b,\varepsilon)\end{bmatrix} = \overline{\overline{D}}{}_0^{+}\overline{g}(\varepsilon) = \begin{bmatrix}\left[\overline{\overline{D}}{}_0^{+}\overline{g}(\varepsilon)\right]_k\\ \left[\overline{\overline{D}}{}_0^{+}\overline{g}(\varepsilon)\right]_{n-k}\end{bmatrix}$$

тогда и только тогда, когда $P_{\overline{\overline{D}}{}_0^{*}}\overline{g}(\varepsilon) = 0\ \ \forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Для $\eta(a,\varepsilon)$ выполнена оценка

$$\|\eta(a,\varepsilon)\| \le \left\|\left[\overline{\overline{D}}{}_0^{+}\overline{g}(\varepsilon)\right]_k\right\| \le \left\|\overline{\overline{D}}{}^{+}\right\|\,\|\overline{g}(\varepsilon)\| \le c_4\|\overline{g}(\varepsilon)\| \le c_4c_5c_6(\Delta_2+\Delta_3) \le$$

$$\leq c_4c_5c_6\left[2KK_0R\frac{\varepsilon}{\sigma}\left(1-\exp\left(-\sigma\frac{b-a}{\varepsilon_0}\right)\right)+K_0K_1\left(\frac{c_1}{\sigma}+\frac{c_2}{\sigma-\chi}+\frac{c_3}{\sigma+\chi}\right)\right]\leq$$

$$\leq c_4c_5c_6\left[2KK_0R\frac{\varepsilon}{\sigma}c_1+2R\right]\leq c_4c_5c_6\left(\frac{1-2K_0\overline{c}_1}{4}-1\right)2R\leq c_4c_5c_6 4R\leq R.$$

Аналогично получаем $\|\delta(b,\varepsilon)\|\leq R.$

Если выберем $c=2c_6R$, то из $\|\xi(t,\varepsilon)\|\leq\|B\|\,\|z\|$ получаем $\|\xi(t,\varepsilon)\|\leq c$ при $t\in[a,b]$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Очевидно, выполнено условие $x(t,\varepsilon)\to x_0(t)$ при $\varepsilon\to 0$ и $t\in(a,b)$.

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. — 1948. — **22**, № 2. — С. 193 – 204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Там же. — 1952. — **31**, № 3. — С. 575 – 586.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
4. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. — 1952. — **31**, № 3. — С. 587 – 644.
5. *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Успехи мат. наук. — 1963. — **18**, № 3. — С. 15 – 86.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
8. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 247 с.
9. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. — М.: Физматгиз, 1995. — 329 с.
10. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 398 с.
11. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966. — 248 с.
12. *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища шк., 1971. — 226 с.
13. *Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А.* Асимптотическое разложение сингулярно возмущенной линейной краевой задачи // Докл. НАН Украины. — 1994. — № 4. — С. 7 – 10.
14. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
15. *Generalize* inverse and applications / Ed. M.Z. Nashed. — New York etc.: Acad. Press, 1967. — 1054 p.
16. *Penrose R.* A generalize inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**. — P. 406 – 413.
17. *Penrose R.* On best approximate solution of linear matrix equations // Ibid. — 1956. — **52**. — P. 17 – 19.
18. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.

Получено 12.04.99