УДК 517.911

КВАЗИРЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

We introduce the notion of a quasisolution of a fuzzy differential inclusion and study the relation between the sets of the usual solutions and the quasisolutions.

Введено поняття квазірозв'язку нечіткого диференціального включення, досліджено зв'язок між множинами звичайних розв'язків і квазірозв'язків.

1. Введение. Работа L. A. Zadeh [21] в 1965 г. положила начало развитию теории нечетких множеств. В 1983 г. M. L. Puri и D. A. Ralescu [17] ввели понятия производной и интеграла для нечетких отображений. В 1987 г. O. Kaleva [12] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения, которые в дальнейшем изучались в [4, 6, 7, 13, 14, 18 – 20].

В статье [5] введено понятие нечеткого дифференциального включения, получены теоремы существования и непрерывной зависимости от параметра классических решений нечетких дифференциальных включений. В [16] введены понятия обычного и обобщенного решений нечетких дифференциальных включений, исследована связь между множествами таких решений.

В отличие от работ [1, 2, 8, 11, 14], где нечеткие дифференциальные включения появляются в результате перехода к α-срезкам нечеткого отображения $F : I \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{E}^n$, в [5, 16] рассматриваются нечеткие дифференциальные включения, когда $F : I \times \mathrm{E}^n \to \to \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$, что является обобщением результатов, полученных в [3] для дифференциальных включений с производной Хукухары, на нечеткий случай. В случае, когда $F : I \times \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^n$, рассматриваемые в [5, 16] нечеткие дифференциальные включения вырождаются в нечеткие дифференциальные уравнения.

В данной статье вводится понятие квазирешения нечеткого дифференциального включения, исследуется связь между множествами обычных решений и квазирешений.

2. Основные определения. Пусть $\mathrm{conv}\,(\mathrm{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа $h(F, G)$.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : \mathrm{R}^n \to [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathrm{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y, z \in \mathrm{R}^n$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство $x(\lambda y + (1 - \lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x полунепрерывно сверху, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathrm{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathrm{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathrm{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathrm{E}^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in \mathrm{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathrm{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathrm{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1 [15]. *Если $x \in \mathrm{E}^n$, то:*

1) $[x]^\alpha \in \operatorname{conv}(\mathrm{R}^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k \geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ — семейство подмножеств R^n, удовлетворяющих условиям 1–3, то существует $x \in \mathrm{E}^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(x, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в R.

Определение непрерывности нечеткого отображения вводится стандартным для метрических пространств образом.

Определение 2 [15]. *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется сильно измеримым на I, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо.*

Определение 3 [15]. *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется интегрально ограниченным на I, если существует интегрируемая по Лебегу функция $k(t)$ такая, что $\|x\| \leq k(t)$ для всех $x \in f_0(t)$, $t \in I$.*

Определение 4 [15]. *Интегралом от отображения $f : I \to \mathrm{E}^n$ по множеству I называется элемент $g \in \mathrm{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int_I f_\alpha(t)\, dt$ для всех $0 < \alpha \leq 1$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [9].*

Теорема 2 [15]. *Если отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ сильно измеримо и интегрально ограничено, то f интегрируемо на I.*

Определение 5. *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется абсолютно непрерывным на I, если существует интегрируемое отображение $g : I \to \mathrm{E}^n$ такое, что*

$$f(t) = f(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \quad t_0 \in I \quad \text{для всех} \quad t \in I.$$

Определение 6 [15]. *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [8] в точке t_0, его производная равна $D_H f_\alpha(t_0)$ и семейство множеств*

$\{D_H f_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ *определяет элемент* $f'(t_0) \in \mathrm{E}^n$. *Если отображение* $f : I \to \mathrm{E}^n$ *дифференцируемо в точке* $t_0 \in I$, *то* $f'(t_0)$ *называют нечеткой производной* $f(t)$ *в точке* t_0. *Отображение* $f : I \to \mathrm{E}^n$ *называется дифференцируемым на* I, *если оно дифференцируемо в каждой точке* $t \in I$.

Рассмотрим пространство $\mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)[\mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)]$, состоящее из всех подмножеств F пространства E^n таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ множество, составленное из α-срезок элементов множества F, является непустым выпуклым компактом в пространстве $\mathrm{conv}\,(\mathrm{R}^n)$ (т. е. элементом пространства $\mathrm{cc}\,(\mathrm{R}^n)[\mathrm{cocc}\,(\mathrm{R}^n)]$ [3]). В этом пространстве определим операции суммы и умножения на скаляр.

Определение 7 [5]. *Суммой двух множеств* F *и* G *из пространства* $\mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ *называется множество*

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}.$$

Определение 8 [5]. *Произведением множества* $F \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ *на число* $\lambda \in \mathrm{R}$ *называется множество*

$$G = \lambda F = \{g = \lambda f : f \in F\}.$$

Лемма 1 [5]. *Если* $F, G \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)\ [\mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)]$, *то* $F + G \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)[\mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)]$.

Лемма 2 [5]. *Если* $F \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)[\mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)]$, *то* $\lambda F \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)[\mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)]$.

Непосредственно по определению проверяется, что для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ и любых множеств $F, G, H \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ выполняются следующие свойства:

1) $F + G = G + F$;

2) $F + (G + H) = (F + G) + H$;

3) относительно операции суммы существует нулевой элемент $\{\widehat{0}\} : F + \{\widehat{0}\} = F$;

4) в общем случае у множества F нет обратного элемента относительно введенной операции суммы множеств;

5) $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$;

6) $1 \cdot F = F$;

7) $\alpha(F + G) = \alpha F + \beta G$;

8) если $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $F \in \mathrm{conv}\,(\mathrm{E}^n)$, то $(\alpha+\beta)F = \alpha F+\beta F$; иначе $(\alpha+\beta)F \subset \alpha F+\beta F$.

Определение 9. *Метрикой, или расстоянием между двумя множествами* $F, G \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ *назовем величину*

$$d(F,G) = \max\{\max_{f\in F}\min_{g\in G} D(f,g), \max_{g\in G}\min_{f\in F} D(f,g)\}.$$

Определим также расстояние от элемента $x \in \mathrm{E}^n$ до множества $F \in \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$:

$$\mathrm{dist}\,(x,F) = \min_{f\in F} D(x,f).$$

3. Основные результаты. Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение

$$x' \in F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I$ — время; $x \in S \subset \mathrm{E}^n$ — фазовый вектор; начальные условия $t_0 \in I$, $x_0 \in S$; многозначное отображение $F : I \times S \to \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$.

Определение 10. *Абсолютно непрерывное отображение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, называется обычным решением нечеткого дифференциального включения (1), если:*

1) $x(t) \in S$ для всех $t \in I$;

2) $x'(t) \in F(t, x(t))$ почти всюду на I.

Множество обычных решений включения (1) обозначим через $O(F)$.

Определение 11. *Отображение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, называется квазирешением дифференциального включения (1), если существует последовательность отображений $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

1) $x_k(t)$ абсолютно непрерывны на I;

2) $\|x'_k(t)\| = D(x'_k(t), \hat{0}) \leq m(t)$, где $m(t)$ интегрируема по Лебегу на I;

3) $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$ для всех $t \in I$;

4) $\lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}\,(x'_k(t), F(t, x_k(t))) = 0$ почти всюду на I.

Множество квазирешений включения (1) обозначим через $Q(F)$.

Определение 12. *Говорят, что многозначное отображение $F : I \times S \to \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если:*

1) $F(\cdot, x)$ измеримо для всех $x \in S$;

2) $F(t, \cdot)$ непрерывно для почти всех $t \in I$;

3) $\|F(t, x)\| = d(F(t, x), \{\hat{0}\}) \leq m(t)$ для всех $(t, x) \in I \times S$, $m(t)$ интегрируема по Лебегу на I.

Лемма 3. *Пусть многозначное отображение $F : I \times S \to \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, отображение $\varphi : I \to S$ сильно измеримо. Тогда многозначное отображение $F(t, \varphi(t))$ измеримо на I.*

Теорема 3. *Пусть многозначное отображение $F : I \times S \to \mathrm{comp}\,(\mathrm{E}^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда $O(\mathrm{co}\, F) = Q(F) = Q(\mathrm{co}\, F)$, где $\mathrm{co}\, F$ — выпуклая оболочка F.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — обычное решение включения (1) на промежутке I. Тогда $x(t)$ — квазирешение включения (1), так как в качестве последовательности $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ можно взять $x_k(t) \equiv x(t)$, $k \in \mathrm{N}$.

Пусть теперь $x(t)$ — квазирешение включения (1) на промежутке I. Тогда $x(t)$ — квазирешение включения

$$x' \in \mathrm{co}\, F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

так как первые три пункта определения квазирешения не зависят от правой части дифференциального включения, а последний выполняется в силу того, что

$$\mathrm{dist}\,(x'_k(t), \mathrm{co}\, F(t, x_k(t))) \leq \mathrm{dist}\,(x'_k(t), F(t, x_k(t))).$$

Покажем, что любое квазирешение включения (2) является обычным решением включения (2). Пусть $x(t)$ — квазирешение включения (2) на промежутке I. Тогда существует последовательность абсолютно непрерывных на I отображений $x_k(t)$, сходящаяся к

$x(t)$, такая, что $\|x'_k(t)\| \le m(t)$, $t \in I$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x'_k(t), F(t, x_k(t))) = 0$ почти всюду на I. Из непрерывности многозначного отображения $F(t,x)$ по x при почти всех t следует непрерывность многозначного отображения $\operatorname{co} F(t,x)$ по x при почти всех t, так как $d(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G) \le d(F,G)$. Тогда $d(\operatorname{co} F(t, x_k(t)), \operatorname{co} F(t, x(t))) \to 0$ для почти всех $t \in I$ при $k \to \infty$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$T_k = \{t \in I : \operatorname{dist}(x'_k(t), F(t, x(t))) > \varepsilon\}.$$

При $k \to \infty$ имеем $\operatorname{meas}(T_k) \to 0$. Так как многозначное отображение $\operatorname{co} F(t,x(t))$ в силу леммы 3 измеримо на I, существует сильно измеримое отображение $g(t)$ такое, что $g(t) \in \operatorname{co} F(t, x(t))$, $\|g(t)\| \le m(t)$ для почти всех $t \in I$.

Положим

$$u_k(t) = \begin{cases} x'_k(t) & \text{для почти всех} \quad t \in I \backslash T_k, \\ g(t) & \text{для} \quad t \in T_k. \end{cases}$$

Отображения $u_k(t)$ удовлетворяют включению $u_k(t) \in S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t, x(t)))$ почти всюду на I.

Пусть $v_k(t)$ — абсолютно непрерывное отображение, для которого $v_k(t_0) = x_0$ и $v'_k(t) = u_k(t)$ почти всюду на I. Тогда $v_k(t)$ — обычное решение нечеткого дифференциального включения

$$x' \in S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t,x)). \tag{3}$$

Поскольку $S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t,x))$ принимает значения в $\operatorname{conv}(\mathrm{E}^n)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори, в силу [16] $v_k(t)$ является обобщенным решением нечеткого дифференциального включения (3), т. е.

$$v_k(t'') \in v_k(t') + \int\limits_{t'}^{t''} S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t, x(t)))\, dt$$

для всех $t', t'' \in I$, $t' < t''$.

Так как $v_k(t) \to x(t)$ при $k \to \infty$, абсолютно непрерывное отображение $x(t)$ удовлетворяет включению

$$x(t'') \in x(t') + \int\limits_{t'}^{t''} S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t, x(t)))\, dt$$

для всех $t', t'' \in I$, $t' < t''$, т. е. является обобщенным, а значит в силу [16] и обычным решением нечеткого дифференциального включения (3). Следовательно,

$$x'(t) \in S_\varepsilon(\operatorname{co} F(t, x(t)))$$

почти всюду на I.

В силу произвольности ε и компактности множества $\operatorname{co} F(t, x(t))$ $x'(t) \in \operatorname{co} F(t, x(t))$ почти всюду на I, т. е. $x(t)$ является обычным решением нечеткого дифференциального включения (2).

Таким образом, $Q(F) \subset Q(\operatorname{co} F) \subset O(\operatorname{co} F)$.

Теперь осталось показать, что любое обычное решение нечеткого дифференциального включения (2) является квазирешением включения (1).

Пусть $x(t)$ — обычное решение нечеткого дифференциального включения (2). Тогда отображение $x(t)$ абсолютно непрерывно на I и $x'(t) \in F(t, x(t))$ почти всюду на I. Многозначное отображение $F(t, x(t))$ в силу леммы 3 измеримо на I и в силу свойства Лузина существуют система непересекающихся компактных подынтервалов $\{I_i\}$, а также множество нулевой меры $J \subset I$ такие, что $I = \bigcup\limits_i I_i \bigcup J$ и $S(t) = F(t, x(t))$ непрерывно на I_i. Разбиение сегмента I можно выбрать так, что для произвольного натурального k будут выполняется неравенства

$$D(x'(t), x'(\tau)) \leq 1/k, \quad d(F(t, x(t)), F(\tau, x(\tau))) \leq 1/k,$$

$$t, \tau \in I_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Определим отображение $u : I \to \mathrm{E}^n$ и многозначное отображение $\tilde{F} : I \to \operatorname{comp}(\mathrm{E}^n)$ следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} x'(t_i), & t, t_i \in I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \hat{0}, & t \in J, \end{cases}$$
$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} F(t_i, x(t_i)), & t, t_i \in I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \{\hat{0}\}, & t \in J. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $D(u(t), x'(t)) \leq 1/k$ и $d(\tilde{F}(t), F(t, x(t))) \leq 1/k$ для почти всех $t \in I$.

Определим последовательность отображений $x_k(t)$ следующим образом:

$$x_k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \quad t \in I. \tag{5}$$

Тогда:

1) отображения $x_k(t)$ абсолютно непрерывны на I;

2) $\|x_k'(t)\| \leq m(t)$, $t \in I$;

3) $x_k'(t) \in \tilde{F}(t)$ для почти всех $t \in I$ в силу (4) и (5);

4) $\operatorname{dist}(x_k'(t), F(t, x(t))) \leq 1/k$ для почти всех $t \in I$, так как для почти всех $t \in I$

$$\operatorname{dist}(x_k'(t), F(t, x(t))) = \operatorname{dist}(u(t), F(t, x(t))) = \operatorname{dist}(x'(t_i), F(t, x(t))) \leq$$
$$\leq d(F(t_i, x(t_i)), F(t, x(t))) = d(\tilde{F}(t), F(t, x(t))) \leq 1/k.$$

Оценим

$$D(x_k(t), x(t)) \le D\left(\int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,ds, \int\limits_{t_0}^{t} x'(s)\,ds\right) \le$$

$$\le \int\limits_{I\cap I_1} D(u(s), x'(s))\,ds + \ldots + \int\limits_{I\cap I_i} D(u(s), x'(s))ds + \ldots$$

$$\ldots \le \frac{1}{k}\sum_i \operatorname{meas}(I_i) = \frac{1}{k}\operatorname{meas}(I),$$

т. е. $x_k(t) \to x(t)$ при $k \to \infty$ и $t \in I$.

Поскольку

$$\operatorname{dist}(x_k'(t), F(t, x_k(t))) \le \operatorname{dist}(x_k'(t), F(t, x(t))) + d(F(t, x(t)), F(t, x_k(t))) \le$$

$$\le \frac{1}{k} + d(F(t, x(t)), F(t, x_k(t)))$$

и $F(t,x)$ непрерывно по x, то $\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_k'(t), F(t, x_k(t))) = 0$ почти всюду на I, т. е. $x(t)$ — квазирешение нечеткого дифференциального включения (1). Следовательно,

$$O(\operatorname{co} F) \subset Q(F)$$

и теорема доказана.

1. *Байдосов В. А.* Дифференциальные включения с нечеткой правой частью // Докл. АН СССР. — 1989. — **309**, № 4. — С. 781–783.

2. *Байдосов В. А.* Нечеткие дифференциальные включения // Прикл. математика и механика. — 1990. — **54**, вып. 1. — С. 12–17.

3. *Комлева Т. А., Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 2. — С. 229–246.

4. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса : Астропринт, 2009. — 192 с.

5. *Скрипник Н. В.* Существование классических решений нечетких дифференциальных включений // Укр. мат. вестн. — 2008. — **5**, № 2. — С. 244–257.

6. *Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с импульсами // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 530–540.

7. *Кичмаренко О. Д., Скрипник Н. В.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 3. — С. 316–328.

8. *Aubin J.-P.* Fuzzy differential inclusions // Probl. Control Inf. Theory. — 1990. — **19**, № 1. — P. 55–67.

9. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**, № 1. — P. 1–12.

10. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205–223.

11. *Hullermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge–Based Systems. — 1997. — **5**, № 2. — P. 117–137.

12. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301 – 317.
13. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — **35**, № 3. — P. 389 – 396.
14. *Laksmikantham V., Tolstonogov A. A.* Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2003. — **55**, № 3. — P. 255 – 268.
15. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271 – 279.
16. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* The generalized solutions of the fuzzy differential inclusions // Int. J. Pure and Appl. Math. — 2009. — **56**, № 2. — P. 165 – 172.
17. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **91**, № 2. — P. 552 – 558.
18. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. and Appl. — 1986. — **114**, № 2. — P. 409 – 422.
19. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 319 – 330.
20. *Song S. J., Wu C. X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — **110**, № 1. — P. 55 – 67.
21. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. Control. — 1965. — № 8. — P. 338 – 353.

Получено 08.12.09,
после доработки — 03.11.10