УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

Н. А. Богай

Галиц. ін-т ім. В. Чорновола
Україна, 46020, Тернопіль, вул. Вербицького, 1/39

We find conditions for existence of continuous periodic solutions to systems of linear difference equations, and develop a method for constructing such solutions.

Установлены условия существования непрерывных периодических решений систем линейных разностных уравнений и разработан метод их построения.

Системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{k} A_j(t)x(t+\Delta_j) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, всі елементи матриць $A_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними функціями, $\Delta_0 = 0$, Δ_j, $j = 1, \ldots, k$, — довільні дійсні числа, вивчалися багатьма математиками (див. [1 – 3] і наведену в них бібліографію). Зокрема, в [4 – 7] досить детально досліджено питання про існування неперервних періодичних розв'язків окремих класів різницевих рівнянь вигляду (1). Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі також будемо вивчати питання про існування періодичних розв'язків системи (1). При цьому припускатимемо виконаними наступні умови:

1) всі елементи матриць $A_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T-періодичними функціями (T — довільне додатне число);

2) $\|A_j(t)\| \leq a_j^*$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $a_0^* < 1$, де $\|A_j(t)\| = \max\limits_t |A_j(t)|$;

3) $\dfrac{1}{1-a_0^*} \sum\limits_{j=1}^{k} a_j^* = \ell < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (1) має неперервний T-періодичний розв'язок.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (1) має неперервний T-періодичний розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі, поки що не визначені, неперервні T-періодичні вектор-функції.

Підставляючи (2) в (1), можна переконатися, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = A_0(t)x_0(t) + F(t), \tag{3_0}$$

$$x_i(t+1) = A_0(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)x_{i-1}(t+\Delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3_i}$$

то ряд (2) є формальним розв'язком системи рівнянь (1). Отже, спочатку покажемо, що системи рівнянь (3_i), $i = 0, 1, \ldots,$ мають неперервні T-періодичні розв'язки $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

Дійсно, якщо розв'язок системи рівнянь (3_0) шукати у вигляді ряду

$$x_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t)F(t-m), \tag{4_0}$$

де $C_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots,$ — деякі, поки що не визначені, неперервні T-періодичні матричні функції, то, підставляючи (4_0) в (3_0), приходимо до висновку, що ряд (4_0) буде формальним розв'язком системи (3_0) у випадку, коли виконуються рівності

$$C_1(t+1) = E,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_m(t+1) = A_0(t)C_{m-1}(t), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

звідки безпосередньо отримуємо

$$\begin{gathered} C_1(t) = E, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m(t) = \prod_{j=1}^{m-1} A_0(t-j), \quad m = 2, 3, \ldots . \end{gathered} \tag{5}$$

Отже, ряд (4_0), коефіцієнти $C_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots,$ якого визначаються за допомогою співвідношень (5), є формальним розв'язком системи рівнянь (3_0). Крім цього, беручи до уваги умови 1–3 і співвідношення (5), приходимо до висновку, що ряд (4_0) рівномірно збігається до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $x_0(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3_0) і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \leq \frac{M}{1-a_0^*} = M', \tag{6_0}$$

де $M = \max_t |F(t)|$.

Взявши до уваги (4), послідовно можна переконатися, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \left[\sum_{j=1}^{k} A_j(t-m) x_{i-1}(t-m+\Delta_j) \right], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4_i}$$

де матриці $C_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, визначаються співвідношеннями (5), є формальними розв'язками відповідних систем (3_i), $i = 1, 2, \ldots$. Доведемо, що вони рівномірно збігаються до деяких неперервних T-періодичних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Дійсно, враховуючи (5), (6_0), (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, і умови теореми, за індукцією знаходимо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{*m-1} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^* \right) M' = M' \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j^*}{1 - a_0^*} = M'\ell,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{6_i}$$

$$|x_i(t)| \leq M'\ell^i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (2), в якому вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються формулами (4_i), $i = 0, 1, \ldots$, і задовольняють умови (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{M'}{1 - \ell}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Легко показати, що при виконанні умов теореми 1 побудований вище неперервний T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) є єдиним.

Отримані вище умови існування неперервного T-періодичного розв'язку системи рівнянь (1) не є, очевидно, єдиними. Підтвердженням цього є наступна теорема, в якій даються нові умови існування неперервного T-періодичного розв'язку системи рівнянь (1).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) всі елементи матриць $A_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T-періодичними функціями (T — довільне додатне число);

2) $\det A_0(t) \neq 0$, $|A_j(t)| \leq a_j^*$, $j = 1, \ldots, k$, $t \in \mathbb{R}$, $|A_0^{-1}(t)| \leq a_* < 1$;

3) $\dfrac{a_*}{1 - a_*} \sum_{j=1}^{k} a_j^* = \tilde{\ell} < 1.$

Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок.

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що система рівнянь (1) має неперервний T-періодичний розв'язок у вигляді ряду (2). А для цього, в свою чергу, необхідно спочатку показати, що послідовність систем рівнянь (3_i), $i = 0, 1, \ldots$, має неперервні T-періодичні розв'язки $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

Розглянемо спочатку систему рівнянь (3_0) і покажемо, що вона має неперервний T-періодичний розв'язок $x_0(t)$ у вигляді ряду

$$x_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_m(t) F(t+m), \tag{7_0}$$

де $\tilde{C}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ — деякі, поки що не відомі, неперервні T-періодичні матричні функції. Дійсно, підставляючи (7_0) в (3_0), отримуємо співвідношення

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_m(t+1) F(t+1+m) = A_0(t) \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) F(t+m) + F(t),$$

яке, очевидно, виконуватиметься у випадку, коли матриці $\tilde{C}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$A_0(t)\tilde{C}_0(t) + E = 0,$$

$$A_0(t)\tilde{C}_1(t) = \tilde{C}_0(t+1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_0(t)\tilde{C}_m(t) = \tilde{C}_{m-1}(t+1), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Звідси і з умов теореми знаходимо

$$\tilde{C}_m(t) = -\prod_{j=0}^{m} A_0^{-1}(t+j), \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

Таким чином, ряд (7_0), в якому коефіцієнти $\tilde{C}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ визначаються формулами (8), є формальним розв'язком системи рівнянь (3_0). Оскільки всі елементи матриць $\tilde{C}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ і вектора $F(t)$ є неперервними T-періодичними функціями, то за умовами теореми маємо

$$|\tilde{C}_m(t)| \leq a_*^{m+1}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

і, отже, ряд (7_0) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $x_0(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3_0) і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} a_*^{m+1} |F(t+m)| \leq M \frac{a_*}{1-a_*} = M'', \tag{9_0}$$

де $M = \max_t |F(t)|$.

Враховуючи (7_0), (9_0) і умови 2, 3 теореми 2, можна по індукції показати, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_m(t) \left[\sum_{j=1}^{k} A_j(t+m) x_{i-1}(t+m+\Delta_j) \right], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{7_i}$$

де матриці $\tilde{C}_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначаються формулами (8), рівномірно збігаються до деяких неперервних T-періодичних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які є розв'язками відповідних систем рівнянь (3_i), $i = 1, 2, \ldots$, і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \le M'' \tilde{e}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{9_i}$$

Згідно з (9_i), $i = 0, 1, \ldots$, ряд (2), в якому вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються формулами (7_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякої вектор-функції $x(t)$, яка є неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову

$$|x(t)| \le \frac{M''}{1 - \tilde{\ell}}.$$

Припустимо тепер, що існує ще один неперервний T-періодичний розв'язок $y(t)$ системи рівнянь (1) такий, що $y(t) \ne x(t)$. Оскільки в цьому випадку

$$x(t) \equiv A_0^{-1}(t)x(t+1) - A_0^{-1}(t)\sum_{j=1}^{k} A_j(t)x(t+\Delta_j) - A_0^{-1}(t)F(t),$$

$$y(t) \equiv A_0^{-1}(t)y(t+1) - A_0^{-1}(t)\sum_{j=1}^{k} A_j(t)y(t+\Delta_j) - A_0^{-1}(t)F(t),$$

то, беручи до уваги умови теореми, знаходимо

$$|x(t) - y(t) \le |A_0^{-1}(t)|\,|x(t+1) - y(t+1)| +$$

$$+ |A_0^{-1}(t)| \sum_{j=1}^{k} |A_j(t)|\,|x(t+\Delta_j) - y(t+\Delta_j)| \le \left(a_* + a_* \sum_{j=1}^{k} a_j^*\right) \|x(t) - y(t)\| \le$$

$$\le \left(a_* + a_* \tilde{\ell} \frac{1 - a_*}{a_*}\right) \|x(t) - y(t)\| \le \left[a_* + (1 - a_*)\tilde{\ell}\right] \|x(t) - y(t)\|,$$

де $\|x(t) - y(t)\| = \max_t |x(t) - y(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|x(t) - y(t)\| \le \left[a_* + (1 - a_*)\tilde{\ell}\right] \|x(t) - y(t)\|,$$

яке (за умовою $a_* + (1 - a_*)\tilde{\ell} < 1$) може виконуватись лише у випадку, коли $x(t) \equiv y(t)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Розглянемо тепер систему лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$\begin{gathered} x(t+1) = A_1(t)x(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j^1(t)x(t+\Delta_j) + \sum_{j=1}^{k} B_j^1(t)y(t+\Delta_j) + F^1(t), \\ y(t+1) = A_2(t)y(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j^2(t)y(t+\Delta_j) + \sum_{j=1}^{k} B_j^2(t)y(t+\Delta_j) + F^2(t) \end{gathered} \tag{10}$$

при наступних припущеннях:

1) всі елементи матриць $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_j^1(t)$, $B_j^1(t)$, $A_j^2(t)$, $B_j^2(t)$, $j = 1,\ldots,k$, і векторів $F^1(t)$, $F^2(t)$ є неперервними T-періодичними функціями;

2) $0 < \|A_1(t)\| \le a_1^* < 1$, $\|A_2^{-1}(t)\| \le a_2^* < 1$,

$$\|A_j^1(t)\| \le a_j^1, \quad \|A_j^2(t)\| \le a_j^2,$$

$$\|B_j^1(t)\| \le b_j^1, \quad \|B_j^2(t)\| \le b_j^2, \quad j = 1,2,\ldots,k,$$

де $\|A(t)\| = \max_t |A(t)|$;

3) $\Delta = \max\left\{a_1^* + \sum\limits_{j=1}^{k}(a_j^1 + b_j^1),\ a_2^* + a_2^* \sum\limits_{j=1}^{k}(a_j^2 + b_j^2)\right\} < 1.$

Легко переконатися, що в цьому випадку матриця $A(t) = \operatorname{diag}(A_1(t), A_2(y))$ не задовольняє, взагалі кажучи, умови теорем 1, 2. Проте має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (10) має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок.*

Доведення теореми можна провести за допомогою методу послідовних наближень, які в даному випадку визначаються співвідношеннями

$$x_0(t) = 0, \quad y_0(t) = 0,$$

$$x_m(t) = A_1(t-1)x_{m-1}(t-1) + \sum_{j=1}^{k} A_j^1(t-1)x_{m-1}(t-1+\Delta_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} B_j^1(t-1)y_{m-1}(t-1+\Delta_j) + F^1(t-1),$$

$$y_m(t) = A_2^{-1}(t)y_{m-1}(t+1) - A_2^{-1}(t)\sum_{j=1}^{k} A_j^2(t)x_{m-1}(t+\Delta_j) -$$

$$- A_2^{-1}(t)\sum_{j=1}^{k} B_j^2(t)y_{m-1}(t+\Delta_j - A_2^{-1}(t)F^2(t), \quad m = 1,2,\ldots.$$

У зв'язку із доведеними вище теоремами природно виникає питання про існування інших неперервних (наприклад, при $t \in \mathbb{R}$) розв'язків. Часткову відповідь на нього дає теорема 4, яка буде наведена нижче.

Розглянемо систему рівнянь (1) і припустимо, що для неї виконуються умови 1 – 3 теореми 1 і $\Delta_j < 0$, $j = 1,\ldots,k$. Оскільки в цьому випадку, згідно з теоремою 1, існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\gamma(t)$, то, виконуючи в (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{11}$$

отримуємо систему рівнянь

$$y(t+1) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)y(t+\Delta_j), \tag{12}$$

де $A(t) = A_0(t)$, для якої має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1–3 теореми 1 і* $\Delta_j < 0$, $j = 1, \ldots, k$. *Тоді система рівнянь (12) має сім'ю неперервних при* $t \geq -\Delta^*$ ($\Delta^* = \max_{1 \leq j \leq k} |\Delta_j|$) *розв'язків, що залежать від довільної неперервної при* $t \in [-\Delta^*, 1)$ *вектор-функції* $\varphi(t)$.

Доведення. Оскільки для довільного $t \in \mathbb{R}^+$ виконується рівність

$$t = [t] + \tau,$$

де $[t]$ — ціла частина t і $\tau = t - [t] \in [0, 1)$, то при побудові розв'язків системи рівнянь (12) можна скористатися методом кроків. Дійсно, покладемо

$$y(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [-\Delta^*, 1), \tag{13}$$

де $\varphi(t)$ — довільна неперервна при $t \in [-\Delta^*, 1)$ вектор-функція, що задовольняє умови

$$\begin{gathered} \lim_{t \to 1-0} \varphi(t) = \varphi^1 \neq \infty, \\ \\ \varphi^1 = A_0\varphi_0 + \sum_{j=1}^{k} A_j(0)\varphi(\Delta_j). \end{gathered} \tag{14}$$

Тоді безпосередньо із (12) послідовно отримуємо

$$\begin{gathered} y(\tau+1) = A(\tau)\varphi(\tau) + \sum_{j=1}^{k} A_j(\tau)\varphi(\tau+\Delta_j), \\ y(\tau+2) = A(\tau+1)y(\tau+1) + \sum_{j=1}^{k} A_j(\tau+1)y(\tau+1+\Delta_j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y(\tau+[t]) = y(t) = A(\tau+[t]-1)y(\tau+[t]-1) + \sum_{j=1}^{k} A_j(\tau+[t]-1)y(\tau+[t]-1+\Delta_j). \end{gathered} \tag{15}$$

Легко переконатися, що при виконанні умов (14) всі розв'язки системи рівнянь (12), які визначаються формулами (13), (15), є неперервними.

Теорему 4 доведено.

Зауваження 2. При деяких додаткових умовах усі неперервні розв'язки системи рівнянь (12), які визначаються формулами (13) – (15), мають ряд цікавих властивостей. Наприклад, якщо $\Delta j = 0,\, j = 1, \ldots, k$, то всі вони задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

1. *Kucrma M.* Functional equations in a single variable. — Warsawa, 1968. — 383 p.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 3. — С. 514 – 519.
5. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 1. — С. 140 – 155.
6. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1626 – 1633.
7. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Про асимптотично періодичні розв'язки систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Доп. НАН України. — 2006. — № 11. — С. 19 – 22.

Одержано 22.03.10