УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ*

С. М. Чуйко, Ан. С. Чуйко

Славян. гос. пед. ун-т
Украина, 84 112, Славянск Донецкой обл., ул. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions of weakly nonlinear Noether boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with delay in the critical case.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабконелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з запізненням у критичному випадку.

1. Постановка задачи. Исследуется задача о построении приближений к T-периодическому решению

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [1 – 3]

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\Delta) + f(t) + \varepsilon Z(z(t), z(t-\Delta), t, \varepsilon). \tag{1}$$

Решения периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности T-периодического решения $z_0(t) : z_0(\cdot) \in C^1[0,T]$ порождающей системы

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) + f(t), \quad \Delta \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Здесь $A(t), B(t)$ — непрерывные T-периодические $(n \times n)$-мерные матрицы, $Z(z(t), z(t-\Delta), t, \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестным $z(t)$ и $z(t-\Delta)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (2), непрерывная и T-периодическая по t, а также непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, $f(t)$ — непрерывная T-периодическая вектор-функция. Как известно, в критическом случае [4, с. 33], а именно, при наличии T-периодических решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

однородной части

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) \tag{3}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; № GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ 0109U000381).

системы (2), а в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$ и $B(t) \equiv B$ при наличии чисто мнимых корней $\lambda_j = \pm ik_jT,\ i = \sqrt{-1},\ j \in \mathbb{Z}$, характеристического уравнения

$$\det\left[A + Be^{-\lambda\Delta} - \lambda I_n\right] = 0,$$

порождающая периодическая задача для уравнения (2) разрешима не для всех вектор-функций $f(t)$. В критическом случае сопряженная система [4, с. 30]

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A^*(t)y(t) - B^*(t)y(t+\Delta)$$

имеет семейство T-периодических решений вида

$$y(t, c_r) = H_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Периодическая задача для уравнения (2) при этом разрешима при условии [4, с. 33]

$$\int\limits_0^T H_r^*(s)f(s)\,ds = 0. \tag{4}$$

Здесь $H_r(t)$ — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых T-периодических решений сопряженной системы. Предположим условие (4) выполненным; при этом общее решение порождающей T-периодической задачи для уравнения (2) имеет вид

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + \overline{z}_0(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где $\overline{z}_0(t)$ — некоторое частное решение порождающей T-периодической задачи, $X_r(t)$ — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых T-периодических решений системы (3). Аналогично [1] приходим к необходимому условию разрешимости T-периодической задачи для уравнения (1).

Лемма. *Если T-периодическая задача для уравнения (1) в критическом случае имеет решение*

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t, c_r^*)$, то вектор $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд

$$F(c_r^*) := \int\limits_0^T H_r^*(s)Z(z_0(s,c_r^*), z_0(s-\Delta, c_r^*), s, \varepsilon)\,ds = 0. \tag{5}$$

Корни уравнения (5) определяют порождающее решение

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + \overline{z}_0(t),$$

в малой окрестности которого в критическом случае могут существовать искомые решения T-периодической задачи для уравнения (1). Если же уравнение (5) не имеет действительных решений, то поставленная T-периодическая задача для уравнения (1) неразрешима.

Пример 1. Задача о нахождении T-периодического решения уравнения с запаздыванием

$$z'(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot \operatorname{ch}\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) \tag{6}$$

в окрестности периодического решения порождающего уравнения $z_0'(t,\varepsilon) = 0$ неразрешима.

Периодическая задача для порождающего уравнения представляет критический случай. Уравнение (5) для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (6)

$$F(c_r) := T \cdot \operatorname{ch} c_r = 0, \quad c_r \in \mathbb{R},$$

не имеет действительных корней, поэтому поставленная периодическая задача для уравнения (6) неразрешима.

Пример 2. Необходимое условие разрешимости задачи о нахождении $\frac{2\pi}{3}$-периодического решения уравнения с запаздыванием

$$z'(t,\varepsilon) = 3z\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) + \cos 6t + \varepsilon \cdot \left[1 - z^2\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)\right]^2 \tag{7}$$

в окрестности $\frac{2\pi}{3}$-периодического решения порождающего уравнения

$$z_0'(t) = 3z_0\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 6t \tag{8}$$

выполнено.

Действительно, характеристическое уравнение $\rho - 3e^{-\frac{\pi}{2}\rho} = 0$, соответствующее однородной части

$$z_0'(t) = 3z_0\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

уравнения (8), имеет простые чисто мнимые корни $\rho = \pm 3i$, поэтому $\frac{2\pi}{3}$-периодическая задача для уравнения (8) представляет критический случай. Сопряженное уравнение, соответствующее однородной части уравнения (8), имеет вид

$$y'(t) = -3y\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Его характеристическое уравнение

$$\rho + 3e^{\frac{\pi}{2}\rho} = 0$$

имеет простые чисто мнимые корни $\rho = \pm 3i$, определяющие общее решение

$$y(t, c_r) = H_r(t) c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^2,$$

$\dfrac{2\pi}{3}$-периодической задачи для сопряженного уравнения, соответствующего однородной части уравнения (8). Здесь

$$H_r(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

— (1×2)-матрица, составленная из двух линейно независимых $\dfrac{2\pi}{3}$-периодических решений

$$\psi_1(t) = \cos 3t, \quad \psi_2(t) = \sin 3t$$

сопряженного уравнения, соответствующего однородной части уравнения (8). При этом $\dfrac{2\pi}{3}$-периодическая задача для уравнения (8) разрешима, поскольку неоднородность уравнения (8) ортогональна базису решений сопряженного уравнения, соответствующего однородной части уравнения (8):

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} \cos 6t \, dt = 0.$$

Общее $\dfrac{2\pi}{3}$-периодическое решение уравнения (8) имеет вид

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + \overline{z}_0(t), \quad c_r := \left(c_r^{(1)}, c_r^{(2)}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь

$$X_r(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

— (1×2)-матрица, составленная из двух линейно независимых $\dfrac{2\pi}{3}$-периодических решений однородной части порождающего уравнения (8),

$$\overline{z}_0(t) = \frac{1}{15} \cos 6t + \frac{2}{15} \sin 6t$$

— частное $\dfrac{2\pi}{3}$-периодическое решение уравнения (8). Уравнение (5) для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении $\dfrac{2\pi}{3}$-периодического решения уравнения (7)

$$F(c_r) := -\frac{\pi}{1\,350} \begin{bmatrix} 60\left(c_r^{(1)}\right)^3 + \left(2c_r^{(1)} + c_r^{(2)}\right)\left[-59 + 60\left(c_r^{(2)}\right)^2\right] \\ -59c_r^{(1)} + 60\left(c_r^{(1)}\right)^3 + 118c_r^{(2)} - 180\left(c_r^{(1)}\right)^2 c_r^{(2)} - 60\left(c_r^{(2)}\right)^3 \end{bmatrix} = 0$$

имеет кроме нулевого ($c_r^* = 0 \in \mathbb{R}^2$) восемь нетривиальных решений, например

$$c_r^{(1)^*} = \frac{1}{30}\left(-2\sqrt{177(5-2\sqrt{5})} - \sqrt{885(5-2\sqrt{5})}\right), \quad c_r^{(1)^*} = -\frac{1}{10}\sqrt{\frac{59}{3}(5-2\sqrt{5})}.$$

2. Достаточное условие разрешимости. Предположим, что уравнение (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения T-периодической задачи для уравнения (1)

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$. Искомое решение

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$$

задачи (1) ищем в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$. Для нахождения T-периодического возмущения

$$x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) \equiv 0,$$

порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ используем T-периодическую задачу для уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t), z_0(t-\Delta) + x(t-\Delta), t, \varepsilon). \quad (9)$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первым двум аргументам вектор-функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t), z_0(t-\Delta), c_r^*) + x(t-\Delta), t, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ и непрерывную дифференцируемость по малому параметру, разлагаем эту функцию в малой окрестности точек $x(t) = 0$, $x(t-\Delta) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} &Z(z_0(t,c_r^*) + x(t), z_0(t-\Delta,c_r^*) + x(t-\Delta), t, \varepsilon) = \\ &\quad = Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) + A_{\Delta 1}(t)x(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + \\ &\quad + A_1(t)x(t,\varepsilon) + R(z_0(t,c_r^*) + x(t), z_0(t-\Delta,c_r^*) + x(t-\Delta), t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z(t,\varepsilon)}\right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*) \\ z(t-\Delta,\varepsilon)=z_0(t-\Delta,c_r^*)}},$$

$$A_{\Delta 1}(t) = \left.\frac{\partial Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z(t-\Delta,\varepsilon)}\right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*) \\ z(t-\Delta,\varepsilon)=z_0(t-\Delta,c_r^*)}},$$

$$A_2(t) = \left. \frac{\partial Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*) \\ z(t-\Delta,\varepsilon)=z_0(t-\Delta,c_r^*)}}.$$

Остаток $R(z_0(t,c_r^*)+x(t), z_0(t-\Delta,c_r^*)+x(t-\Delta), t, \varepsilon)$ разложения вектор-функции $Z(z_0(t,c_r^*)+$ $+x(t), z_0(t-\Delta,c_r^*)+x(t-\Delta), t, \varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по $x(t,\varepsilon), x(t-\Delta,\varepsilon)$ и ε в окрестности точек $x(t) = 0$, $x(t-\Delta) = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первые пять членов разложения (10). Обозначим через

$$B_0 = \int_0^T H_r^*(s)\left[A_1(s)X_r(s) + A_{\Delta 1}(s)X_r(s-\Delta)\right] ds$$

$(r \times r)$-матрицу, являющуюся производной левой части уравнения (5) для порождающих амплитуд

$$B_0 = \frac{\partial F(c_r^*)}{\partial c_r}.$$

Условия разрешимости T-периодической задачи (1) в критическом случае приведены в монографии [1] и статье [8].

Теорема. *В критическом случае порождающая T-периодическая задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (4), и при этом имеет семейство T-периодических решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + \overline{z}_0(t)$. Для каждого корня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих амплитуд (5) при условии*

$$\det B_0 \neq 0$$

T-периодическая задача для уравнения (1) однозначно разрешима в малой окрестности решения $z_0(t,c_r^*)$ порождающей задачи (2).

Теорема является частным случаем соответствующего утверждения из монографии [1, с. 155] и статьи [8], однако, в отличие от результатов А. М. Самойленко, А. А. Бойчука и В. Ф. Журавлева, в приведенной теореме используется информация только о базисе T-периодических решений $X_r(t)$ однородной части порождающей системы (2) и базисе T-периодических решений $H_r(t)$ однородной части сопряженной системы.

3. Итерационная схема. Предположим выполненными условия доказанной теоремы и пусть

$$\left\{\varphi^{(j)}(t)\right\}_{j=1}^{\infty} = \varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \ldots, \varphi^{(k)}(t), \ldots$$

— система линейно независимых непрерывно дифференцируемых T-периодических n-мерных вектор-функций. При этом в малой окрестности решения $z_0(t,c_r^*)$ порождающей T-периодической задачи для уравнения (2) существует единственное решение T-периодической задачи для уравнения (1). Первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к решению

T-периодической задачи для уравнения (9) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_1(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x_1(t,\varepsilon) + B(t)x_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon\,[Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) +$$

$$+ A_1(t)x_1(t,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t)]\,. \tag{11}$$

Обозначим через $\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(t) & \varphi_1^{(2)}(t) & \ldots & \varphi_1^{(k_1)}(t) \end{bmatrix}$ $(n \times k_1)$-матрицу, составленную из k_1 элементов системы функций $\left\{\varphi^{(j)}(t)\right\}_{j=1}^{\infty}$. Приближение к решению T-периодической задачи (11) ищем в виде

$$x_1(t,\varepsilon) := \xi_1(t,\varepsilon) \approx \varphi_1(t)c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}.$$

В общем случае первое приближение $\xi_1(t,\varepsilon)$ не является решением T-периодической задачи (11), поэтому потребуем, чтобы

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) - \right.$$

$$\left. - \xi_1'(t,\varepsilon) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big]\xi_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) \right\|_{L^2[0,T]} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi_1(t)$. Функция

$$F(c_1(\varepsilon)) = \int_0^T \Big\{ \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) +$$

$$+ \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big]\xi_1(t-\Delta,\varepsilon) - \xi_1'(t,\varepsilon)\Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) +$$

$$+ \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big]\xi_1(t-\Delta,\varepsilon) - \xi_1'(t,\varepsilon)\Big\}\, dt$$

представима в виде

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \Phi(t,\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) \right\|_{L^2[0,T]},$$

где

$$\Phi_1(t,\varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\varphi_1(t) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big]\varphi_1(t-\Delta) - \varphi_1'(t)$$

— $(n \times k_1)$-матрица. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \int\limits_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\left\{Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta, c_r^*), t, 0) + \varepsilon A_2(t)\right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)$-матрицы Грама [7]

$$\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) = \int\limits_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\, \Phi_1(t,\varepsilon)\, dt.$$

Таким образом, при условии $\det\Big[\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big)\Big] \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big)\Big]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\Big\{Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta, c_r^*), t, 0) + \varepsilon A_2(t)\Big\} dt,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение к решению T-периодической задачи (9)

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) \approx \varphi_1(t) c_1(\varepsilon).$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (9) ищем, как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t,\varepsilon)}{dt} = {} & A(t)x_2(t,\varepsilon) + B(t)x_2(t-\Delta,\varepsilon) + \\ & + \varepsilon\left[Z(z_0(t,c_r^*), z_0(t-\Delta,c_r^*), t, 0) + A_1(t)x_2(t,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x_2(t-\Delta,\varepsilon) + \right. \\ & \left. + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t,c_r^*) + x_1(t), z_0(t-\Delta,c_r^*) + x_1(t-\Delta), t, \varepsilon)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим через

$$\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \varphi_2^{(1)}(t) & \varphi_2^{(2)}(t) & \ldots & \varphi_2^{(k_2)}(t) \end{bmatrix},$$

$(n \times k_2)$-матрицу, составленную из k_2 элементов системы функций $\Big\{\varphi^{(j)}(t)\Big\}_{j=1}^{\infty}$. Приближение к решению T-периодической задачи (12) ищем в виде

$$x_2(t,\varepsilon) := \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), \quad \xi_2(t,\varepsilon) \approx \varphi_2(t)c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}.$$

Обозначим через

$$\Phi_2(t,\varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\varphi_2(t) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big]\varphi_2(t-\Delta) - \varphi_2'(t)$$

$(n \times k_2)$-матрицу. При условии невырожденности $(k_2 \times k_2)$-матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big) = \int\limits_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon)\, \Phi_2(t, \varepsilon)\, dt$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) \left\{R(z_0(t, c_r^*) + x_1(t), z_0(t - \Delta, c_r^*) + x_1(t - \Delta), t, \varepsilon)\right\} dt,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение к решению T-периодической задачи (9)

$$x_2(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) \approx \varphi_2(t) c_2(\varepsilon).$$

Третье приближение $x_3(t, \varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (9) ищем, как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx_3(t, \varepsilon)}{dt} = {} & A(t) x_3(t, \varepsilon) + B(t) x_3(t - \Delta, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \left[Z(z_0(t, c_r^*), z_0(t - \Delta, c_r^*), t, 0) + A_1(t) x_3(t, \varepsilon) + A_{\Delta 1}(t) x_3(t - \Delta, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t, c_r^*) + x_2(t), z_0(t - \Delta, c_r^*) + x_2(t - \Delta), t, \varepsilon)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим через

$$\varphi_3(t) = \begin{bmatrix} \varphi_3^{(1)}(t) & \varphi_3^{(2)}(t) & \ldots & \varphi_3^{(k_3)}(t) \end{bmatrix}$$

$(n \times k_3)$-матрицу, составленную из k_3 элементов системы функций $\Big\{\varphi^{(j)}(t)\Big\}_{j=1}^{\infty}$. Приближение к решению T-периодической задачи (13) ищем в виде

$$x_3(t, \varepsilon) := \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \xi_3(t, \varepsilon), \quad \xi_3(t, \varepsilon) \approx \varphi_3(t) c_3(\varepsilon), \quad c_3(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_3}.$$

Обозначим через

$$\Phi_3(t, \varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big] \varphi_3(t) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big] \varphi_3(t - \Delta) - \varphi_3'(t)$$

$(n \times k_3)$-матрицу. При условии невырожденности $(k_3 \times k_3)$-матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\varphi_3(\cdot), \varepsilon\Big) = \int\limits_0^T \Phi_3^*(t, \varepsilon)\, \Phi_3(t, \varepsilon)\, dt$$

находим вектор

$$c_3(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\Big(\varphi_3(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_3^*(t, \varepsilon) \times$$

$$\times \left\{ R(z_0(t, c_r^*) + x_2(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_2(t-\Delta), t, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \ R(z_0(t, c_r^*) + x_1(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_1(t-\Delta), t, \varepsilon) \right\} \, dt,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) третье приближение к решению T-периодической задачи (9)

$$x_3(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \xi_3(t, \varepsilon), \quad \xi_3(t, \varepsilon) \approx \varphi_3(t) c_3(\varepsilon).$$

Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение $x_{j+1}(t, \varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (9). Следующее приближение $x_{j+2}(t, \varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (9) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_{j+2}(t, \varepsilon)}{dt} = A(t) x_{j+2}(t, \varepsilon) + B(t) x_{j+2}(t-\Delta, \varepsilon) +$$

$$+ \, \varepsilon \left[Z(z_0(t, c_r^*), z_0(t-\Delta, c_r^*), t, 0) + A_1(t) x_{j+2}(t, \varepsilon) + A_{\Delta 1}(t) x_{j+2}(t-\Delta, \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \, \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t, c_r^*) + x_{j+1}(t, \varepsilon), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_{j+1}(t-\Delta, \varepsilon), t, \varepsilon) \right]. \qquad (14)$$

Обозначим через

$$\varphi_{j+2}(t) = \left[\begin{array}{cccc} \varphi_{j+2}^{(1)}(t) & \varphi_{j+2}^{(2)}(t) & \ldots & \varphi_{j+2}^{(k_{j+2})}(t) \end{array} \right]$$

$(n \times k_{j+2})$-матрицу, составленную из k_{j+2} элементов системы функций $\Big\{\varphi^{(j)}(t)\Big\}_{j=1}^{\infty}$. Приближение к решению T-периодической задачи (14) ищем в виде

$$x_{j+2}(t, \varepsilon) := \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \ldots + \xi_{j+2}(t, \varepsilon),$$

$$\xi_{j+2}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{j+2}(t) c_{j+2}(\varepsilon), \quad c_{j+2}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_{j+2}}.$$

Обозначим через

$$\Phi_{j+2}(t, \varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big] \varphi_{j+2}(t) + \Big[B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)\Big] \varphi_{j+2}(t-\Delta) - \varphi'_{j+2}(t)$$

$(n \times k_{j+2})$-матрицу. При условии невырожденности $(k_{j+2} \times k_{j+2})$-матрицы Грама

$$\Gamma\Big(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon\Big) = \int\limits_0^T \Phi_{j+2}^*(t, \varepsilon) \, \Phi_{j+2}(t, \varepsilon) \, dt$$

находим вектор

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\left(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon\right)\right]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_3^*(t, \varepsilon) \times$$

$$\times \left\{R(z_0(t, c_r^*) + x_{j+1}(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_{j+1}(t-\Delta), t, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - R(z_0(t, c_r^*) + x_j(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_j(t-\Delta), t, \varepsilon)\right\} dt,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) $(j+2)$-приближение к решению T-периодической задачи (9)

$$x_{j+2}(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \ldots + \xi_{j+2}(t, \varepsilon), \quad \xi_{j+2}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{j+2}(t) c_{j+2}(\varepsilon).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *В критическом случае порождающая T-периодическая задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (5), и при этом имеет семейство T-периодических решений $z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + \overline{z}_0(t)$. Для каждого корня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих амплитуд (5) при условии*

$$\det B_0 \neq 0$$

T-периодическая задача для уравнения (1) однозначно разрешима в малой окрестности решения $z_0(t, c_r^*)$ порождающей задачи (2). Для нахождения решения T-периодической задачи для уравнения (1) при условии

$$\det\left\{\Gamma\left[\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon\right]\right\} \neq 0, \quad j \in \mathbb{N},$$

применима итерационная схема

$$x_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) \approx \varphi_1(t) c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\left(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\right)\right]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{Z(z_0(t, c_r^*), z_0(t-\Delta, c_r^*), t, 0) + \varepsilon A_2(t)\right\} dt,$$

$$x_2(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) \approx \varphi_2(t) c_2(\varepsilon),$$

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\left(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\right)\right]^{-1} \int\limits_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) \left\{R(z_0(t, c_r^*) + x_1(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_1(t-\Delta), t, \varepsilon)\right\} dt,$$

$$x_3(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \xi_3(t, \varepsilon), \quad \xi_3(t, \varepsilon) \approx \varphi_3(t) c_3(\varepsilon),$$

$$c_3(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\Big(\varphi_3(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \int_0^T \Phi_3^*(t,\varepsilon)\times$$

$$\times \left\{R(z_0(t, c_r^*) + x_2(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_2(t-\Delta), t, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \; R(z_0(t, c_r^*) + x_1(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_1(t-\Delta), t, \varepsilon)\right\} dt,$$

. . . .

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ldots + \xi_{j+2}(t,\varepsilon), \tag{15}$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \varphi_{j+2}(t) c_{j+2}(\varepsilon),$$

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \left[\Gamma\Big(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \Phi_3^*(t,\varepsilon) \left\{R(z_0(t, c_r^*) + x_{j+1}(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_{j+1}(t-\Delta), t, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \; R(z_0(t, c_r^*) + x_j(t), z_0(t-\Delta, c_r^*) + x_j(t-\Delta), t, \varepsilon)\right\} dt,$$

. . . .

$$z_{j+2}(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_{j+2}(t,\varepsilon), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Найти оценку ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (15) к искомому решению T-периодической задачи для уравнения (1), можно аналогично [9].

Пример 3. Схема (15) применима для построения $\dfrac{2\pi}{3}$-периодического решения уравнения типа Дюффинга

$$z'(t,\varepsilon) = 3z\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) + \cos 6t + \varepsilon\, y^3\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) \tag{16}$$

в окрестности $\dfrac{2\pi}{3}$-периодического решения порождающего уравнения (8).

Характеристическое уравнение $\rho - 3e^{-\frac{\pi}{2}\rho} = 0$, соответствующее однородной части уравнения (8), имеет простые чисто мнимые корни $\rho = \pm 3i$, поэтому $\dfrac{2\pi}{3}$-периодическая задача для уравнения (8) представляет критический случай. Общее $\dfrac{2\pi}{3}$-периодическое решение уравнения (8) имеет вид

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + \overline{z}_0(t), \quad X_r(t) = \left[\; \sin 3t \quad \cos 3t \;\right], \quad c_r := \left(c_r^{(1)}, c_r^{(2)}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь

$$\overline{z}_0(t) = \frac{1}{15}\cos 6t + \frac{2}{15}\sin 6t$$

— частное $\frac{2\pi}{3}$-периодическое решение уравнения (8). Уравнение (5) для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении $\frac{2\pi}{3}$-периодического решения уравнения (16)

$$F(c_r) := \frac{\pi}{180}\begin{bmatrix} -c_r^{(2)}\left[2 + 45\left(c_r^{(1)}\right)^2 + 45\left(c_r^{(2)}\right)^2\right] \\ c_r^{(1)}\left[2 + 45\left(c_r^{(1)}\right)^2 + 45\left(c_r^{(2)}\right)^2\right] \end{bmatrix} = 0$$

имеет один нулевой ($c_r^* = 0 \in \mathbb{R}^2$) действительный корень, определяющий порождающее решение $z_0(t, c_r^*) \equiv \overline{z}_0(t)$. Матрица

$$B_0 = \frac{\pi}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

соответствующая порождающему решению $z_0(t, c_r^*)$ невырождена, поэтому согласно доказанной теореме задача о нахождении $\frac{2\pi}{3}$-периодического решения уравнения (16) однозначно разрешима. Согласно принятым обозначениям

$$A_1(t) \equiv 0, \quad A_{\Delta 1}(t) = \frac{1}{150}\left(5 - 3\cos 12t + 4\sin 12t\right).$$

На первом шаге итерационной схемы (15) положим

$$\varphi_1(t) = \Big[\sin 6t \;\; \cos 6t \;\; \sin 18t \;\; \cos 18t \;\; \sin 30t \;\; \cos 30t\Big],$$

при этом

$$\det\left[\Gamma\left(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\right)\right] = 254\,515\,205\,025\,\pi^6 + 2\,680\,079\,238\,\pi^6\varepsilon +$$
$$+ \frac{581\,158\,116}{25}\pi^6\varepsilon^2 + \frac{12\,972\,729}{125}\pi^6\varepsilon^3 + \frac{24\,051\,871}{60\,000}\pi^6\varepsilon^4 +$$
$$+ \frac{113\,687}{135\,000}\pi^6\varepsilon^5 + \frac{2\,722\,231}{1\,458\,000\,000}\pi^6\varepsilon^6 + \frac{9\,191}{4\,374\,000\,000}\pi^6\varepsilon^7 +$$
$$+ \frac{1\,094\,429}{377\,913\,600\,000\,000}\pi^6\varepsilon^8 + \frac{12\,857}{8\,503\,056\,000\,000\,000}\pi^6\varepsilon^9 +$$
$$+ \frac{689}{510\,183\,360\,000\,000\,000}\pi^6\varepsilon^{10} + \frac{7}{22\,958\,251\,200\,000\,000\,000}\pi^6\varepsilon^{11} +$$
$$+ \frac{7}{33\,059\,881\,728\,000\,000\,000\,000}\pi^6\varepsilon^{12} \neq 0.$$

Первое приближение к решению $\dfrac{2\pi}{3}$-периодической задачи для уравнения (16) определяет функция

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) \approx -\varepsilon\left[\left(\frac{1}{4\,500} + \frac{337\varepsilon}{224\,775\,000} - \frac{59\varepsilon^2}{33\,684\,960\,209}\right)\cos 6t + \right.$$
$$+\left(\frac{1}{1\,498\,500} - \frac{12\,338\varepsilon}{31\,904\,794\,367} + \frac{76\varepsilon^2}{41\,985\,679\,561}\right)\cos 18t+$$
$$+\left(\frac{1\,496\varepsilon}{112\,521\,049\,365} - \frac{3\varepsilon^2}{11\,841\,411\,106}\right)\cos 30t+$$
$$+\left(\frac{1}{3\,375} - \frac{149\varepsilon}{337\,162\,500} - \frac{113\varepsilon^2}{22\,731\,420\,480}\right)\sin 6t+$$
$$+\left(-\frac{17}{374\,625} + \frac{3\,973\varepsilon}{24\,950\,025\,000} + \frac{14\varepsilon^2}{14\,843\,528\,849}\right)\sin 18t-$$
$$\left.-\ \frac{161\varepsilon}{7\,567\,425\,000}\sin 30t\right].$$

На втором шаге итерационной схемы (15) положим $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, при этом

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big)\right] = \det\left[\Gamma\Big(\varphi_2(\cdot),\varepsilon\Big)\right] \neq 0.$$

Второе приближение

$$x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) \approx -\varepsilon\left[\left(\frac{1}{4\,500} + \frac{337\varepsilon}{224\,775\,000} - \frac{130\varepsilon^2}{23\,092\,737\,323}\right)\cos 6t + \right.$$
$$+\left(\frac{1}{1\,498\,500} - \frac{12\,338\varepsilon}{31\,904\,794\,367} + \frac{62\varepsilon^2}{23\,333\,312\,119}\right)\cos 18t+$$
$$+\left(\frac{1\,496\varepsilon}{112\,521\,049\,365} - \frac{3\varepsilon^2}{11\,841\,411\,106}\right)\cos 30t+$$
$$+\left(\frac{1}{3\,375} - \frac{149\varepsilon}{337\,162\,500} - \frac{335\varepsilon^2}{107\,253\,921\,451}\right)\sin 6t+$$
$$+\left(-\frac{17}{374\,625} + \frac{3\,973\varepsilon}{24\,950\,025\,000} + \frac{27\varepsilon^2}{18\,885\,668\,102}\right)\sin 18t-$$
$$\left.-\ \frac{161\varepsilon}{7\,567\,425\,000}\sin 30t\right]$$

к решению $\dfrac{2\pi}{3}$-периодической задачи для уравнения (16) определяет функция

$$\xi_2(t,\varepsilon) \approx -\varepsilon^3 \left(-\frac{523}{134\,865\,000\,000} \cos 6t + \right.$$
$$\left. + \frac{19}{22\,432\,000\,184} \cos 18t + \frac{57}{30\,849\,767\,390} \sin 6t + \frac{19}{39\,055\,787\,944} \sin 18t \right).$$

Заметим также, что найденные приближения к решению $\dfrac{2\pi}{3}$-периодической задачи для уравнения (16) являются $\dfrac{2\pi}{3}$-периодичными. Для проверки точности найденных приближений найдем невязки

$$\delta_j(\varepsilon) := \left\| z_j'(t,\varepsilon) - 3z_j\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) - \cos 6t - \varepsilon z_j^3\left(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) \right\|_{C[0;2\pi]}, \quad j = 0,1,2.$$

Положим $\varepsilon = 0,5$, при этом

$$\delta_0(0,5) \approx 0,00\,165\,635, \quad \delta_1(0,5) \approx 6,27\,609 \cdot 10^{-9}, \quad \delta_2(0,5) \approx 5,87\,256 \cdot 10^{-10}.$$

При $\varepsilon = 0,1$ невязки уменьшаются:

$$\delta_0(0,1) = 0,000\,331\,269, \quad \delta_1(0,1) \approx 5,0\,254 \cdot 10^{-11}, \quad \delta_2(0,1) \approx 4,95\,715 \cdot 10^{-12}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки еще меньше:

$$\delta_0(0,01) = 0,0000\,331\,269, \quad \delta_1(0,01) \approx 5,04\,113 \cdot 10^{-14}, \quad \delta_2(0,01) \approx 5,15\,828 \cdot 10^{-15}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. — М.: Гостехиздат, 1951. — 256 с.
3. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
4. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1969. — 309 с.
5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН Украины. — 1991. — № 9. — С. 9 – 13.
6. *Чуйко С. М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554 – 573.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер А. — 1990. — № 6. — С. 3 – 7.
9. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 424 с.

Получено 29.06.10