УДК 517.9

ПРО ПАРАМЕТРИЗАЦІЮ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ДВОТОЧКОВИМИ НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

М. Й. Ронто

Ін-т математики, Ун-т Мішкольца
3515, Мішкольц, Мішкольц-Ед'єтемварош, Угорщина
e-mail: matronto@gold.uni-miskolc.hu

К. В. Маринець

Ужгород. нац. ун-т
Україна, Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: katya_marinets@ukr.net

We obtain some results for studying solutions of nonlinear boundary-value problems of a certain type. The solutions are subject to two-point nonlinear boundary-value conditions. We show that it is effective to reduce the problem under consideration to a parametrized boundary-value problem with linear boundary-value conditions that contain some artificially introduced parameters. To study the transformed two-point problem, we substantiate a method that is based on special type approximations constructed in an analytic form. We prove that these approximations uniformly converge to a parametrized boundary-value function, and establish a relationship between this function and an exact solution. This technique leads to a certain system of algebraic equations. Solutions of the system define numerical values of the parameters corresponding to a solution of the given two-point nonlinear boundary-value problem.

Получены некоторые результаты, касающиеся исследования решений нелинейных краевых задач определенного типа, которые подчинены двухточечным нелинейным граничным условиям. Показана эффективность сведения данной задачи к параметризированной краевой задаче с линейными граничными условиями, содержащими некоторые искусственно введенные параметры. Для изучения преобразованной двухточечной задачи обоснован метод, который базируется на специального вида приближениях, построенных в аналитической форме. Доказана равномерная сходимость этих аппроксимаций к параметризированной граничной функции и установлена ее связь с точным решением. Данная техника приводит к некоторой системе алгебраических уравнений, решения которых дают численные значения параметров, соответствующие решению заданной двухточечной нелинейной краевой задачи.

1. Вступ. У сучасній літературі більш повно досліджено крайові задачі для нелінійних диференціальних рівнянь у випадку лінійних крайових умов. З нелінійними граничними умовами пов'язані певні труднощі при застосуванні до них розроблених раніше методів, а також при встановленні існування та наближеній побудові розв'язків. Так, у роботі [1] за допомогою відомого чисельно-аналітичного методу, заснованого на послідовних наближеннях [2, 3], вивчається двоточкова крайова задача вигляду

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad y, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g(y(0), y(T)) = 0. \tag{2}$$

Вважається, що права частина рівняння (1) визначена і неперервна в області

$$(t, y) \in [0, T] \times \Omega,$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область, задовольняє умову обмеженості вектором M та умову Ліпшиця з матрицею K :

$$|f(t, y)| \le M,$$

$$|f(t, u) - f(t, v)| \le K|u - v|,$$

а функція g визначена і неперервна в області

$$(u, v) \in \Omega \times \Omega.$$

З урахуванням цих припущень для дослідження розв'язків крайової задачі (1), (2) в роботі [1] використано нелінійну заміну змінних загального вигляду

$$y(t) = x(t) + h(t, y_0), \tag{3}$$

де функція h визначена та неперервна при

$$(t, y_0) \in [0, T] \times \Omega_1, \quad \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n,$$

неперервно диференційовна по t, набуває значення в $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \Omega_1$ — n-вимірний параметр, до того ж $D \cup \Omega_2 \subset \Omega$.

Замість задачі (1), (2) вводиться до розгляду наступна крайова задача:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{4}$$

$$Ay(0) + Cy(T) = \phi(y(0), y(T)), \tag{5}$$

в якій

$$\phi(u, v) = Au + Cv + g(u, v),$$

де A, C — деякі сталі матриці розмірності $n \times n$ такі, що $\det C \neq 0$.

Крайова задача (4), (5) за допомогою заміни змінних (3) зводиться до задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x + h(t, y_0)) - \frac{\partial h(t, y_0)}{\partial t}, \tag{6}$$

$$Ax(0) + Cx(T) = \phi(x(0) + h(0, y_0), x(T) + h(T, y_0)) - Ah(0, y_0) - Ch(T, y_0), \tag{7}$$

яка розглядається в області $[0,T] \times D$. Будемо вважати, що в (6), (7) параметр y_0 задовольняє рівняння

$$F(x_0, y_0) = \phi(x_0 + h(0, y_0), x(T) + h(T, y_0)) - Ah(0, y_0) - Ch(T, y_0) = 0,$$

де $x_0 = x(0)$.

Тоді замість неї розглядається наступна крайова задача:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x + h(t, y_0)) - \frac{\partial h(t, y_0)}{\partial t},$$

$$Ax(0) + Cx(T) = 0.$$

Розв'язок останньої досліджується з використанням рекурентної формули

$$\begin{aligned} x_m(t, x_0, y_0) := x_0 + \int\limits_0^t \left[f(s, x_{m-1}(s, x_0, y_0) + h(s, y_0)) - \frac{\partial h(s, y_0)}{\partial s} \right] ds - \\ - \frac{t}{T} \int\limits_0^T \left[f(s, x_{m-1}(s, x_0, y_0) + h(s, y_0)) - \frac{\partial h(s, y_0)}{\partial s} \right] ds + \\ + \frac{t}{T} \left[C^{-1}A + E \right] x_0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, \quad x(t, x_0, y_0) = x_0.$$

Гранична функція

$$x^*(t, x_0, y_0) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0, y_0)$$

послідовності (8) визначає розв'язок

$$z^*(t) = x^*(t, x_0, y_0) + h(t, y_0)$$

вихідної крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли x_0 та y_0 задовольняють систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} & F(x_0, y_0) = 0, \\ & \frac{1}{T} \left[C^{-1}A + E \right] x_0 - \frac{1}{T} \int\limits_0^T \left[f(s, x_{m-1}(s, x_0, y_0) + h(s, y_0)) - \frac{\partial h(s, y_0)}{\partial s} \right] ds = 0. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що при такому підході для можливості застосування чисельно-аналітичної схеми відповідні умови потрібно накласти на праву частину трансформованої системи (6).

У роботі [4] для дослідження крайових задач з нелінійними граничними умовами використовувалась більш проста заміна змінних, що значно спростило форму перетвореної системи диференціальних рівнянь, а також відповідну ітераційну схему. Тут для вивчення задачі

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \tag{9}$$

$$g(y(0), y(T)) = 0, \tag{10}$$

де $f : [0, T] \times G \to \mathbb{R}^n$, $g : G \times G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, використано заміну змінних вигляду

$$y(t) = x(t) + w,$$

де $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — деякий n-вимірний параметр, $x \in D$. Область визначення Ω вибрано так, що

$$D \cup \Omega \subset G.$$

Замість (9), (10) було досліджено крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t) + w),$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0$$

з використанням ітераційної схеми

$$x_{m+1}(t, w, z) := z + \int\limits_0^t f(s, x_m(s, w, z)ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x_m(s, w, z)ds + \frac{t}{T}\left[B^{-1}A + E_n\right] z,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(0, w, z) \equiv z,$$

де A, B — деякі сталі $(n \times n)$-матриці, до того ж $\det\, B \neq 0$.

Показано, що гранична функція

$$x^*(t, w, z) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, w, z)$$

буде розв'язком крайової задачі (9), (10) тоді і тільки тоді, коли параметри z та w задовольнятимуть систему визначальних рівнянь вигляду

$$\left[B^{-1}A + E_n\right] z - \int\limits_0^T f(s, x^*(s, w, z) + w)\, ds = 0,$$

$$g(z + w, -B^{-1}Az + w) = 0.$$

Зауважимо, що в [4] умови, які забезпечують можливість застосування чисельно-аналітичної схеми, накладались безпосередньо на праву частину вихідної системи (9). Техніку, запропоновану в роботі [4], згодом було використано для вивчення розв'язків інших типів крайових задач з нелінійними граничними умовами [5], параметризованих крайових задач, що містять параметри [6, 7], крайових задач типу Коші – Ніколетті [8 – 10].

2. Постановка задачі. Розглянемо нелінійну двоточкову крайову задачу з нелінійними граничними умовами вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

$$Ax(0) + Cx(T) + g(x(0), x(T)) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \quad \det C \neq 0, \tag{12}$$

де функції $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g : D \times D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, неперервні, а множина $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область, A, C — задані квадратні n-вимірні матриці, d — заданий n-вимірний вектор.

Задача полягає у знаходженні неперервно диференційовного на проміжку $[0, T]$ розв'язку системи диференціальних рівнянь (11), який задовольняє нелінійні граничні умови (12). Покажемо, що замість крайової задачі (11), (12) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (11) при певних параметризованих двоточкових крайових умовах, до яких треба додати відповідну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь для визначення числових значень введених параметрів.

3. Перехід за допомогою параметризації до задачі з лінійними крайовими умовами. Замінимо значення компонент розв'язку задачі (11), (12) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$x(T) = \operatorname{col}(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = \operatorname{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{13}$$

З використанням параметризації (13) нелінійні крайові умови (12) наберуть вигляду

$$Ax(0) + Cx(T) = d - g(x(0), \lambda). \tag{14}$$

Позначимо

$$d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda), \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} z &:= x(0) = \operatorname{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \lambda &:= x(T) = \operatorname{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \end{aligned} \tag{16}$$

Тоді параметризовані крайові умови (14) можна записати у вигляді

$$Ax(0) + Cx(T) = d(z, \lambda). \tag{17}$$

Таким чином, замість крайової задачі (11), (12) будемо розглядати еквівалентну їй параметризовану крайову задачу з лінійними граничними умовами вигляду (11), (17).

Зауваження 3.1. Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (11), (12) збігається з множиною тих розв'язків задачі (11), (17), які задовольняють додаткові умови (13).

Для дослідження розв'язків модифікованої крайової задачі (11), (17) обґрунтуємо відповідну чисельно-аналітичну схему, яка базується на методі послідовних наближень.

4. Збіжність послідовних наближень. На основі заданої функції f у правій частині системи диференціальних рівнянь (11) визначимо вектор

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right], \tag{18}$$

для якого виконується нерівність [11, 12]

$$\delta_D(f) \leq \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f(t,x)|.$$

У рівності (18), а також в аналогічних співвідношеннях нижче знаки $|\cdot|$, $\geq$, $\leq$, операції $\max$, $\min$ між векторами розуміються покомпонентно. Для $z \in D$, $\lambda \in D$ вигляду (16) введемо до розгляду вектор $\beta : D \times D \to \mathbb{R}^n$:

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + \left|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right|,$$

де I_n — одинична матриця розмірності $n \times n$.

Припустимо, що для крайової задачі (11), (12) виконуються наступні умови:

A) функція f неперервна в області $[0,T] \times D$ і задовольняє умову Ліпшиця вигляду

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u - v| \tag{19}$$

для всіх $t \in [0,T]$, $\{u,v\} \subset D$, де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами;

B) множина

$$D_\beta := \{z \in D : B(z,\beta(z,\lambda)) \subset D \text{ для всіх } \lambda \in D\},$$

де β — окіл $B(z,\beta(z,\lambda))$ точки $z \in D$, що визначена таким чином:

$$B(z,\beta(z,\lambda)) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| \leq \beta(z,\lambda) \text{ для всіх } \lambda \in D \subset \mathbb{R}^n\},$$

є непорожньою;

C) спектральний радіус $r(K)$ матриці K задовольняє нерівність

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{20}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (11), (17) введемо послідовність функцій $\{x_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\, ds -$$

$$- \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\, ds + \frac{t}{T} \left[C^{-1} d(z\lambda) - (C^{-1}A + I_n) z \right], \tag{21}$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots, x_0(t,z,\lambda) = \operatorname{col}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) = z \in D_\beta, x_m(t,z,\lambda) = \operatorname{col}(x_{m,1}(t,z,\lambda), x_{m,2}(t,z,\lambda), \ldots, x_{m,n}(t,z,\lambda))$, а z та λ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що для всіх $m \geq 1$, $\lambda \in D$ та $z \in D_\beta$ функції x_m задовольняють лінійні двоточкові крайові умови (17) та початкові умови

$$x_m(0,z,\lambda) = z.$$

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (21) та співвідношення її граничної функції до розв'язку вихідної нелінійної крайової задачі (11), (12).

Теорема 4.1. *Нехай функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (11), а також параметризовані крайові умови (17) задовольняють умови A – C.*

Тоді при всіх фіксованих $\lambda \in D$, $z \in D_\beta$:

1. Всі функції послідовності (21) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови (17):

$$A x_m(0,z,\lambda) + C x_m(T,z,\lambda) = d(z,\lambda),$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

2. Послідовність функцій (21) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції

$$x^*(t,z,\lambda) = \lim_{m \to \infty} x_m(t,z,\lambda). \tag{22}$$

3. Гранична функція x^* задовольняє початкові умови

$$x^*(0,z,\lambda) = z,$$

а також параметризовані двоточкові лінійні крайові умови

$$A x^*(0,z,\lambda) + C x^*(T,z,\lambda) = d(z,\lambda).$$

4. Гранична функція (22) для всіх $t \in [0,T]$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int\limits_0^t f(s, x(s))\, ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s))\, ds + \frac{t}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right], \qquad (23)$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(z,\lambda), \qquad (24)$$

$$x(0) = z, \qquad (25)$$

де $\Delta : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ — відображення, визначене формулою

$$\Delta(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x(s))\, ds. \qquad (26)$$

5. Справедлива оцінка відхилення функції x^* від її m-го наближення для всіх $t \in [0,T]$:

$$|x^*(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| \le \frac{20}{9}\, t\left(1 - \frac{1}{T}\right) Q^{m-1}(I_n - Q^{-1})h(z,\lambda), \qquad (27)$$

де

$$h(z,\lambda) := Q\delta_D(f) + K\left|C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)\, z\right|, \qquad (28)$$

$$Q := \frac{3T}{10}\, K. \qquad (29)$$

Доведення. Доведемо, що послідовність функцій (21) є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t,z,\lambda) \in D$ для всіх $(t,z,\lambda) \in$ $\in [0,T] \times D_\beta \times D$, $m \in \mathbb{N}$.

Справді, з використанням оцінки леми 2.3 з [3] (див. також лему 3 [11] та лему 2 [12])

$$\left|\int\limits_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\, ds\right] d\tau\right| \le \frac{1}{2}\,\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0.T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \qquad (30)$$

де

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad t|\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2}, \quad t \in [0,T], \qquad (31)$$

із співвідношення (21) при $m = 0$ отримуємо

$$|x_1(t,z,\lambda) - z| \leq \left| \int_0^t \left[f(t,z) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,s)\,ds \right] dt \right| +$$

$$+ \left| C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z \right| \leq \alpha_1(t)\delta_D(f) +$$

$$+ \left| C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z \right| \leq \beta(z,\lambda). \tag{32}$$

Виходячи з нерівності (32), можемо зробити висновок, що $x_1(t,z,\lambda) \in D$, коли $(t,z,\lambda) \in \in [0,T] \times D_\beta \times D$.

За індукцією неважко показати, що всі функції x_m, визначені згідно з (21), також належать множині D, $m = 1,2,3,\ldots$, $t \in [0,T]$, $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$.

Розглянемо різницю

$$x_{m+1}(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda) = \int_0^t [f(s,x_m(s,z,\lambda)) - f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))]\,ds -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^T [f(s,x_m(s,z,\lambda)) - f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))]\,ds,$$

$$m = 1,2,3,\ldots.$$

Позначимо $r_m(t,z,\lambda) := |x_m(t,z,\lambda) - x_{m-1}(t,z,\lambda)|$, $m = 1,2,3,\ldots$.

Використовуючи оцінку (30) та беручи до уваги умову Ліпшиця (19), отримуємо

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \leq K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s,z,\lambda)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T r_m(s,z,\lambda)\,ds \right], \tag{33}$$

$$m = 0,1,2,\ldots.$$

На підставі нерівності (32) одержуємо

$$r_1(t,z,\lambda) = |x_1(t,z,\lambda) - z| \leq \alpha_1(t)\delta_D(f) + \left| C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z \right|.$$

Використаємо оцінку з леми 3 [12]

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \frac{10}{9}\left(\frac{3}{10}T\right)^m \alpha_1(t), \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{34}$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)\,ds, \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{35}$$

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

З урахуванням рівності (35) із нерівності (33) при $m = 1$ випливає

$$r_2(t,z,\lambda) \le K\delta_D(f)\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \alpha_1(s)\,ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \alpha_1(s)\,ds\right] +$$

$$+ K\left|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right|\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T ds\right] \le$$

$$\le K[\alpha_2(t)\delta_D(f) + \alpha_1(t)|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z|].$$

За індукцією можна показати, що

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \le K^m\left[\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f) + \alpha_m(t)|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z|\right], \tag{36}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ обчислюються за формулою (35), а $\delta_D(f)$ визначено згідно з (18).

З урахуванням нерівності (34) із співвідношення (36) одержимо

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \le \frac{10}{9}\alpha(t)\left[Q^m\delta_D(f) + KQ^{m-1}|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z|\right], \tag{37}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де матриця Q має вигляд (29).

Тоді, взявши до уваги нерівність (37), розглянемо різницю

$$|x_{m+j}(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| \le |x_{m+j}(t,z,\lambda) - x_{m+j-1}(t,z,\lambda)| +$$

$$+ |x_{m+j-1}(t,z,\lambda) - x_{m+j-2}(t,z,\lambda)| + \ldots + |x_{m+1}(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,z,\lambda) \le \frac{10}{9}\alpha(t)\times$$

$$\times \sum_{i=1}^{j}\left(Q^{m+i}\delta_D(f) + KQ^{m+i-1}\left|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right|\right) =$$

$$= \frac{10}{9}\alpha(t)\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f) + KQ^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\left|C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right|\right]. \tag{38}$$

На підставі умови **C** спектральний радіус матриці Q вигляду (29) не перевищує 1. Тоді маємо

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (I_n - Q)^{-1}, \quad \lim_{m\to\infty} Q^m = O_n,$$

де O_n — нульова квадратна матриця розмірності n.

Тому з нерівності (38) можемо зробити висновок, що, згідно з критерієм Коші, послідовність $\{x_m\}$, яка задається формулою (21), рівномірно збігається на множині $[0,T] \times \times D_\beta \times D$ до деякої граничної функції x^*.

Оскільки функції x_m послідовності (21) задовольняють крайові умови (17) при довільних значеннях параметрів, x^* також їх задовольняє. Переходячи у формулі (21) до границі при $m \to \infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (23), а отже, є розв'язком задачі Коші (24), (25), де Δ — відображення, визначене згідно з (26).

Оцінка (27) є безпосереднім наслідком нерівності (38).

Теорему доведено.

5. Зв'язок граничної функції з розв'язком нелінійної крайової задачі. Поряд із системою (11) розглянемо також рівняння з постійним збуренням у правій частині

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu, \quad t \in [0,T], \tag{39}$$

і з початковими умовами

$$x(0) = z, \tag{40}$$

де $\mu = \mathrm{col}\,(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — керуючий параметр.

Покажемо, що для всіх фіксованих $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ параметр μ можна вибрати так, що розв'язок $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ задачі Коші (39), (40) в той же час є розв'язком двоточкової параметризованої крайової задачі (39), (17).

Теорема 5.1. *Нехай $z \in D_\beta$ та $\lambda \in D$ — довільно задані вектори. Припустимо, що виконуються всі умови теореми 4.1.*

Розв'язок $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ початкової задачі (39), (40) задовольняє крайові умови (17) тоді і тільки тоді, коли $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ збігається з граничною функцією $x^* = = x^*(t,z,\lambda,\mu)$ послідовності (21). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda))\,ds. \tag{41}$$

Доведення. *Достатність.* Нехай у правій частині системи диференціальних рівнянь (39) $\mu_{z,\lambda}$ має вигляд (41). З теореми 4.1 випливає, що при заданих z і λ границя (22) послідовності (21) є єдиним розв'язком крайової задачі (39), (17) при $\mu = \mu_{z,\lambda}$. Крім того, гранична функція x^* задовольняє і початкові умови (40), тобто є розв'язком задачі Коші (39), (40) при значенні параметра $\mu = \mu_{z,\lambda}$.

Необхідність. Зафіксуємо довільне значення $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ і припустимо, що задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \bar{\mu}, \quad t \in [0, T]$$

з початковими умовами (40) має розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(t)$, який задовольняє двоточкові крайові умови (17). Тоді $\bar{x}$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t \tag{42}$$

для всіх $t \in [0, T]$.

При $t = T$ з формули (42) отримуємо

$$T\bar{\mu} = \bar{x}(T) - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))\, ds. \tag{43}$$

За припущенням функція $\bar{x}$ задовольняє двоточкові крайові умови (17):

$$A\bar{x}(0) + C\bar{x}(T) = d(z, \lambda),$$

а також початкові умови

$$\bar{x}(0) = z,$$

звідки випливає рівність

$$\bar{x}(T) = C^{-1}[d(z, \lambda) - Az]. \tag{44}$$

Підставляючи вираз (44) у співвідношення (43), одержуємо

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T} C^{-1}[d(z, \lambda) - Az] - \frac{1}{T} z - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, \bar{x}(s))\, ds. \tag{45}$$

З іншого боку, вже доведено, що гранична функція x^* є розв'язком початкової задачі (39), (40) при $\mu = \mu_{z,\lambda}$ вигляду (41) та задовольняє крайові умови (17).

По аналогії маємо

$$x^*(t, z, \lambda, \mu) = z + \int_0^t f(s, x^*(s, z, \lambda, \mu))\, ds + \mu_{z,\lambda} t, \tag{46}$$

$$T\mu_{z,\lambda} = x^*(T, z, \lambda, \mu) - z - \int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda, \mu))\, ds, \tag{47}$$

$$Ax^*(0,z,\lambda,\mu) + Cx^*(T,z,\lambda,\mu) = d(z,\lambda),$$

$$x^*(0,z,\lambda,\mu) = z,$$

$$x^*(T,z,\lambda,\mu) = C^{-1}[d(z,\lambda) - Az]. \tag{48}$$

На основі формул (46) – (48) легко переконатися, що

$$\mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}C^{-1}[d(z,\lambda) - Az] - \frac{1}{T}z - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda,\mu))\,ds. \tag{49}$$

Підставляючи вираз (45) у (42), а (49) у (46), отримуємо, що для кожного $t \in [0,T]$

$$\bar{x}(t) = z + \int\limits_0^t f(s,\bar{x}(s))\,ds + \frac{1}{T}[C^{-1}[d(z,\lambda) - Az] - z] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,\bar{x}(s))\,ds, \tag{50}$$

$$x^*(t,z,\lambda,\mu) = z + \int\limits_0^t f(s, x^*(s,z,\lambda,\mu))\,ds + \frac{1}{T}\left[C^{-1}[d(z,\lambda) - Az] - z\right] -$$

$$- \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda,\mu))\,ds. \tag{51}$$

Нагадаємо, що на основі теореми 4.1 $\bar{x} \in D$ та $x^* \in D$. Очевидно, що із співвідношень (50), (51) випливає рівність

$$x^*(t,z,\lambda,\mu) - \bar{x}(t) = \int\limits_0^t [f(s, x^*(s,z,\lambda,\mu)) - f(s,\bar{x}(s))]\,ds -$$

$$- \frac{1}{T}\int\limits_0^T [f(s, x^*(s,z,\lambda,\mu)) - f(s,\bar{x}(s))]\,ds. \tag{52}$$

З формули (52) з урахуванням умови Ліпшиця (19) маємо, що функція

$$\omega(t) = |x^*(t,z,\lambda,\mu) - \bar{x}(t)|, \quad t \in [0,T], \tag{53}$$

задовольняє інтегральні нерівності

$$\omega(t) \le K\left[\int\limits_0^t \omega(s)\,ds + \frac{t}{T}\int\limits_0^T \omega(s)ds\right] \le K\alpha_1(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s), \quad t \in [0,T], \tag{54}$$

де $\alpha_1(t)$ має вигляд (31).

Використовуючи (54) рекурентно, приходимо до нерівності

$$\omega(t) \leq K^m \alpha_m(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \quad t \in [0,T], \tag{55}$$

де m — довільне натуральне число, а функції α_m задаються за допомогою співвідношення (35). З урахуванням оцінок (34) з нерівності (55) для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримуємо оцінку

$$\omega(t) \leq K\alpha_1(t)\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1} \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \quad t \in [0,T].$$

Спрямовуючи в останній нерівності $m \to \infty$ і враховуючи властивість (20), приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s\in[0,T]} \omega(s) \to 0.$$

Це означає, згідно з (53), що функція $\bar{x}$ збігається з x^*. І тому на основі формул (45) та (49) одержимо $\bar{\mu} = \mu_{z,\lambda}$.

Теорему доведено.

З'ясуємо відношення граничної функції $x^* = x^*(t,z,\lambda)$ послідовності (21) до розв'язку параметризованої крайової задачі (11), (17) або еквівалентної їй задачі (11), (12).

Теорема 5.2. *Нехай для крайової задачі (11), (12) виконуються умови A – C.*

Пара $(x^*(\cdot,z^*,\lambda^*),\lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (11), (17) тоді і тільки тоді, коли $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь

$$\Delta(z,\lambda) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda))\,ds = 0, \tag{56}$$

$$x^*(T,z,\lambda) = \lambda. \tag{57}$$

Доведення. Достатньо застосувати теорему 5.1 і зауважити, що диференціальне рівняння (24) збігається з (11) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*,λ^*) задовольняє рівняння

$$\Delta(z^*,\lambda^*) = 0.$$

З огляду на заміну змінних (13) та еквівалентність (11), (12) та (11), (17) очевидно, що $(x^*(\cdot,z^*,\lambda^*),\lambda^*)$ збігається з розв'язком параметризованої крайової задачі (11), (13), (17) тоді і тільки тоді, коли пара $(x^*(\cdot,z^*,\lambda^*),\lambda^*)$ задовольняє рівняння

$$x^*(T,z,\lambda^*) = \lambda^*,$$

тобто пара $(x^*(\cdot,z^*,\lambda^*),\lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (11), (17) тоді і тільки тоді, коли виконуються (56), (57).

Теорему доведено.

Наступне твердження доводить, що визначальна система рівнянь (56), (57) виявляє усі можливі розв'язки вихідної крайової задачі (11), (12).

Лема 5.1. *Нехай виконуються всі умови теореми 4.1 і, крім того, існують деякі вектори $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (56), (57).*

Тоді нелінійна крайова задачі (11), (12) має розв'язок $x(\cdot)$ такий, що

$$x(0) = z,$$

$$x(T) = \lambda.$$

Більш того, цей розв'язок має вигляд

$$x(t) = x^*(t, z, \lambda), \quad t = [0, T], \tag{58}$$

де x^* є граничною функцією послідовності (21). І навпаки, якщо крайова задача (11), (12) має розв'язок $x(\cdot)$, то цей розв'язок обов'язково має вигляд (58) і система визначальних рівнянь (56), (57) задовольняється при

$$z = x(0),$$

$$\lambda = x(T).$$

Доведення. Будемо застосовувати теореми 5.1 і 5.2. Якщо існують $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (56), (57), то на основі теореми 5.2 функція (58) є розв'язком крайової задачі (11), (12). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (11), (12), то ця функція є розв'язком задачі Коші (39), (40) при

$$\mu = 0,$$

$$z = x(0).$$

Оскільки $x(\cdot)$ задовольняє крайові умови (12), а отже, і крайові умови (17) при виборі параметрів z та λ згідно з (16), то з теореми 5.1 випливає, що має місце рівність (58). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda} = 0,$$

$$z = x(0).$$

Однак $\mu_{z,\lambda}$ має вигляд (41), тому перше рівняння (56) визначальної системи задовольняється, якщо

$$z = x(0), \quad \lambda = \mathrm{col}\,(x_1(T), \ldots, x_n(T)) :$$

$$\Delta(x(0), \lambda) = 0.$$

Зрештою, із співвідношення (16) безпосередньо випливає, що друге рівняння (57) визначальної системи також має місце. Таким чином, ми вказали пари $(z, \lambda) = (x(0), x(T))$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (56), (57), що і завершує доведення.

Лему доведено.

Зауваження 5.1. Основна складність реалізації даного методу пов'язана з відшуканням граничної функції x^*. Однак у більшості випадків цю проблему можна розв'язати, використовуючи властивості наближеного розв'язку x_m, побудованого в аналітичній формі.

При деякому $m \geq 1$ визначимо функцію $\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ згідно з формулою

$$\Delta_m(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))\,ds, \tag{59}$$

де z та λ задаються співвідношенням (16). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (11), (17) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних рівнянь, що має вигляд

$$\Delta_m(z,\lambda) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right] - -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))\,ds = 0, \tag{60}$$

$$x_m(T,z,\lambda) = \lambda, \tag{61}$$

де x_m — вектор-функція, задана рекурентним співвідношенням (21). Природно очікувати, що за відповідних умов зі зростанням m системи (56), (57) та (60), (61) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (11), (12).

6. Приклад нелінійної двоточкової крайової задачі з нелінійними граничними умовами. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 = f_1(t,x_1,x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{t}{8}x_2 + \frac{t^2}{16} + \frac{9}{32} = f_2(t,x_1,x_2) \end{aligned} \tag{62}$$

з нелінійними двоточковими граничними умовами вигляду

$$\begin{aligned} x_1(0) + x_1(1) - [x_2(1)]^2 &= \frac{3}{16}, \\ x_2(0) + x_1(1) - x_2(1) &= -\frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{63}$$

Зауважимо, що точним розв'язком задачі (62), (63) є розв'язок

$$x_1^* = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{16},$$

$$x_2^* = \frac{t}{4}.$$

Граничні умови (63) можна записати у матрично-векторній формі

$$Ax(0) + Cx(1) + g(x(0), x(1)) = d, \tag{64}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 3/16 \\ -1/16 \end{pmatrix},$$

$$g(x(0), x(1)) = \begin{pmatrix} -[x_2(1)]^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $\det C = -1 \neq 0$.

Крайова задача (62), (64) визначена на множині

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq \frac{3}{4} \right\}, \quad t \in [0, 1].$$

За матрицю, яка фігурує в умові Ліпшиця (19), можна взяти таку:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 7/8 \end{pmatrix},$$

до того ж

$$r(K) < 1,27,$$

тобто умова **C** задовольняється.

Вектори $\delta_G(f)$ та $\beta(z, \lambda)$ виберемо таким чином:

$$\delta_G(f) \leq \begin{pmatrix} 3/4 \\ 355/512 \end{pmatrix},$$

$$\beta(z, \lambda) := \frac{1}{2}\, \delta_G(f) + \left| C^{-1} d(z, \lambda) - \left(C^{-1} A + I_n \right) z \right| \leq \begin{pmatrix} 3/8 \\ 355/1024 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} -455/256\, z_1 \\ 183/256\, z_2 \end{vmatrix},$$

тобто умова непорожності множини D_β, яка фігурує в умові **B**, має місце.

Введемо параметри

$$x(1) = \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

З використанням параметризації (65) крайові умови (64) запишуться у вигляді лінійних двоточкових параметризованих граничних умов:

$$Ax(0) + Cx(1) = d - g(x(0), \lambda). \tag{66}$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо

$$d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 + 3/16 \\ -1/16 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

З урахуванням позначення (67) граничні умови (66) наберуть вигляду

$$Ax(0) + Cx(1) = d(z, \lambda), \tag{68}$$

де $z := x(0) = \mathrm{col}\,(z_1, z_2)$, $\lambda = \mathrm{col}\,(\lambda_1, \lambda_2)$, $d(z, \lambda)$ визначено згідно з (67).

Таким чином, для розглядуваної задачі виконуються умови А – С. Отже, до неї можна застосувати схему чисельно-аналітичного алгоритму, про яку йдеться в даній роботі.

Послідовні наближення (21) для крайової задачі (62), (68) мають вигляд

$$x_{m,1}(t, z, \lambda) := z_1 + \int\limits_0^t f_1(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda))\, ds -$$

$$- t \int\limits_0^1 f_1(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda))\, ds + t\left(\frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1\right),$$

$$x_{m,2}(t, z, \lambda) := z_2 + \int\limits_0^t f_2(s, x_{m-1,2}(s, z, \lambda))\, ds -$$

$$- t \int\limits_0^1 f_2(s, x_{m-1,2}(s, z, \lambda))\, ds + t\left(\frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1\right),$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Використовуючи пакет символьної математики Maple, одержуємо, що результатом першої ітерації з невідомими шуканими параметрами є такі значення компонент наближеного розв'язку:

$$x_{11} = z_1 + t\left(0,1875 + \lambda_2^2 - 2z_1\right),$$

$$x_{12} = z_2 + 0,28125\, t + 0,02083333333\, t^3 + 0,0625\, z_2 t^2 - 0,5\, z_2^2 t -$$

$$- 0,5\, z_1 t - t(0,3020833333 + 0,0625\, z_2 - 0,5\, z_2^2 - 0,5\, z_1) + t\,(0,25 + \lambda_2^2 - z_1).$$

При цьому наближена система визначальних рівнянь (60), (61) для знаходження невідомих параметрів при $m = 1$ має вигляд

$$0,0677083333 - 0,9895833333\, z_2 - 1,5\, z_1 + 0,5\, \lambda_2^2 = 0,$$

$$-0,0142919147 - 0,05668402778\, z_2 - 0,9625\, z_1 + 1,2125\, \lambda_2^2 +$$

$$+ 0,5212239583\, z_2^2 + 0,515625\, z_2(0,2291666667 - 0,0625\, z_2 - z_1 + \lambda_2^2) +$$

$$+ 0,1666666667(0,2291666667 - 0,0625\, z_2 - z_1 + \lambda_2^2)^2 = 0, \tag{69}$$

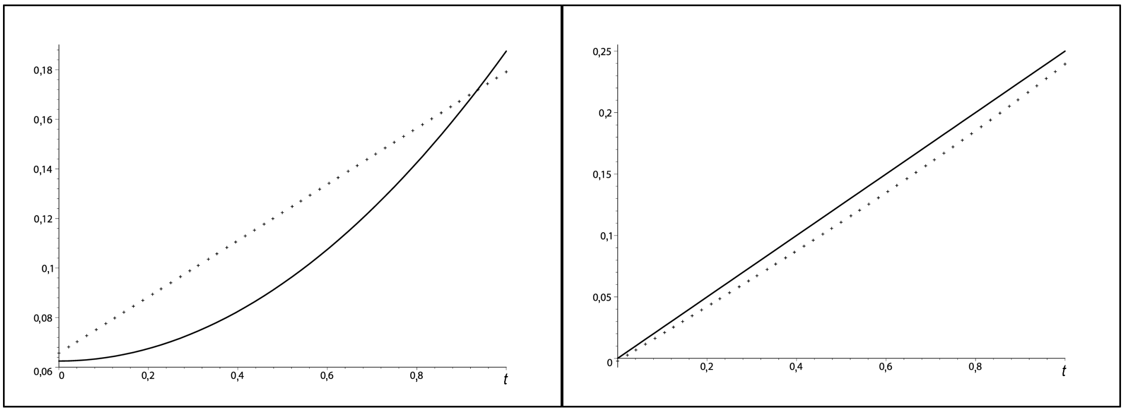

Рис. 1. Перша та друга компоненти точного розв'язку (суцільна лінія) та їх перше наближення (пунктирна).

$$\lambda_2^2 - z_1 + 0,1875 = \lambda_1,$$
$$z_2 - z_1 + \lambda_2^2 + 0,25 = \lambda_2.$$

Розв'язками системи (69) є такі:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{11} = 0,1791331482, \\ \lambda_2 &= \lambda_{12} = 0,2394378513, \\ z_1 &= z_{11} = 0,06569733651, \\ z_2 &= z_{12} = -0,002195296806. \end{aligned} \tag{70}$$

Підставляючи значення з (70) у (69), отримуємо значення компонент наближеного розв'язку у першій ітерації:

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= 0,1134358116\,t + 0,06569733651, \\ x_{12}(t) &= 0,02083333333\,t^3 - 0,0001372060504\,t^2 + \\ &+ 0,2209370209\,t - 0,002195296806. \end{aligned} \tag{71}$$

На рис. 1 зображено першу та другу компоненти точного та наближеного розв'язку у першій ітерації.

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першого наближення, що має вигляд (71), при $t \in [0,1]$ дається нерівностями

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \leq 0,1029775824,$$
$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \leq 0,1891220632.$$

При $m = 2$ розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь (60), (61) є наступні значення параметрів:

$$\lambda_1 = \lambda_{21} = 0,18744449060,$$

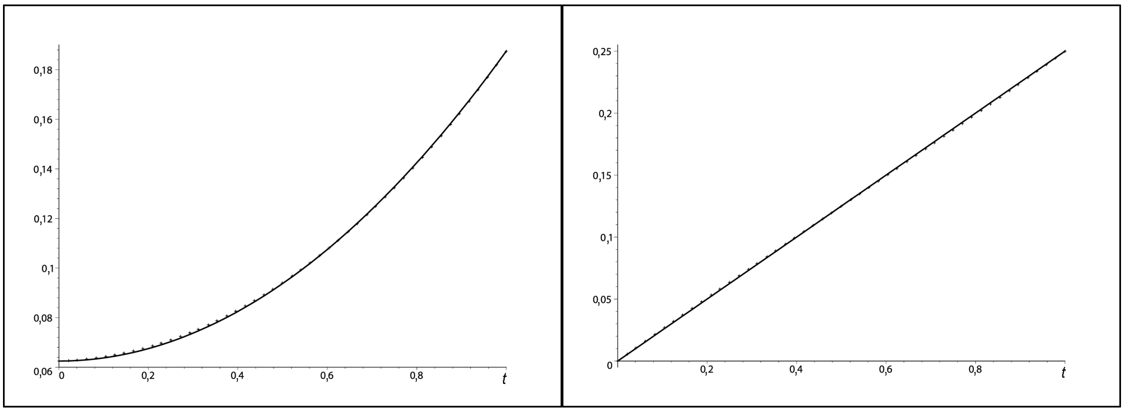

Рис. 2. Перша та друга компоненти точного розв'язку (суцільна лінія) та їх друге наближення (пунктирна).

$$\lambda_2 = \lambda_{22} = 0,2499392178,$$

$$z_1 = z_{21} = 0,06252470657,$$

$$z_2 = z_{22} = -0,5688202756 \cdot 10^{-5}.$$

Компоненти наближеного розв'язку в другій ітерації мають вигляд

$$\begin{aligned} x_{21}(t) &= 0,00208333332\,t^4 - 0,1185042241 \cdot 10^{-6} t^3 + \\ &+ 0,1145559641\,t^2 + 0,0051560206\,t + 0,06252470657, \\ x_{22}(t) &= -0,0003100198412\,t^7 + 0,1234419001 \cdot 10^{-8} t^6 - \\ &- 0,0004337997010\,t^5 + 0,3887933345 \cdot 10^{-7} t^4 + \\ &+ 0,02163095107\,t^3 - 0,03122975378\,t^2 + \\ &+ 0,2600084702\,t - 0,5688202756 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \tag{72}$$

На рис. 2 побудовано графіки компонент точного та наближеного розв'язку крайової задачі в другій ітерації, а на рис. 3 — графіки похибок другого наближення.

Максимальне відхилення точного розв'язку від його другого наближення, що має вигляд (72), при $t \in [0,1]$ дається нерівностями

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{21}(t)| \le 0,0004205763744,$$

$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{22}(t)| \le 0,001065024056.$$

Аналогічно можна отримати й вищі наближення до розв'язку вихідної крайової задачі. Наприклад, співвідношення точного розв'язку та його третього наближення зображено на рис. 4, а похибки третього наближення — на рис. 5.

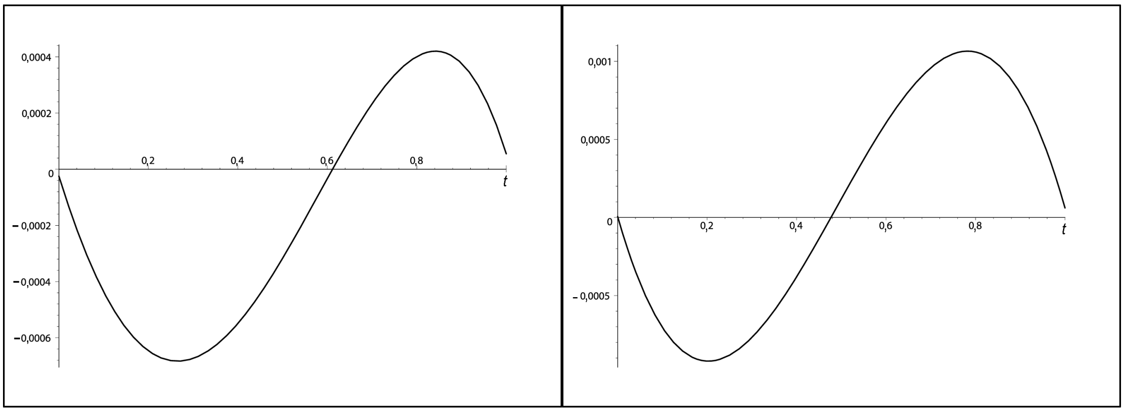

Рис. 3. Графіки похибок другої апроксимації першої та другої компонент розв'язку.

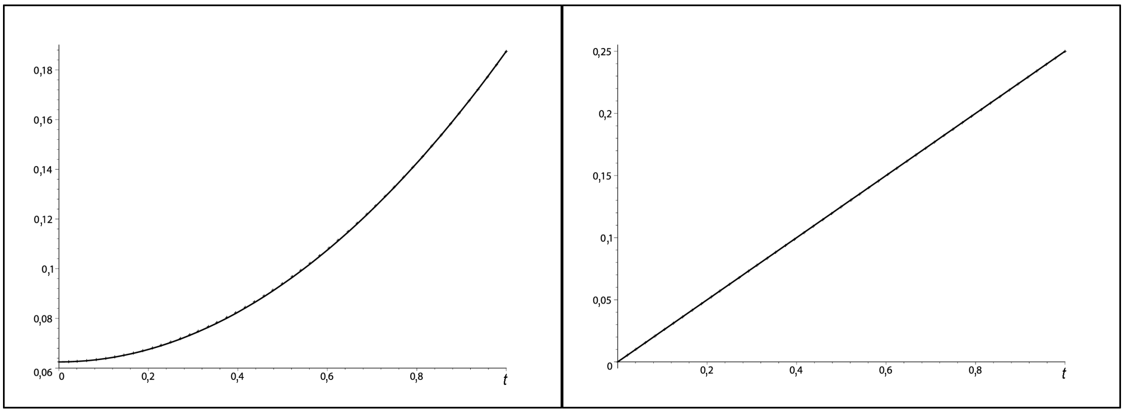

Рис. 4. Перша та друга компоненти точного розв'язку (суцільна лінія) та їх третє наближення (пунктирна).

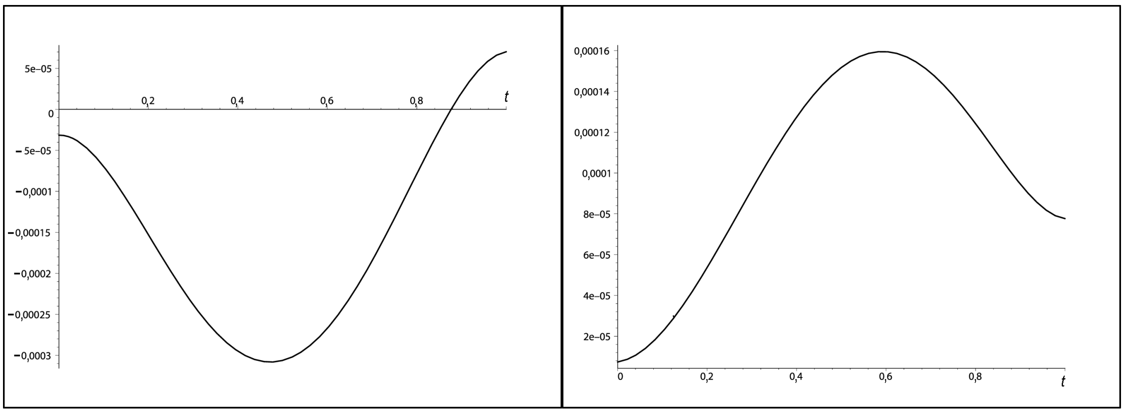

Рис. 5. Графіки похибок третьої апроксимації першої та другої компонент розв'язку.

При цьому максимальне відхилення похибки точного та наближеного розв'язку у третій ітерації дається нерівностями

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \le 0,00007027803813,$$

$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \le 0,0001595417903.$$

Розрахунки показують, що абсолютна похибка побудованого за вказаною ітераційною схемою третього наближення становить $7 \cdot 10^{-5}$ для першої компоненти розв'язку та 10^{-4} для другої його компоненти.

7. Достатні умови існування розв'язків.

Означення 7.1. *Для всіх індексів i_1 та i_2, що набувають значень від 1 до n, визначимо матрицю J_{i_1,i_2} розмірності $(i_2 - i_1 + 1) \times n$ таким чином:*

$$J_{i_1,i_2} := (O_{i_2-i_1+1,i_1-1}, I_{i_2-i_1+1}, O_{i_2-i_1+1,n-i_2}),$$

де I_i — одинична квадратна матриця розмірності i, $O_{i,j}$ — нульова матриця розмірності $i \times j$.

Таким чином, множення зліва деякого вектора матрицею J_{i_1,i_2} еквівалентно вибору його компонент з номерами від i_1 до i_2.

Лема 7.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1.*

Тоді для кожного $m \ge 1$ та z, λ вигляду (16) для точної та наближеної визначальних функцій

$$\Delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$\Delta_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

визначених згідно з (26) та (59), справджується оцінка

$$|\Delta(z,\lambda) - \Delta_m(z,\lambda)| \le \frac{10T}{27} KQ^{m-1}(I_n - Q)^{-1} h(z,\lambda), \tag{73}$$

де K, Q, $h(z,\lambda)$ задаються співвідношеннями (19), (29) та (28) відповідно.

Доведення. Зафіксуємо параметри z, λ вигляду (16). З урахуванням умови Ліпшиця (19), оцінки (27) та рівності

$$\int_0^T \alpha_1(t)dt = \frac{T^2}{3} \tag{74}$$

маємо

$$|\Delta(z,\lambda)-\Delta_m(z,\lambda)| = \left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x_m(s,z,\lambda))\,ds - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda))\,ds\right| \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int\limits_0^T K|x^*(s,z,\lambda)-x_m(s,z,\lambda)|\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{T}K\int\limits_0^T \frac{10}{9}\alpha_1(s)Q^{m-1}(I_n-Q)^{-1}h(z,\lambda)ds =$$

$$= \frac{10}{9T}KQ^{m-1}(I_n-Q)^{-1}h(z,\lambda)\int\limits_0^T \alpha_1(s)ds =$$

$$= \frac{10T}{27}KQ^{m-1}(I_n-Q)^{-1}h(z,\lambda),$$

що і доводить лему.

На основі систем визначальних рівнянь (56), (57) та (60), (61) введемо до розгляду відображення

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n},$$

$$\Phi_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n},$$

які для всіх z, λ з (16) мають вигляд

$$\Phi(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x^*(s,z,\lambda)\right)\,ds \\ \\ x^*(T,z,\lambda)-\lambda \end{pmatrix}, \tag{75}$$

$$\Phi_m(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))\,ds \\ \\ x_m(T,z,\lambda)-\lambda \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Означення 7.2. *Нехай $H \subset \mathbb{R}^{2n}$ — деяка непорожня множина. Для будь-якої пари функцій*

$$f_j = \operatorname{col}\left(f_{j1}(x),\ldots,f_{j,2n}(x)\right) : H \to \mathbb{R}^{2n}, \quad j = 1,2,$$

має місце запис

$$f_1 \rhd_H f_2$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція

$$k : H \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$$

така, що

$$f_{1,k(x)} > f_{2,k(x)}$$

для всіх $x \in H$.

Це означає, що в кожній точці $x \in H$ *принаймні одна з компонент вектора* $f_1(x)$ *більша, ніж відповідна їй компонента вектора* $f_2(x)$.

Розглянемо множину

$$\Omega = D \times \Lambda, \tag{77}$$

де $D \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — деякі відкриті множини.

Теорема 7.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1 і можна вказати деяке* $m \geq 1$ *та множину* $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ *вигляду (77) такі, що має місце співвідношення*

$$|\Phi_m| \triangleright_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \dfrac{10T}{27} KQ^{m-1}(I_n - Q)^{-1}h(z,\lambda) \\ \\ \dfrac{5T}{9} Q^{m-1}(I_n - Q)^{-1}h(z,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{78}$$

де $\partial\Omega$ *— границя області* Ω, *а вектор* $h(z,\lambda)$ *визначено згідно з (28). Крім того, якщо ступінь Брауера векторного поля* Φ_m *на множині* Ω *відносно нуля задовольняє нерівність*

$$\deg(\Phi_m, \Omega, 0) \neq 0,$$

то існує пара $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$ *така, що*

$$x^*(t) = x^*(t, z^*, \lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \lambda^*) \tag{79}$$

є розв'язком нелінійної крайової задачі (11), (12) з початковою умовою

$$x^*(0) = z^*. \tag{80}$$

Доведення. Покажемо, що векторні поля Φ та Φ_m гомотопні. Для цього введемо до розгляду сім'ю векторних відображень

$$P(\theta, z, \lambda) := \Phi_m(z,\lambda) + \theta\left[\Phi(z,\lambda) - \Phi_m(z,\lambda)\right], \quad (z,\lambda) \in \partial\Omega, \tag{81}$$

де $\theta \in [0, 1]$.

Очевидно, що $P(\theta, \cdot, \cdot)$ є неперервним на $\partial\,\Omega$ для кожного $\theta \in [0, 1]$. Крім того,

$$P(0, z, \lambda) = \Phi_m(z,\lambda), \quad P(1, z, \lambda) = \Phi(z,\lambda)$$

для всіх $(z, \lambda) \in \partial\Omega$.

Для довільної пари $(z, \lambda) \in \partial\,\Omega$ з урахуванням (81) маємо

$$|P(\theta, z, \lambda)| = |\Phi_m(z, \lambda) + \theta[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)]| \geq |\Phi_m(z, \lambda)| - |\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)|. \quad (82)$$

З іншого боку, використовуючи позначення (75), (76), наближення (21) та оцінку (73), одержуємо покомпонентні нерівності

$$|\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)| \leq \begin{pmatrix} \dfrac{10T}{27}\, KQ^{m-1}(I_n - Q)^{-1}h(z, \lambda) \\[2ex] \dfrac{5T}{9}\, Q^{m-1}(I_n - Q)^{-1}h(z, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (83)$$

звідки на основі співвідношень (78), (82), (83) випливає, що

$$|P(\theta, \cdot, \cdot)| \rhd_{\partial\Omega} 0, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (84)$$

Вираз (84), зокрема, показує, що $P\,(\theta, \cdot, \cdot)$ не перетворюється в 0 для жодного значення $\theta \in [0, 1]$, тобто перетворення (81) невироджене, а отже, векторні поля Φ_m та Φ гомотопні.

Беручи до уваги співвідношення (78) та властивість інваріантності ступеня Брауера відносно гомотопії, можемо зробити висновок, що

$$\deg\left(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0\right) = \deg\left(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0\right) \neq 0.$$

Класичний топологічний результат (див. [13], теорема А.2.4) гарантує існування пари

$$(z^*, \lambda^*) \in \Omega$$

такої, що

$$\Phi(z^*, \lambda^*) = 0.$$

Тому пара (z^*, λ^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (56), (57).

Беручи до уваги умови теореми 5.2, приходимо до висновку, що функція (79) є розв'язком вихідної нелінійної двоточкової крайової задачі (11), (12) з початковою умовою (80).

Теорему доведено.

8. Необхідні умови розв'язності. Введемо до розгляду матрицю

$$R := \sup_{t \in [0, T]} \left| I_n - \frac{t}{T}(C^{-1}A + I_n) \right| \quad (85)$$

та вектор

$$\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right) := C^{-1}\left(g\left(z^0, \lambda^0\right) - g\left(z^1, \lambda^1\right)\right), \quad (86)$$

де g — функція, яка фігурує в крайових умовах (12).

Лема 8.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1.*

Тоді гранична функція (22) відносно змінних z та λ задовольняє умову ліпшицевого типу вигляду

$$\left|x^*\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x^*\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le\left[R+\frac{10}{9}K(I_n-Q)^{-1}R\alpha_1(t)\right]\left|z^0-z^1\right|+$$

$$+\left[I_n+\frac{10}{9}K(I_n-Q)^{-1}\alpha_1(t)\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|, \tag{87}$$

де $z^j\in D_\beta,\ \lambda^j\in D,\ j=0,1,\ t\in[0,T]$, *а матриця* Q *має вигляд (29).*

Доведення. Безпосередньо з виразів (21) та (15) випливає, що

$$x_1(t,z^0,\lambda^0)-x_1(t,z^1,\lambda^1)=(z^0-z^1)+\int\limits_0^t[f(s,z^0)-f(s,z^1)]\,ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int\limits_0^T[f(s,z^0)-f(s,z^1)]\,ds+$$

$$+\frac{t}{T}\left[C^{-1}d-C^{-1}g(z^0,\lambda^0)-(C^{-1}A+I_n)z^0-\right.$$

$$\left.-C^{-1}d+C^{-1}g(z^1,\lambda^1)+(C^{-1}A+I_n)z^1\right]=$$

$$=(z^0-z^1)+\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t\left[f(s,z^0)-f(s,z^1)\right]\,ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int\limits_t^T\left[f(s,z^0)-f(s,z^1)\right]\,ds-\frac{t}{T}C^{-1}\left(g(z^0,\lambda^0)-g(z^1,\lambda^1)\right)-$$

$$-\frac{t}{T}\left[(C^{-1}A+I_n)\,(z^0-z^1)\right].$$

Використовуючи рекурентну формулу (35) та беручи до уваги співвідношення (85), (86), (31), (19), одержуємо

$$\left|x_1\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x_1\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le R\left|z^0-z^1\right|+\frac{t}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+$$

$$+K\left[\left(1-\frac{t}{T}I_n\right)\int\limits_0^t ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T ds\right]\left|z^0-z^1\right|=$$

$$=\left[R+\alpha_1(t)K\right]\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|, \tag{88}$$

для всіх $t\in[0,T]$.

Аналогічно, враховуючи вирази (21), (35) та (88), маємо

$$\left|x_2\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_2\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq R\left|z^0 - z^1\right| + \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right| +$$

$$+ K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \left[\left(R + \alpha_1(s)K\right)\left|z^0 - z^1\right| + \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|\right] ds +\right.$$

$$\left.+ \frac{t}{T}\int\limits_t^T \left[\left(R + \alpha_1(s)K\right)\left|z^0 - z^1\right| + \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|\right] ds\right] \leq$$

$$\leq R\left|z^0 - z^1\right| + \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right| +$$

$$+ K\left\{\left[R\alpha_1(t) + \alpha_2(t)K\right]\left|z^0 - z^1\right| + K\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|\alpha_1(t)\right\} =$$

$$= \left[R + KR\alpha_1(t) + K^2\alpha_2(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ K\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|\alpha_1(t) + \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|.$$

За індукцією можна показати, що

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq \left[R + \sum_{i=1}^{m-1} K^i R\alpha_i(t) + K^m\alpha_m(t)\right] \times$$

$$\times \left|z^0 - z^1\right| + \sum_{i=0}^{m-1} K^i\alpha_i(t)\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|. \qquad (89)$$

З нерівності (89) з використанням оцінок (34), (20) та формули (29) отримуємо

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq \left[R + \frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2} Q^i R\alpha_i(t) + \frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{m-2} Q^i\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|. \qquad (90)$$

При переході в нерівності (90) до границі при $m \to \infty$ одержуємо

$$\left|x^*\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x^*\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq \left[R + \frac{10}{9}K(I_n - Q)^{-1}R\alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9}K(I_n - Q)^{-1}\alpha_1(t)\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|.$$

Лему доведено.

Лема 8.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1.*

Тоді для функції $\Delta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ *системи визначальних рівнянь (56), (57) справедливою є оцінка*

$$\begin{aligned} \left|\Delta\left(z^0,\lambda^0\right)-\Delta\left(z^1,\lambda^1\right)\right| \le \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right| + \\ + \left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right| + K\left[R+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}R\right]\right\}\left|z^0-z^1\right| + \\ + K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|, \end{aligned} \tag{91}$$

де $z^j \in D_\beta$, $\lambda^j \in D$, $j = 0, 1$.

Доведення. Згідно із співвідношеннями (56), (19), (87) маємо

$$\begin{aligned} \Delta\left(z^0,\lambda^0\right)-\Delta\left(z^1,\lambda^1\right) = \frac{1}{T}\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right) - \frac{1}{T}\left(C^{-1}A+I_n\right)\left(z^0-z^1\right) + \\ + \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[f\left(s,x^*\left(s,z^1,\lambda^1\right)\right)-f\left(s,x^*\left(s,z^0,\lambda^0\right)\right)\right] ds. \end{aligned} \tag{92}$$

Тоді з урахуванням (19), (85) та (74) із (92) отримуємо

$$\begin{aligned} \left|\Delta\left(z^0,\lambda^0\right)-\Delta\left(z^1,\lambda^1\right)\right| \le \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right| + \\ + \frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right| + \frac{1}{T}\int\limits_0^T K\left|x^*\left(s,z^1,\lambda^1\right)-x^*\left(s,z^0,\lambda^0\right)\right| ds \le \\ \le \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right| + \frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right| + \\ + K\left[\frac{1}{T}R\int\limits_0^T ds + \frac{10}{9T}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\int\limits_0^T \alpha_1(s)ds\right]\left|z^0-z^1\right| + \\ + K\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T ds + \frac{10}{9T}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\int\limits_0^T \alpha_1(s)ds\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\Delta\left(z^0,\lambda^0\right)\ -\Delta\left(z^1,\lambda^1\right)\right|\le\frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+\\
&\qquad+\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right|+K\left[R+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\left|z^0-z^1\right|+\\
&\qquad+K\left[I_n+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|=\\
&\quad=\frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|+K\left[R+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\times\\
&\qquad\times\left|z^0-z^1\right|+K\left[I_n+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|,
\end{aligned}
$$

що й доводить лему.

Теорема 8.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Крім того, нехай існують деякий номер $m\in\mathbb{N}$ і пара*

$$\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\in\Omega$$

(Ω має вигляд (77)) такі, що покомпонентна нерівність

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right|\le\ &\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\frac{1}{T}\left|\rho\left(z,\lambda,\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right|+\\
&+\sup_{z\in D}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|+K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\left|z-\bar{z}\right|+\\
&+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z,\lambda,\bar{z},\bar{\lambda}\right)+\\
&+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}h\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)
\end{aligned}
\tag{93}
$$

не справджується. Тут вектори $h(z,\lambda)$ та ρ мають вигляд (28) та (86), матриці K,Q,R визначено згідно з (19), (29) та (85) відповідно, а матриці A, C — це матриці з крайових умов (12).

Тоді не існує пари $(z^*,\lambda^*)\in\Omega$, для якої вихідна двоточкова крайова задача (11), (12) матиме розв'язок $x=x(t)$ такий, що

$$x(0)=z^*,$$

$$x(T)=\lambda^*.$$

Доведення. Нехай $m\in\mathbb{N}$ та $(\bar{z},\bar{\lambda})\in D\times\Lambda$ є довільними. Покажемо, що при цих припущеннях система визначальних рівнянь (56), (57) не має на множині Ω жодного розв'язку. Доведемо це від супротивного. Припустимо, що пара $(\bar{z},\bar{\lambda})$ є розв'язком системи (56), (57). Згідно з теоремою 5.1 розв'язок крайової задачі (11), (17) задається формулою (79). Використаємо оцінку (91), поклавши

$$\left(z^0,\lambda^0\right)=\left(z^*,\lambda^*\right),\quad\left(z^1,\lambda^1\right)=\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right).$$

Тоді з (91) випливає

$$\left|\Delta\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| \le \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^*,\lambda^*,\bar z,\bar\lambda\right)\right| +$$

$$+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right| + K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\left|z^*-\bar z\right| +$$

$$+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\rho\left(z^*,\lambda^*,\bar z,\bar\lambda\right). \qquad (94)$$

Із урахуванням нерівності (73) маємо

$$\left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| \le \left|\Delta\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| + \left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)-\Delta\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| \le \left|\Delta\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| + \frac{10\,T}{27}KQ^{m-1}h\left(z,\lambda\right). \qquad (95)$$

Поєднуючи нерівності (94) та (95), можемо записати

$$\left|\Delta\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| \le \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^*,\lambda^*,\bar z,\bar\lambda\right)\right| +$$

$$+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right| + K\left[R+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\left|z^*-\bar z\right| +$$

$$+K\left[I_n+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\rho\left(z^*,\lambda^*,\bar z,\bar\lambda\right) +$$

$$+\frac{10\,T}{27}KQ^{m-1}(I_n-Q)^{-1}h\left(\bar z,\bar\lambda\right)$$

або

$$\left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right| \le \sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\frac{1}{T}\left|\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right)\right| +$$

$$+\sup_{z\in D}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right| + K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\left|z-\bar z\right| +$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10\,T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right) +$$

$$+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}h\left(z,\lambda\right),$$

тобто отримали нерівність, яка збігається з (93). Але за припущенням теореми для пари $(\bar z,\bar\lambda)$ покомпонентна нерівність (93) не виконується. Отримали суперечність, яка означає, що визначальна система (56), (57) не має розв'язків на множині Ω. Тому на основі теореми 5.2 функція x^*, що визначена формулою (22), не є розв'язком крайової задачі (11), (17) при будь-якому виборі пари $(\bar z,\bar\lambda)$ з області Ω. Згідно з лемою 5.1, це означає, що нелінійна крайова задача (11), (12) не має жодного розв'язку $x(\cdot)$, для якого пара $(x(0),x(T))$ належить області Ω.

Теорему доведено.

9. Зауваження щодо практичної реалізації. Згідно з теоремою 8.1, можна задати алгоритм для наближеного відшукання пари (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок (79) вихідної крайової задачі (11), (12). Для цього запишемо множину Ω вигляду (77) як об'єднання скінченної кількості підмножин:

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = D_i \times \Lambda_i. \tag{96}$$

У кожній множині Ω_i вибираємо довільну точку

$$\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right) \in \Omega_i,$$

та для деякого m обчислюємо m-те наближення $x_m\left(t, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$, використовуючи рекурентне співвідношення (21), а потім знаходимо значення „визначальної функції" $\Delta_m\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$ згідно з формулою (59). Беручи до уваги нерівність (93), виключаємо з множини (96) ті підмножини Ω_i, для яких нерівність

$$\begin{aligned}\left|\Delta_m\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)\right| \le \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_i} \frac{1}{T}\left|\rho\left(z, \lambda, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)\right| + \\ + \sup_{z\in D_i}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A + I_n\right| + K\left[R + \frac{10\,T}{27}K\left(I_n - Q\right)^{-1}R\right]\right\}\left|z - \bar{z}^i\right| + \\ + \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_i}\left\{K\left[I_n + \frac{10\,T}{27}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z, \lambda, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right) + \\ + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}h\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)\end{aligned}$$

не виконується. Це обумовлено тим, що за теоремою 8.1 вони не можуть містити пару (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок (79) крайової задачі (11), (12).

Решта підмножин

$$\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \ldots, \Omega_{i_s}$$

утворюють деяку множину

$$\Omega_{m,N} = D_{m,N} \times \Lambda_{m,N}$$

таку, що тільки $(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) \in \Omega_{m,N}$ може визначити розв'язок (79).

Коли N та m прямують до ∞, $\Omega_{m,N}$ „прямує" до множини

$$\Omega^* = D^* \times \Lambda^*,$$

яка може містити значення (z^*, λ^*), що визначає розв'язок крайової задачі (11), (12) у вигляді (79).

Кожну пару $(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) \in \Omega_{m,N}$ можна розглядати як наближення до пари (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок вихідної крайової задачі (11), (12). У цьому випадку очевидно, що

$$|\tilde{z} - z^*| \le \sup_{z\in D_{m,N}} |\tilde{z} - z|, \quad \left|\tilde{\lambda} - \lambda^*\right| \le \sup_{\lambda\in\Lambda_{m,N}}\left|\tilde{\lambda} - \lambda\right|,$$

а значення функції $x_m(t,\tilde{z},\tilde{\lambda})$, що визначається рекурсивним співвідношенням (21), можна взяти в якості наближеного розв'язку крайової задачі (11), (12).

Теорема 9.1. *Нехай мають місце умови теореми 4.1 і, крім того, пара* (z^*,λ^*) *є розв'язком точної системи визначальних рівнянь (56), (57), а* $(\tilde{z},\tilde{\lambda})$ *— довільна пара з множини* $\Omega_{m,N}$.

Тоді справджується наступна оцінка відхилення точного розв'язку $x^*(t,z^*,\lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z^*,\lambda^*)$ *від його апроксимації* $x_m(t,\tilde{z},\tilde{\lambda})$ *(21):*

$$\left|x^*\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D_{m,N}}\left[R + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(I_n - Q\right)^{-1}R + \frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_1(t)\right]|z-\tilde{z}| +$$

$$+ \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}}\left[I_n + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z,\lambda,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|.$$

Доведення. Використаємо нерівність

$$\left|x^*\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right| \leq \left|x^*\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,z^*,\lambda^*\right)\right| +$$

$$+ \left|x_m\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|. \tag{97}$$

Оцінимо перший доданок у правій частині (97) нерівністю (27):

$$\left|x^*\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,z^*,\lambda^*\right)\right| \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^{m-1}\left(I_n - Q\right)^{-1}h\left(z^*,\lambda^*\right) \leq$$

$$\leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^{m-1}\left(I_n - Q\right)^{-1}\sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}} h(z,\lambda).$$

З використанням (90) другий доданок нерівності (97) будемо оцінювати таким чином:

$$\left|x_m\left(t,z^*,\lambda^*\right) - x_m\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right| \leq \left[R + \frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2}Q^iR\alpha_1(t)\right]|z^*-\tilde{z}| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\sum_{i=0}^{m-2}Q^i\right]\left|\rho\left(z^*,\lambda^*,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D_{m,N}}\left[R + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1}R\alpha_1(t) + \frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_1(t)\right]|z-\tilde{z}| +$$

$$+ \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}}\left[I_n + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z,\lambda,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|,$$

що й доводить теорему.

1. *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай.* Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 7. — С. 951–957.

2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.

3. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. — River Edge, NJ: World Sci. Publ., Inc., 2000.

4. *Ronto A., Ronto M.* On the investigation of some boubdary-value problems with non-linear boundary conditions // Miskolc: Math. Notes. — 2000. — **1**, № 1. — P. 43–55.

5. *Ronto A., Ronto M.* A note on the numerical-analytic method for non-linear two-point boundary-value problems // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 1. — P. 112–128.

6. *Ronto M.* On non-linear boundary-value problems containing parameters // Arch. Math. (Brno). — 2000. — **36**. — P. 585–593.

7. *Ronto Miklos, Natalia Shchobak.* On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with non-linear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. — 2003. — **6**, № 4. — P. 482–510.

8. *Ронто М. Й., Щобак Н. М., Маринець К. В.* Про параметризацію крайових задач типу Коші–Ніколетті // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Математика і інформатика. — 2008. — № 16. — С. 163–173.

9. *Маринець К. В.* Про одну нелінійну триточкову задачу типу Коші–Ніколетті // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Математика і інформатика. — 2009. — № 19. — С. 53–63.

10. *Маринець К. В.* Дослідження розв'язків триточкових задач типу Коші–Ніколетті та зведення їх до двоточкових // Наук. вісн. Київ. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. — 2009. — № 3. — С. 85–90.

11. *Ronto M., Meszaros J.* Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations // Ukr. Math. J. — 1996. — **48**, № 1. — P. 101–107.

12. *Ronto A., Ronto M.* On a Cauchy–Nicoletti type three-point boundary value problem fot linear differential equations with argument deviations // Miskolc: Math. Notes. — 2009. — **10**, № 2. — P. 173–205.

13. *Farkas M.* Periodic motions, applied mathematical sciences. — New York; London: Springer, 1994. — **104**.

Одержано 31.12.10,
після доопрацювання — 24.03.11