Физика низких температур, 1998, т. 24, № 5, с. 468–473

Обратные спиральные волны в пространственно неупорядоченных магнитных средах

Е. А. Иванченко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: yevgeny@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 4 ноября 1997 г., после переработки 19 декабря 1997 г.

Исследуется нелинейная эволюционная система уравнений гидродинамического типа, описывающая трехмерный многоподрешеточный магнетик. Получен явный вид функции плотности энергии для магнитных систем, плотность энергии которых инвариантна относительно правых и левых спиновых вращений. Для квадратично-биквадратичной зависимости плотности энергии (в терминах инвариантных функций Картана) в трехмерном случае найдены точные решения для спиновой плотности в виде спиральных волн, а также решения для магнонных полей, индуцирующих такие волны. Предсказаны обратные спиральные волны.

Досліджується нелінійна еволюційна система рівнянь гідродинамічного типу, яка описує тривимірний багатопідґратковий магнетик. Одержано явний вигляд функції густини енергії для магнітних систем, у котрих густина енергії інваріантна відносно правих та лівих спінових обертань. Для квадратично-біквадратичної залежності густини енергії (в термінах інваріантних функцій Картана) в тривимірному випадку знайдено точні розв'язки для спінової густини у вигляді спіральних хвиль, а також розв'язки для магнонних полів, які формують такі хвилі. Передбачено зворотні спиральні хвилі.

PACS: **75.10.–b**

Введение

В пространственно неупорядоченных средах, таких как многоподрешеточные магнетики, сверхтекучие фазы гелия-3, спиновые стекла и др., при изучении спиновых возбуждений используется гипотеза о спонтанном нарушении симметрии состояния статистического равновесия [1,2]. На основании этой гипотезы в работе [3] был предложен гидродинамический подход, с помощью которого удалось сформулировать динамические уравнения для магнитных сред со спонтанно нарушенной симметрией относительно спиновых вращений. Линейные динамические уравнения получены в [4,5], а учет нелинейной динамики в методе феноменологических лагранжианов проведен в [6,7], в гамильтоновом формализме — в работе [8]. Упомянутые системы обладают рядом интересных свойств, предсказанию одного из которых посвящена настоящая работа.

Динамические переменные, описывающие неравновесное состояние магнетиков со спонтанно нарушенной симметрией, включают в себя плотность спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ $(\alpha = x, y, z)$ и параметр порядка — ортогональную матрицу поворота $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ $(a^T a = 1)$, набор скобок Пуассона для которых имеет вид

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}),\, s_\beta(\mathbf{x}')\} = e_{\alpha\beta\gamma}\, s_\gamma(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \;,$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}),\, a_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = e_{\alpha\gamma\rho}\, a_{\beta\rho}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \;, \qquad (1)$$

$$\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\, a_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = 0 \;.$$

Исследуем динамику в длинноволновом пределе, когда пространственные неоднородности динамических переменных малы, и учтем возможные нелинейные взаимодействия спиновых волн на основе использования концепции спонтанного нарушения SO(3)-симметрии спиновых вращений, относительно которых обменные взаимодействия являются инвариантными. Будем считать, что плотность энергии является функцией величин s, a, ∇a или, что то же самое, функцией величин s, a, $\omega_{\alpha k}(a) = \frac{1}{2}\, e_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\lambda\gamma}\, \nabla_k\, a_{\lambda\beta}$ (левая форма Картана):

$$\varepsilon(\mathbf{x},\ s_\alpha(\mathbf{x}'),\ a(\mathbf{x}')) = \varepsilon(s_\alpha(\mathbf{x}),\ \omega_{\alpha k}(a),\ a)\ ,\ k = x, y, z\ . \tag{2}$$

Так как плотность энергии обменных взаимодействий инвариантна относительно однородных поворотов

$$\{S_\alpha\ , \varepsilon\} = 0\ , \tag{3}$$

где

$$S_\alpha = \int d^3x\ s_\alpha(\mathbf{x}),$$

то

$$\varepsilon(s,\ a,\ \omega_k) = \varepsilon(bs,\ ba,\ b\omega_k) = \varepsilon(\underline{s},\ \underline{\omega}_k)\ . \tag{4}$$

В формуле (4) b — произвольная ортогональная матрица; $\underline{s} \equiv as$; $\underline{\omega}_{\alpha k} = {}^1\!/\!_2\ e_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\beta\lambda}\, \nabla_k\, a_{\gamma\lambda}$ — правая форма. Используя скобки Пуассона (1), уравнения движения для пространственно неупорядоченного магнетика без учета диссипации можно записать в гамильтоновой форме:

$$\dot{s}_\alpha = \{s_\alpha\ , H\} = -\nabla_k\, \partial_{\omega_{\alpha k}}\, \varepsilon\ ,$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \{a_{\alpha\beta}\ , H\} = a_{\alpha\rho}\, e_{\rho\beta\gamma}\, \partial_{s_\gamma}\, \varepsilon\ , \tag{5}$$

$$H = \int d^3x\ \varepsilon(\mathbf{x})$$

— гамильтониан системы; точка означает частную производную по времени.

Скобки Пуассона для переменных $\underline{s}_\alpha \equiv a_{\alpha\beta}\, s_\beta$, $\underline{\omega}_{\alpha k} \equiv a_{\alpha\beta}\, \omega_{\beta k}$ имеют вид

$$\{\underline{s}_\alpha(\mathbf{x}),\ \underline{s}_\beta(\mathbf{x}')\} = -\,e_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{s}_\gamma(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\ ,$$

$$\{\underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}),\ \underline{\omega}_{\beta i}(\mathbf{x}')\} = 0\ , \tag{6}$$

$$\{\underline{s}_\alpha(\mathbf{x}),\ \underline{\omega}_{\beta k}(\mathbf{x}')\} = e_{\alpha\nu\beta}\, \underline{\omega}_{\nu k}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}{-}\mathbf{x}') + \delta_{\alpha\beta}\, \nabla'_k\delta(\mathbf{x}{-}\mathbf{x}').$$

Поэтому эволюционные уравнения (5) в переменных $\underline{s}_\alpha$, $\underline{\omega}_{\alpha k}$ принимают форму уравнений со связями Маурера—Картана [8,9]:

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k\, \partial_{\underline{\omega}_{\alpha k}}\, \varepsilon + e_{\alpha\beta\gamma}(\ \underline{s}_\beta\, \partial_{\underline{s}_\gamma}\, \varepsilon + \underline{\omega}_{\beta k}\, \partial_{\underline{\omega}_{\gamma k}}\, \varepsilon)\ ,$$

$$\dot{\underline{\omega}}_{\alpha k} = -\,\nabla_k\, \partial_{\underline{s}_\alpha}\, \varepsilon + e_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{\omega}_{\beta k}\, \partial_{\underline{s}_\gamma}\, \varepsilon\ , \tag{7}$$

$$\nabla_k\, \underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_i\, \underline{\omega}_{\alpha k} = e_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{\omega}_{\beta k}\, \underline{\omega}_{\gamma i}\ .$$

В уравнениях (7) $\underline{\omega}_\alpha = {}^1\!/\!_2\ e_{\alpha\beta\gamma}(\dot{a}a^T)_{\gamma\beta}$ — правая форма, связанная с временной производной; $\underline{\omega}_\alpha \equiv -\partial_{\underline{s}_\alpha}\, \varepsilon$. Из системы уравнений (7) следует, что локально сохраняются плотность энергии ε и компоненты импульса π_i :

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla_k\, \partial_{\underline{s}_\alpha}\, \varepsilon\partial\underline{\omega}_{\alpha k}\, \varepsilon\ ,\quad \dot{\pi}_\alpha = -\,\nabla_k\, t_{ik}\ , \tag{8}$$

где $\pi_i = \underline{s}_\alpha\, \underline{\omega}_{\alpha i}$,

$$t_{ik} = -\,\delta_{ik}(\varepsilon - \underline{s}_\alpha\, \partial_{\underline{s}_\alpha}\, \varepsilon) + \underline{\omega}_{\alpha i}\, \partial_{\underline{\omega}_{\alpha k}} \varepsilon \tag{9}$$

— тензор плотности потока импульса.

Система уравнений общего положения (7) исследовалась в работе [11]. В настоящей работе получены аналитические формулы, описывающие спиральные волны спиновой плотности в трехмерном анизотропном магнетике с учетом биквадратичных вкладов в плотности энергии. Предсказаны обратные спиральные спиновые волны. В работе [12] в лагранжевом подходе для случая квадратичной зависимости плотности энергии (аморфный магнетик) найдены солитонные решения. Нелинейная динамика многоподрешеточных неколлинеарных антиферромагнетиков с модулированной магнитной структурой в присутствии внешнего магнитного поля изучалась в [13].

Модельная плотность энергии

Рассмотрим неупорядоченный магнетик, плотность энергии которого инвариантна относительно левых и правых спиновых вращений. В этом случае функция плотности энергии ε удовлетворяет переопределенной системе уравнений в частных производных [10]:

$$e_{\alpha\beta\gamma}(\ \underline{s}_\beta\, \partial_{\underline{s}_\gamma}\, \varepsilon + \underline{\omega}_{\beta k}\, \partial_{\underline{\omega}_{\gamma k}}\, \varepsilon) = 0\ . \tag{10}$$

Общее решение системы (10) имеет вид

$$\varepsilon = G(\ \underline{s}^2_\alpha\ , \underline{\omega}^2_{\alpha x}\ , \underline{\omega}^2_{\alpha y}\ , \underline{\omega}^2_{\alpha z}\ , \pi_x\ , \pi_y\ , \pi_z)\ , \tag{11}$$

где G — произвольная функция указанных аргументов. Поскольку система (10) инвариантна относительно группы перестановок индекса k, целесообразно перейти к симметрическим переменным. После этого для практических расчетов можно ограничиться следующим выражением для плотности энергии:

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_a\ ,$$

в котором

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2\chi}\,\underline{s}_\alpha^2 + \frac{\rho}{2}\,\underline{\omega}_{\alpha k}^2 + \frac{1}{4\chi_1}\,\underline{s}_\alpha^4 + \frac{\rho_1}{4}\,\underline{\omega}_{\alpha k}^4 + \frac{q}{2}\,\pi_i^2 \tag{12}$$

— изотропная и

$$\varepsilon_a = \frac{\rho_2}{4}\,(\,\underline{\omega}_{\alpha x}^2\,\underline{\omega}_{\alpha y}^2 + \underline{\omega}_{\alpha x}^2\,\underline{\omega}_{\alpha z}^2 + \underline{\omega}_{\alpha y}^2\,\underline{\omega}_{\alpha z}^2\,) \tag{13}$$

— анизотропная части энергии (без учета дифференциальных уравнений связи между $\underline{\omega}_{\alpha x}$, $\underline{\omega}_{\alpha y}$, $\underline{\omega}_{\alpha z}$); χ — магнитная восприимчивость; ρ — константа «жесткости»; χ_1, ρ_1, ρ_2, q — феноменологические константы связи. Рассматриваемую модель можно интерпретировать как континуальный предел системы распределенных симметричных волчков.

Решение уравнений

Найдем точные нелинейные решения стационарного профиля, т.е. когда искомые функции $\underline{s}_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ зависят от автомодельной переменной $\mathbf{qx} - et$ (параметр e определяет возможные скорости распространения возмущений в системе; вектор $\mathbf{q}$ связан с направлением распространения волн, см. ниже). В трехмерном случае благодаря дифференциальным связям Маурера—Картана система уравнений (7) сводится к рассмотренному в работе [14] одномерному случаю. Это следует из того факта, что при зависимости переменных $\underline{\omega}_{\alpha x}$, $\underline{\omega}_{\alpha y}$, $\underline{\omega}_{\alpha z}$ от $\mathbf{qx} - et$ связи

$$\nabla_k\,\underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_l\,\underline{\omega}_{\alpha k} = e_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\omega}_{\beta k}\,\underline{\omega}_{\gamma i} \tag{14}$$

являются голономными, т.е. интегрируемыми:

$$\underline{\omega}_{\alpha y} = \frac{q_y}{q_x}\,\underline{\omega}_{\alpha x}\,, \qquad \underline{\omega}_{\alpha z} = \frac{q_z}{q_x}\,\underline{\omega}_{\alpha x}\,. \tag{15}$$

Теперь исходная система (7) принимает вид

$$-e(\,\underline{s}_\alpha\,)' = -q_x(\partial_{\underline{\omega}_{\alpha x}}\,\varepsilon)'\,,$$
$$-e(\,\underline{\omega}_{\alpha x}\,)' = -q_x(\partial_{\underline{s}_\alpha}\,\varepsilon)' + e_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\omega}_{\beta x}\,\partial_{\underline{s}_\gamma}\,\varepsilon\,, \tag{16}$$

$$f' \equiv \frac{df}{d(\mathbf{qx} - et)}\,.$$

Из системы (16) непосредственно следует, что

$$-\,\bar{e}\underline{s}_\alpha + \bar{\rho}\underline{\omega}_{\alpha x} = C_\alpha\,,$$

$$\bar{e} \equiv e - q_x\,lq\pi\,,$$

$$\bar{\rho} \equiv q_x\,l\rho + q_x\left(l^2\rho_l + \frac{q_x^2q_y^2 + q_x^2q_z^2 + q_y^2q_z^2}{q_x^4}\,\rho_2\right)\underline{\omega}_{\alpha x}^2\,, \tag{17}$$

$$l \equiv \frac{\mathbf{q}^2}{q_x^2}\,, \quad \pi \equiv \underline{s}_\alpha\,\underline{\omega}_{\alpha x}\,,$$

где C_α — константы интегрирования. С помощью уравнений (17) в системе (16) легко исключить неизвестные функции $\underline{\omega}_{\alpha x}$. Заметим также, что величины π и $\underline{\omega}_{\alpha x}^2$ являются функциями $\underline{s}_\alpha^2$ и $C_\alpha\,\underline{s}_\alpha$ (см. Приложение).

Окончательно, выполнив масштабное преобразование

$$\xi = \frac{(\mathbf{qx} - et)|\mathbf{C}|}{-\bar{e}^2\,\bar{\chi} + \bar{\rho}}\,, \tag{18}$$

в котором теперь восприимчивость $\bar{\chi}$ равна

$$\frac{1}{\bar{\chi}} \equiv \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi_1}\,\underline{s}_\alpha^2\,, \tag{19}$$

приходим к линейной системе уравнений Эйлера для правой формы $\underline{s}_\alpha$:

$$\frac{d}{d\xi}\,\underline{s}_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\,n_\beta\,\underline{s}_\gamma\,, \quad n_\alpha \equiv \frac{C_\alpha}{|\mathbf{C}|}\,. \tag{20}$$

Решение системы (20) имеет вид

$$\underline{s}_\alpha(\xi) = g_{\alpha\beta}\,\underline{s}_\beta(\xi_0)\,, \tag{21}$$

где ортогональная матрица поворота g ($g^Tg = 1$) равна

$$g_{\alpha\beta} = \cos\xi\,\delta_{\alpha\beta} + (1 - \cos\xi)\,n_\alpha\,n_\beta - \sin\xi\,e_{\alpha\beta\gamma}\,n_\gamma\,, \tag{22}$$

$\underline{s}_\beta(\xi_0)$ — константы интегрирования.

С помощью найденного для правой формы решения (21) можно определить спиновую плотность

$$s_\alpha = a_{\beta\alpha}\,\underline{s}_\beta\,. \tag{23}$$

Ортогональная матрица поворота $a_{\alpha\beta}$ удовлетворяет переопределенной системе уравнений

$$\underline{\omega}_\alpha = \frac{1}{2}\,e_{\alpha\beta\gamma}\,a_{\beta\lambda}\,\dot{a}_{\gamma\lambda}\,, \tag{24}$$

$$
\underline{\omega}_{\alpha k} = \frac{1}{2}\, e_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\beta\lambda}\, \partial_k\, a_{\gamma\lambda} \,,
$$

$$
k = x,\, y,\, z \,,
$$

и соотношениям (15).

При решении системы (24) относительно матрицы $a_{\alpha\beta}$ используем параметризацию углами Эйлера [15]:

$$
a = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{25}
$$

В переменных ψ, θ, φ система (24) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\underline{\omega}_1 = -\,\dot\theta\cos\psi - \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \,, \\
\underline{\omega}_2 = \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \,, \\
\underline{\omega}_3 = -\,\dot\psi - \dot\varphi\cos\theta \,, \\
\underline{\omega}_{1k} = -\,\theta_k\cos\psi - \varphi_k\sin\theta\sin\psi \,, \\
\underline{\omega}_{2k} = \theta_k\sin\psi - \varphi_k\sin\theta\cos\psi \,, \\
\underline{\omega}_{3k} = -\,\psi_k - \varphi_k\cos\theta \,, \\
\underline{\omega}_{\alpha y} = \frac{q_y}{q_x}\,\underline{\omega}_{\alpha x} \,, \quad \underline{\omega}_{\alpha z} = \frac{q_z}{q_x}\,\underline{\omega}_{\alpha x} \,.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{n} = (0,\, 0,\, -1)$, т.е. $C_3 < 0$ и $\underline{\mathbf{s}}(\xi_0) = (c_1\,,\, 0,\, c_3)$. Точное решение переопределенной системы (26) легко найти при $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$. При указанных условиях система (26) с учетом (16), (21) содержит интегрируемую подсистему

$$
\begin{gathered}
-\,\dot\theta\cos\psi = -\left(\frac{1}{\bar\chi} + ql\pi z\right) c_1\cos\xi \,, \\
\dot\theta\sin\psi = \left(\frac{1}{\bar\chi} + ql\pi z\right) c_1\sin\xi \,, \\
-\,\dot\psi = -\,ql\pi\,\frac{C_3}{\bar\rho} - \left(\frac{1}{\bar\chi} + ql\pi z\right) c_3 \,, \\
-\,\theta_x\cos\psi = zc_1\cos\xi \,, \\
\theta_x\sin\psi = -zc_1\sin\xi \,, \\
-\,\psi_x = \frac{C_3}{\bar\rho} + zc_3 \,, \\
z \equiv \frac{\bar e}{\bar{\bar\rho}} \,.
\end{gathered} \tag{27}
$$

Поэтому решение для функции $\psi(\mathbf{x},\, t)$ в R^3-пространстве очевидно:

$$
\psi(\mathbf{x},\, t) = -\left(\frac{C_3}{\bar\rho} + zc_3\right)\mathbf{qx} +
$$

$$
+\left[\left(\frac{1}{\bar\chi} + ql\pi z\right) c_3 + ql\pi\,\frac{C_3}{\bar\rho}\right] t + \psi_0 \,, \tag{28}
$$

где ψ_0 — константа.

Переопределенность дифференциальной системы (27) относительно функции $\theta(\mathbf{x},\, t)$ легко устраняется при равенстве функций $\xi(\mathbf{x},\, t) = \psi(\mathbf{x},\, t)$, т.е. при условиях

$$
\begin{gathered}
-\left(\frac{C_3}{\bar\rho} + zc_3\right) = q_x\, k_1 \,, \\
\left(\frac{1}{\bar\chi} + ql\pi z\right) c_3 + ql\pi\,\frac{C_3}{\bar\rho} = -k_1\, e \,, \\
k_1 \equiv \frac{|C_3|}{-\bar e^2\,\bar\chi + \underline{\rho}} \,, \quad \underline{\rho} \equiv q_x\,\bar\rho \,.
\end{gathered} \tag{29}
$$

Соотношения (29) представляют собой переопределенную систему алгебраических уравнений относительно параметра $\bar e$, условие совместности которой имеет вид

$$
\bar e^2 - \frac{|C_3|}{c_3}\,\bar e - \frac{\underline{\rho}}{\bar\chi} = 0 \,. \tag{30}
$$

Поэтому на множестве $\{\mathbf{x},\, t\colon \xi \neq \frac{\pi}{2}\, m,\ m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots\}$ функция $\theta(\mathbf{x},\, t)$ равна

$$
\theta(\mathbf{x},\, t) = \omega t - \mathbf{kx} + \theta_0 \,, \tag{31}
$$

где

$$
\mathbf{k} = \frac{c_1}{\underline{\rho}}\left(\frac{|C_3|}{2c_3} \pm \left(\frac{C_3^2}{4c_3^2} + \frac{\underline{\rho}}{\bar\chi}\right)^{1/2}\right)\mathbf{q} \,,
$$

$$
\omega = \frac{1}{\bar\chi}\, c_1 + q\pi l q_x\,\frac{\bar e}{\underline{\rho}}\, c_1 = \frac{\underline{\rho}}{c_1\,\mathbf{q}^2}\,\mathbf{k}^2 - \frac{|C_3|}{c_3}\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} +
$$

$$
+\, qlq_x\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\left(\frac{-|C_3|c_3}{\bar\rho} + \frac{c_1^2 + c_3^2}{c_1}\, q_x\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\right),
$$

(32)

θ_0 — константа.

Решения для параметров φ, θ, ψ определяют матрицу поворота (25) и в соответствии с формулой (23) плотность спина s_α :

$$
\begin{aligned}
s_1 &= c_3 \sin\varphi_0 \sin\theta + c_1 \cos\varphi_0 \ , \\
s_2 &= -\, c_3 \cos\varphi_0 \sin\theta + c_1 \sin\varphi_0 \ , \\
s_3 &= c_3 \cos\theta \ .
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Найденные точные решения (33) являются спиральными волнами с вектором спирали $\mathbf{k}$ и законом дисперсии ω (32) и удовлетворяют исходной системе (5). Если $\mathbf{q} = (1,\ 0,\ 0)$ и e заменить на $-e$, то получим результат работы [14].

Эффективное магнитное поле h_α, формирующее спиральные волны спиновой плотности s_α (33), определяется из выражения $h_\alpha \equiv \partial_{s_\alpha} \varepsilon$ и равно

$$
\begin{aligned}
h_\alpha = {} & \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi_1}\,(c_1^2 + c_3^2)\right) s_\alpha + \\
& + q\,l \left(\frac{C_3 c_3}{\bar{\rho}} + (c_1^2 + c_3^2)\,\frac{q_x}{\mathbf{q}^2}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right) \times \\
& \times \left(\frac{a_{3\alpha} C_3}{\bar{\rho}} + \frac{q_x}{c_1 \mathbf{q}^2}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\; s_\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Обратные волны спиновой плотности

По определению обратными волнами называют волновой процесс, когда перенос энергии может осуществляться под углом большим $\pi/2$ к направлению распространения волны.

Плотность потока энергии, согласно (8), равна

$$
j_k = \partial_{\underline{s}_\alpha} \varepsilon \; \partial_{\underline{\omega}_{\alpha k}} \varepsilon \ . \tag{35}
$$

Для найденных спиральных спиновых волн этот вектор принимает форму

$$
\mathbf{j} = \left(\left[\frac{\rho}{\bar{\bar{\chi}}} + q\,l\;\underline{\rho}\;\underline{\omega}_{\alpha x}^2 + \left(\frac{1}{\bar{\chi}}\right) q\,l\,\underline{s}_\alpha^2 + (q\,l\,\pi)^2\right] \pi,\ 0,\ 0 \right),
\tag{36}
$$

$$
\pi = \frac{C_3 c_3 + \bar{e}(c_1^2 + c_3^2)}{\bar{\rho}} \ .
$$

Найдем косинус угла между направлением распространения волны $\mathbf{k}$ и направлением плотности потока энергии $\mathbf{j}$:

$$
\cos w = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}|} \ . \tag{37}
$$

Нетрудно показать, что выражение $[C_3 c_3 + \bar{e}(c_1^2 + c_3^2)]\bar{e}$ для $\bar{e}$, определенного уравнением (30), положительно. Таким образом, формула (37) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\cos w = {} & \frac{|q_x|}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} \times \\
& \times \operatorname{sgn} \left\{ \left[\frac{\rho}{\bar{\bar{\chi}}} + q\,l\;\underline{\rho}\;\underline{\omega}_{\alpha x}^2 + \frac{1}{\bar{\chi}}\, q\,l\,\underline{s}_\alpha^2 + (q\,l\,\pi)^2\right] c_1 \right\} .
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Поскольку в рассматриваемой модели константа может быть как положительной, так и отрицательной, приходим к выводу, что спиральные волны в неоднородном магнетике могут распространяться в направлении, противоположном направлению переноса энергии. Например, при всех положительных феноменологических константах связи формула (38) принимает простой вид:

$$
\cos w = \frac{|q_x|}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} \operatorname{sgn} c_1 \ . \tag{39}
$$

Процессы с отрицательной групповой скоростью исследованы экспериментально [16] и теоретически [17] при изучении волн во вращающейся жидкости. Подобный эффект может наблюдаться в неупорядоченных магнетиках.

Заключение

Поэтапное решение систем уравнений первого порядка — характерная особенность гамильтонового формализма. Поэтому на промежуточном этапе вид решения (21) целиком определил выбор параметризации (25), что упростило интегрирование.

Приведенные точные нелинейные решения в рассмотренной модели являются, согласно (33), спиральными волнами. Вклад биквадратичных слагаемых в плотности энергии (12) возрастает с ростом начального распределения плотности спина в системе. Зависимость от константы связи q содержится только в частоте ω спиральной волны спиновой плотности (32), а волновой вектор $\mathbf{k}$ не зависит от этой константы. Перенос энергии может осуществляться под углом большим $\pi/2$ к направлению распространения спиральной спиновой волны.

Автор признателен С. В. Пелетминскому за стимулирующие обсуждения.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (проект 2.4/378).

Приложение

В формуле

$$\underline{\omega}_{\alpha x}^2 = \frac{C_\alpha^2 + 2\bar{e}C_\alpha \underline{s}_\alpha + \bar{e}^2 \underline{s}_\alpha^2}{\bar{\rho}^2} \qquad (\text{П1})$$

с помощью условия совместности

$$\bar{e}^2 - i\bar{e} - \frac{\underline{\rho}}{\chi} = 0 \qquad (\text{П2})$$

исключим $\underline{\rho}$. В результате получим уравнение шестой степени

$$\bar{e}^6 - 3i\bar{e}^5 + (3i^2 - p_1)\bar{e}^4 + (2ip_1 - i^3)\bar{e}^3 - \qquad (\text{П3})$$

$$- \left(i^2 p_1 + \frac{c_1^2 + c_3^2}{c_3^2}\, p \right) \bar{e}^2 + 2ip\bar{e} - i^2 p = 0 \ ,$$

$$i \equiv \frac{|C_3|}{c_3} \ , \quad p_1 \equiv \frac{\mathbf{q}^2 \rho}{\bar{\chi}} \ ,$$

$$p \equiv \frac{c_3^2}{\bar{\chi}^3} \left[\mathbf{q}^4 \rho_1 + (q_x^2 q_y^2 + q_x^2 q_z^2 + q_y^2 q_z^2)\rho_2 \right] \ .$$

Уравнение шестой степени (П3) (при ограничении $c_1 = \pm\, c_3$) представимо в виде

$$(\bar{e}^2 - i\bar{e} - r_1)(\bar{e}^2 - i\bar{e} - r_2)(\bar{e}^2 - i\bar{e} - r_3) = 0 \ , \qquad (\text{П4})$$

где r_1, r_2, r_3 — корни кубического уравнения

$$r^3 - p_1 r^2 - 2pr - pi^2 = 0 \ , \quad r \equiv \frac{\underline{\rho}}{\chi} \ . \qquad (\text{П5})$$

Таким образом, доказано, что r зависит от $C_\alpha \underline{s}_\alpha$, $\underline{s}_\alpha^2$ при условии $c_1 = \pm\, c_3$ и поэтому $\underline{\omega}_{\alpha x}^2$, π тоже зависят от $C_\alpha \underline{s}_\alpha$, $\underline{s}_\alpha^2$, т.е. не зависят от автомодельной переменной $\mathbf{qx} - et$. Отметим, что ограничение $c_1 = \pm\, c_3$ вызвано учетом только биквадратичных слагаемых, пропорциональных ρ_1, ρ_2, без учета которых $r = p_1$.

1. N. N. Bogolubov, *Physica* **26**, 1 (1960).
2. J. J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 154 (1961).
3. B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **188**, 898 (1969).
4. B. I. Halperin and W. M. Saslow, *Phys. Rev.* **B16**, 2154 (1977).
5. W. M. Saslow, *Phys. Rev.* **B22**, 1174 (1980).
6. Д. В. Волков, А. А. Желтухин, *Известия АН СССР, Серия физ.* **44**, 1487 (1980).
7. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
8. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovik, *Ann. Phys.* **125**, 67 (1980).
9. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Л. Шишкин, *УФЖ* **36**, 245 (1991).
10. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **100**, 59 (1994).
11. Е. А. Иванченко, *ФНТ* **20**, 158 (1994).
12. B. A. Ivanov, *Solid State Commun.* **34**, 437 (1980).
13. А. Л. Сукстанский, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **108**, 914 (1995).
14. Е. А. Иванченко, *ФНТ* **23**, 830 (1997).
15. Г. Гольдстейн, *Классическая механика*, Наука, Москва (1975).
16. A. Ibbetson and N. Phillips, *Tellus* **19**, 81 (1967).
17. M. S. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **31**, 417 (1968).

Backward helical waves in spatial-disordered magnetic media

E. A. Ivanchenko

A nonlinear evolution system of hydrodynamic type equations describing a three-dimensional multisublattice magnet is investigated. An explicit form for the energy density function for magnetic systems with the energy density invariant with respect to the right and left spin rotations is obtained. For a quadratic-biquadratic dependence of energy density (in terms of invariant Cartan's functions) in the three-dimensional case the exact solutions are derived in the form of spiral waves for spin density. The solutions of magnon fields to induce stationary profile waves for spin density are found too. Backward helical waves are predicted.