Физика низких температур, 1995, т. 21, № 5, с. 498–508 УДК 538.941

Диффузия квазичастиц растворов ^{3}He–^{4}He и классических частиц

И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 20 ноября 1994 г.

В рамках единого подхода вычислены все коэффициенты диффузии сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He и диффузионная матрица трехкомпонентного газа классических частиц. Показано, что диффузионный поток газа тепловых возбуждений определяет неаддитивную часть коэффициента теплопроводности раствора. Полученное выражение для коэффициента спиновой диффузии существенно отличается от эмпирической формулы, содержащей коэффициент массовой диффузии. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

В межах єдиного підходу обчислено усі коефіцієнти дифузії надплинних розчинів ^{3}He–^{4}He і дифузійна матриця трьохкомпонентного газу класичних частинок. Показано, що дифузійний поток газу теплових збуджень визначає неадитивну частину коефіцієнта теплопровідності розчину. Одержаний вираз для коефіцієнта спінової дифузії істотно відрізняється від емпіричної формули, яка містить коефіцієнт масової дифузії. Результати обчислень порівнюються з експериментальними даними.

Введение

В сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He могут существовать массовый и спиновый диффузионные потоки легкого изотопа гелия. Кинетические свойства такого раствора, согласно [1], полностью определяются трехкомпонентным газом квазичастиц (фононов, ротонов — тепловых возбуждений и примесонов — квазичастиц ^{3}He).

Коэффициент спиновой диффузии сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He, насколько нам известно, вычислен [2] только для области достаточно низких температур, в которой вкладом тепловых возбуждений можно пренебречь. В общем же случае для коэффициента спиновой диффузии исходной являлась эмпирическая формула (см., например, [3,4]), содержащая коэффициент массовой диффузии и вклад за счет взаимодействия примесонов друг с другом. Вычисленный в [5,6] коэффициент массовой диффузии раствора имел необычную зависимость от времен релаксаций квазичастиц и существенно отличался от коэффициента диффузии классических газов. В частности, он зависел не только от времен взаимодействия примесонов с фононами и ротонами, но и существенно определялся релаксацией в газе тепловых возбуждений. Физические причины такого отличия не обсуждались в [5,6], поскольку для их понимания необходимо с помощью единой методики рассмотреть диффузию в сверхтекучих растворах и в смеси классических газов.

В работе [7] исследовалась также диффузия в двухкомпонентном фонон-ротонном газе He II. Наличие такого процесса не вызывает сомнения, но оставалось неясным, какое отношение имеет рассмотренная диффузия к кинетическим коэффициентам сверхтекучего гелия.

Используя методику, развитую в [5,6,8], в настоящей работе с помощью единого подхода вычислены коэффициенты диффузии смеси квазичастиц сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He и трехкомпонентного классического газа. Сопоставление всех полученных выражений позволило выяснить их физический смысл. Показано, в частности, что процесс диффузии газа тепловых возбуждений дает неаддитивный вклад в коэффициент теплопроводности чистого He II и растворов. Выражение для вычисленного коэффициента спиновой диффузии существенно отличается от упомянутой выше эмпирической формулы. Результаты выполненных расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

1. Коэффициенты диффузии

Рассмотрим стационарное неравновесное состояние раствора, в котором функциями координаты являются число примесонов в единице объема с разными проекциями спинов $n_\uparrow$ и $n_\downarrow$ и полное число примесонов $n_i = n_\uparrow + n_\downarrow$.

В стационарном неравновесном состоянии химический потенциал ^{4}He и давление одинаковы во всех точках раствора [9]. Другими словами [10], во всем объеме раствора постоянной является сумма парциальных давлений примесонов P_i, фононов $P_{\rm ph}$ и ротонов P_r:

© И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, 1995

$$P_i + P_{\rm ph} + P_r = \text{const} \ . \qquad (1)$$

При этом парциальное давление квазичастиц (примесонов, фононов, ротонов) определяется обычной газокинетической формулой

$$P = \frac{1}{3}\int \mathrm{p}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial \mathrm{p}} f^{(0)}\, d\Gamma \ , \qquad (2)$$

где ε и p — соответственно энергия и импульс квазичастицы, а $f^{(0)}$ — локально равновесная функция распределения.

В этом случае градиент n_i компенсируется градиентом температуры. Соотношение между градиентами следует из выражений (1), (2), согласно которым

$$\begin{aligned} &\nabla P_i = \nabla n_i\, T \ ; \quad \nabla P_{\rm ph} = S_{\rm ph}\,\nabla T \ ; \\ &\nabla P_r = S_r\,\nabla T \ ; \quad T\nabla n_i = -\bar{S}\nabla T \ , \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\bar{S} = S_t + n_i$; $S_t = S_{\rm ph} + S_r$ — энтропия газа тепловых возбуждений, равная сумме фононной $S_{\rm ph}$ и ротонной S_r энтропий. Здесь и далее газ примесонов предполагается невырожденным. При достаточно низких температурах так называемое давление фонтанирования $P_t = P_{\rm ph} + P_r$ оказывается пренебрежимо малым. В этом случае, согласно (3), относительное изменение числа примесонов с точностью до знака совпадает с относительным изменением температуры:

$$\nabla n_i / n_i = -\nabla T / T \ .$$

В итоге даже в области достаточно низких температур небольшие градиенты температуры приводят к заметным отклонениям значения концентрации раствора от равновесного значения.

Свойства рассматриваемого раствора описываются стационарными кинетическими уравнениями, содержащими функции распределения фононов $f_{\rm ph}$, ротонов f_r и примесонов с разными проекциями спинов $f_\uparrow$, $f_\downarrow$:

$$\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathrm{r}} = \sum_\beta I_{\alpha\beta}(f_\alpha\,, f_\beta) \ . \qquad (4)$$

Здесь и далее индексы α и β принимают значения $\uparrow$, $\downarrow$, ph, r; $\mathrm{v}_\alpha = \partial\varepsilon_\alpha / \partial \mathrm{p}_\alpha$ — скорость квазичастицы; $I_{\alpha\beta}(f_\alpha\,, f_\beta)$ — интеграл столкновений, являющийся функционалом от f_α и f_β .

Решение системы (4) ищем в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \delta f_\alpha \ , \qquad (5)$$

где δf_α — малая добавка к локально равновесной функции распределения, которую удобно записать в виде

$$\delta f_\alpha = -\, f'_\alpha g_\alpha \ . \qquad (6)$$

Здесь $f'_\alpha = \partial f_\alpha^{(0)} / \partial\varepsilon_\alpha$.

Кинетические коэффициенты определяются плотностями потоков импульсов квазичастиц j_α . Последние связаны с g_α соотношениями

$$\mathrm{j}_\alpha = \int \mathrm{p}_\alpha f_\alpha\, d\Gamma_\alpha = -\int \mathrm{p}_\alpha\, g_\alpha f'_\alpha\, d\Gamma_\alpha \ . \qquad (7)$$

Учитывая малость отклонения от состояния равновесия, из соотношений (4)–(6) получаем систему четырех линейных интегральных уравнений для определения g_α :

$$\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathrm{r}} = \sum_\beta I_{\alpha\beta}\, g_\beta + \sum_{\beta\neq\alpha} I_{\alpha\beta}\, g_\alpha \ , \qquad (8)$$

где $I_{\alpha\beta}$ — линеаризованный оператор столкновений, действие которого на функцию $g(\mathrm{p}_\alpha\,, \beta)$ определяется конкретным видом интеграла столкновений $I_{\alpha\beta}(f_\alpha\,, f_\beta)$. Для обычного бинарного интеграла столкновения, имеющего плотность вероятности перехода $w_{\alpha\beta}(\mathrm{p}_\alpha\,, \mathrm{p}_\beta \mid \mathrm{p}'_\alpha\,, \mathrm{p}'_\beta)$, получаем

$$I_{\alpha\beta}\, g(\mathrm{p}_{\alpha,\beta}) = \int w_{\alpha\beta} f'_\beta \{ g(\mathrm{p}'_{\alpha,\beta}) - g(\mathrm{p}_{\alpha,\beta}) \}\, d\Gamma_\beta\, d\Gamma'_\alpha\, d\Gamma'_\beta \ . \qquad (9)$$

В локальных равновесных функциях $f_\alpha^{(0)}$ параметры $n_\uparrow$, $n_\downarrow$ и T зависят от координаты.

Систему четырех уравнений (8) удобно записать в компактном матричном виде

$$I\,|g\rangle = |\varphi\rangle \ , \qquad (10)$$

где I — операторная матрица

$$I = \begin{pmatrix} \sum\limits_\beta I_{\uparrow\beta} & I_{\uparrow\downarrow} & I_{\uparrow\,\rm ph} & I_{\uparrow r} \\ I_{\downarrow\uparrow} & \sum\limits_\beta I_{\downarrow\beta} & I_{\downarrow\,\rm ph} & I_{\downarrow r} \\ I_{\rm ph\uparrow} & I_{\rm ph\downarrow} & \sum\limits_\beta I_{\rm ph\beta} & I_{\rm phr} \\ I_{r\uparrow} & I_{r\downarrow} & I_{r\,\rm ph} & \sum\limits_\beta I_{r\beta} \end{pmatrix} ; \qquad (11)$$

$|g\rangle$ и $|\varphi\rangle$ — четырехмерные кет-векторы

$$|g\rangle = \begin{vmatrix} g_\uparrow \\ g_\downarrow \\ g_{\rm ph} \\ g_r \end{vmatrix} \ ; \quad |\varphi\rangle = \begin{vmatrix} \mathrm{v}_\uparrow\, \partial f_\uparrow^{(0)} / \partial \mathrm{r} \\ \mathrm{v}_\downarrow\, \partial f_\downarrow^{(0)} / \partial \mathrm{r} \\ \mathrm{v}_{\rm ph}\, \partial f_{\rm ph}^{(0)} / \partial \mathrm{r} \\ \mathrm{v}_r\, \partial f_r^{(0)} / \partial \mathrm{r} \end{vmatrix} . \qquad (12)$$

Определим скалярное произведение бра-вектора строки $\langle\psi|$ и кет-вектора столбца $|\chi\rangle$ соотношением

$$\langle\psi|\chi\rangle = \sum_\beta \langle\psi_\beta|\chi_\beta\rangle = -\sum_\beta \int \psi^*_\beta \chi_\beta f'_\beta \, d\Gamma_\beta \ . \quad (13)$$

В принятых обозначениях плотность потока квазичастиц (7) записывается в виде

$$\mathrm{j}_\alpha = \langle \mathrm{p}_\alpha | g_\alpha \rangle \ . \quad (14)$$

Для решения уравнения (10) выделим в пространстве собственных векторов эрмитового оператора I подпространство векторов $|J\rangle$ с нулевыми собственными значениями

$$I\,|J\rangle = 0 \ . \quad (15)$$

Векторы $|J\rangle$, как известно, образуют подпространство инвариантов столкновений. В качестве базиса этого подпространства возьмем ортонормированный набор векторов, отвечающих сохранению числа примесонов $|J_N\rangle$, энергии $|J_\varepsilon\rangle$ и импульса $|J_p\rangle$:

$$|J_N\rangle = \left(\frac{T}{n_i}\right)^{1/2} \left|\begin{matrix}1\\1\\0\\0\end{matrix}\right\rangle \ ;$$

$$|J_\varepsilon\rangle = (C_V T)^{-1/2} \left|\begin{matrix}\tilde{\varepsilon}_\uparrow\\ \tilde{\varepsilon}_\downarrow\\ \varepsilon_{\mathrm{ph}}\\ \varepsilon_r\end{matrix}\right\rangle \ ; \quad (16)$$

$$|J_p\rangle = \rho_n^{-1/2} \left|\begin{matrix}\mathrm{p}_\uparrow\\ \mathrm{p}_\downarrow\\ \mathrm{p}_{\mathrm{ph}}\\ \mathrm{p}_r\end{matrix}\right\rangle \ .$$

Здесь $\rho_n = \sum_\beta \langle \mathrm{p}_\beta | \mathrm{p}_\beta \rangle = \rho_\uparrow + \rho_\downarrow + \rho_{\mathrm{ph}} + \rho_r$ — плотность нормальной компоненты раствора; $\tilde{\varepsilon}_{\uparrow,\downarrow} = \mathrm{p}^2_{\uparrow,\downarrow}/2m - 3T/2$ — энергия примесона, отсчитанная от ее среднего значения; m — эффективная масса примесона; $C_V = C_\uparrow + C_\downarrow + C_{\mathrm{ph}} + C_r$ — теплоемкость единицы объема раствора.

Введем оператор-проектор на подпространство инвариантов столкновений

$$P_c = |J_N\rangle\langle J_N| + |J_\varepsilon\rangle\langle J_\varepsilon| + |J_p\rangle\langle J_p| \quad (17)$$

и оператор-проектор

$$P_n = 1 - P_c \quad (18)$$

на подпространство, ортогональное P_c.

Согласно (15), векторы $|J\rangle$ являются решением уравнения (10) с правой частью равной нулю. При этом искомый вектор $|g\rangle$ принадлежит подпространству P_n. Из условия

$$P_c\,|g\rangle = 0 \quad (19)$$

следует

$$\sum_\beta \langle \mathrm{p}_\beta | g_\beta \rangle = \sum_\beta \mathrm{j}_\beta = 0 \ . \quad (20)$$

Соотношение (20) имеет простой физический смысл: при диффузии полная плотность потока газа квазичастиц равна нулю.

Далее заметим, что оператор, обратный I, определен только в подпространстве P_n, где собственные значения отличны от нуля. В итоге решение уравнения (10) можно записать в виде

$$|g\rangle = (P_n\, I\, P_n)^{-1} |\varphi\rangle \ . \quad (21)$$

Для получения общих соотношений, определяющих коэффициенты спиновой, массовой и термодиффузии, вектор $|\varphi\rangle$ следует представить в виде суммы трех слагаемых, содержащих соответственно градиент концентрации примесонов с выбранным направлением спина

$$x_\uparrow = n_\uparrow/n_i \quad \text{и} \quad x_\downarrow = 1 - x_\uparrow = n_\downarrow/n_i \ , \quad (22)$$

градиент n_i и градиент T. Исходя из (12) после относительно простых, но довольно громоздких расчетов имеем

$$|\varphi\rangle = \frac{T}{m}|\varphi_s\rangle \frac{\nabla x_\uparrow}{x_\uparrow} + \frac{T}{m}|\varphi_m\rangle \frac{\nabla n_i}{n_i} + |\varphi_T\rangle \frac{\nabla T}{T} \ , \quad (23)$$

где

$$|\varphi_s\rangle = \rho_\downarrow^{-1} \left|\begin{matrix}\rho_\downarrow \mathrm{p}_\uparrow\\ -\rho_\uparrow \mathrm{p}_\downarrow\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\rangle \ ;$$

$$|\varphi_m\rangle = \rho_n^{-1} \left|\begin{matrix}\rho_t \mathrm{p}_\uparrow\\ \rho_t \mathrm{p}_\downarrow\\ -\rho_i \mathrm{p}_{\mathrm{ph}}\\ -\rho_i \mathrm{p}_r\end{matrix}\right\rangle \ ; \quad (24)$$

$$|\varphi_T\rangle = \left|\begin{matrix}\tilde{\varepsilon}_\uparrow \mathrm{v}_\uparrow - \dfrac{\bar{S}T}{\rho_n}\mathrm{p}_\uparrow\\ \tilde{\varepsilon}_\downarrow \mathrm{v}_\downarrow - \dfrac{\bar{S}T}{\rho_n}\mathrm{p}_\downarrow\\ \varepsilon_{\mathrm{ph}} \mathrm{v}_{\mathrm{ph}} - \dfrac{\bar{S}T}{\rho_n}\mathrm{p}_{\mathrm{ph}}\\ \varepsilon_r \mathrm{v}_r - \dfrac{\bar{S}T}{\rho_n}\mathrm{p}_r\end{matrix}\right\rangle$$

— векторы, определяющие коэффициенты спиновой, массовой диффузии и термодиффузии соответственно; $\rho_t = \rho_{\mathrm{ph}} + \rho_r$ и $\rho_i = \rho_\uparrow + \rho_\downarrow$ — плотности нормальной компоненты газа тепловых

возбуждений и примесонов соответственно. При получении (23) слагаемые в (12), содержащие ∇n_i и ∇T, преобразовались с помощью соотношения (3) так, чтобы векторы $|\varphi_m\rangle$ и $|\varphi_T\rangle$, как и $|\varphi_s\rangle$, принадлежали пространству P_n. Только в этом случае определение диссипативных коэффициентов будет соответствовать гидродинамическому характеру [9].

Для нахождения коэффициентов диффузии вычислим плотность потока примесонов со спином $\uparrow$, которую, согласно (14), (19) и (21), удобно записать в виде

$$\mathbf{j}_\uparrow = \langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|P_n (P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi\rangle\ . \qquad (25)$$

Подстановка (23) в (25) дает

$$\mathbf{j}_\uparrow = \frac{T}{m}\langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|P_n|\chi_s\rangle \frac{\nabla x_\uparrow}{x_\uparrow} +$$

$$+ \frac{T}{m}\langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|P_n|\chi_D\rangle \frac{\nabla n_i}{n_i} +$$

$$+ \langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|P_n|\chi_T\rangle \frac{\nabla T}{T}\ , \qquad (26)$$

где

$$|\chi_{s,m,T}\rangle = (P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_{s,m,T}\rangle\ . \qquad (27)$$

Средняя скорость $\mathbf{u}_\uparrow = \mathbf{j}_\uparrow \rho_\uparrow^{-1}$ диссипативного потока примесонов со спином $\uparrow$ связана с коэффициентами спиновой D_s, массовой D_m диффузий и термодиффузионным отношением k_T равенством

$$\mathbf{u}_\uparrow = -D_s \frac{\nabla x_\uparrow}{x_\uparrow} - D_m \frac{\nabla n_i}{n_i} - D_m \frac{k_T}{c}\frac{\nabla T}{T}\ , \qquad (28)$$

где $c = m_3 n_i/(m_3 n_i + m_4 n_4)$ — весовая концентрация; n_4 — плотность ^{4}He; m_3, m_4 — массы атомов ^{3}He, ^{4}He соответственно. При этом для диссипативной скорости потока газа примесонов $\mathbf{u}_i = (\mathbf{j}_\uparrow + \mathbf{j}_\downarrow)\rho_i^{-1}$ имеем

$$\mathbf{u}_i = -D_m \frac{\nabla n_i}{n_i} - D_m \frac{k_T}{c}\frac{\nabla T}{T}\ . \qquad (29)$$

Определение (29) согласуется с принятым в сверхтекучих растворах ^{3}He–^{4}He [9].

Учитывая, что

$$\langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|P_n = \langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|(1 - P_c) =$$

$$= \frac{\rho_\downarrow}{\rho_i}\langle \varphi_s| + \frac{\rho_\uparrow}{\rho_i}\langle \varphi_m|\ , \qquad (30)$$

из выражений (26)–(28) получим

$$D_s = -\frac{T}{m}\frac{\rho_\uparrow}{\rho_\downarrow}\frac{1}{\rho_i}\langle \varphi_s|(P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_s\rangle\ ; \qquad (31)$$

$$D_m = -\frac{T}{m}\left(\frac{\rho_t}{\rho_n}\right)^2 \frac{1}{\rho_i}\langle \varphi_m|(P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_m\rangle\ ; \qquad (32)$$

$$D_m k_T = -\frac{c}{\rho_i}\langle \varphi_m|(P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_T\rangle\ . \qquad (33)$$

В соотношениях (31)–(33) учтено, что матричные элементы удовлетворяют выражению

$$\langle \varphi_s|(P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_{m,T}\rangle = 0\ . \qquad (34)$$

Последнее очевидно из соображений симметрии, согласно которым коэффициенты диффузии не меняются при изменении направления оси квантования спина. Тот же результат дают приведенные в следующем разделе вычисления всех матричных элементов, входящих в соотношения (26), (31)–(33).

2. Времена релаксаций

При вычислении матричного элемента, который содержится в коэффициенте спиновой диффузии (31), вектор $|\chi_s\rangle$, определяемый соотношением (27), будем искать в виде

$$|\chi_s\rangle = \left|\begin{matrix} a^s_\uparrow \mathbf{p}_\uparrow \\ a^s_\downarrow \mathbf{p}_\downarrow \\ a^s_{\rm ph}\mathbf{p}_{\rm ph} \\ a^s_r \mathbf{p}_r \end{matrix}\right\rangle = (P_n\, I\, P_n)^{-1}|\varphi_s\rangle\ . \qquad (35)$$

Из (35) с учетом (24) имеем

$$P_n\, I\, P_n \left|\begin{matrix} a^s_\uparrow \mathbf{p}_\uparrow \\ a^s_\downarrow \mathbf{p}_\downarrow \\ a^s_{\rm ph}\mathbf{p}_{\rm ph} \\ a^s_r \mathbf{p}_r \end{matrix}\right\rangle = \rho_\downarrow^{-1}\left|\begin{matrix} \rho_\downarrow \mathbf{p}_\uparrow \\ -\rho_\uparrow \mathbf{p}_\downarrow \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle\ . \qquad (36)$$

Умножая левую и правую части равенства (36) поочередно на векторы $\langle \mathbf{p}_\uparrow\ ;\ 0;\ 0;\ 0|$, $\langle 0;\ \mathbf{p}_\downarrow\ ;\ 0;\ 0|$, $\langle 0;\ 0;\ \mathbf{p}_{\rm ph}\ ;\ 0|$, $\langle 0;\ 0;\ 0;\ \mathbf{p}_r|$, получаем систему уравнений для нахождения a^s_α:

$$-\sum_{\beta\neq\uparrow}\tau^{-1}_{\uparrow\beta}a^s_\uparrow + \tau^{-1}_{\uparrow\downarrow}a^s_\downarrow + \tau^{-1}_{\uparrow\,\rm ph}a^s_{\rm ph} + \tau^{-1}_{\uparrow r}a^s_r = 1\ ;$$

$$-\tau^{-1}_{\downarrow\uparrow}a^s_\uparrow + \sum_{\beta\neq\downarrow}\tau^{-1}_{\downarrow\beta}a^s_\downarrow - \tau^{-1}_{\downarrow\,\rm ph}a^s_{\rm ph} - \tau^{-1}_{\downarrow r}a^s_r = \rho_\uparrow/\rho_\downarrow\ ;$$

$$\tau^{-1}_{\rm ph\uparrow}a^s_\uparrow + \tau^{-1}_{\rm ph\downarrow}a^s_\downarrow - \sum_{\beta\neq\rm ph}\tau^{-1}_{\rm ph\beta}a^s_{\rm ph} + \tau^{-1}_{{\rm ph}r}a^s_r = 0\ ;$$

$$\tau^{-1}_{r\uparrow}a^s_\uparrow + \tau^{-1}_{r\downarrow}a^s_\downarrow + \tau^{-1}_{r\,\rm ph}a^s_{\rm ph} - \sum_{\beta\neq r}\tau^{-1}_{r\beta}a^s_r = 0\ , \qquad (37)$$

где

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = -\rho_\alpha^{-1} \langle \mathbf{p}_\alpha | I_{\alpha\beta}\, \mathbf{p}_\alpha \rangle = -\rho_\alpha^{-1} \langle \mathbf{p}_\alpha | I_{\alpha\beta} | \mathbf{p}_\alpha \rangle \quad (38)$$

— частота столкновения α квазичастицы с β. Из закона сохранения импульса при столкновениях квазичастиц следует

$$I_{\alpha\beta}\, |\mathbf{p}_\alpha\rangle = -\, I_{\alpha\beta}\, |\mathbf{p}_\beta\rangle \ . \quad (39)$$

Равенства (38) и (39) дают соотношение между частотами

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \tau_{\beta\alpha}^{-1} \ . \quad (40)$$

Исходя из (40) нетрудно убедиться, что система (37) линейно зависима. Недостающее уравнение следует из соотношения (20), согласно которому полная плотность потока газа квазичастиц, обусловленная $\nabla x_\uparrow$, равна нулю. В итоге имеем

$$\sum_\beta \langle \mathbf{p}_\beta\, |\chi_{s\beta}\rangle = a_\uparrow^s\, \rho_\uparrow + a_\downarrow^s\, \rho_\downarrow + a_{\rm ph}^s \rho_{\rm ph} + a_r^s \rho_r = 0 \ . \quad (41)$$

Согласно [5,6,9], взаимодействие фононов и ротонов с примесоном не зависит от направления спина последнего. Это позволяет ввести частоты

$$\tau_{i\rm ph}^{-1} = \tau_{\uparrow\rm ph}^{-1} = \tau_{\downarrow\rm ph}^{-1} \ ; \quad \tau_{ir}^{-1} = \tau_{\uparrow r}^{-1} = \tau_{\downarrow r}^{-1} \ . \quad (42)$$

Исходя из (37)–(42) имеем

$$a_{\rm ph}^s = 0 \quad ; \ a_r^s = 0 \ ; \quad (43)$$

$$a_\uparrow^s = -\frac{\rho_\downarrow}{\rho_\uparrow} a_\downarrow^s = (\tau_{ir}^{-1} + \tau_{i\rm ph}^{-1} + \tau_{ii}^{-1})^{-1} \ , \quad (44)$$

где

$$\tau_{ii}^{-1} = \tau_{\uparrow\downarrow}^{-1} + \tau_{\downarrow\uparrow}^{-1} = \frac{\rho_i}{\rho_\uparrow \rho_\downarrow} \langle \mathbf{p}_\uparrow | I_{\uparrow\downarrow} | \mathbf{p}_\downarrow \rangle \ . \quad (45)$$

Соотношения (43) имеют простой физический смысл. Наличие только $\nabla n_\uparrow$ является равновесным состоянием для газа тепловых возбуждений, поскольку взаимодействие фонона и ротона с примесоном не зависит от спина последнего. В этом случае поток газа тепловых возбуждений отсутствует, а потоки примесонов с разными направлениями спинов компенсируют друг друга так, что полная плотность потока импульса равна нулю.

Выражения (31), (35) с учетом (43), (44) дают

$$D_s = \frac{T}{m} (\tau_{ii}^{-1} + \tau_{i\rm ph}^{-1} + \tau_{ir}^{-1})^{-1} \ . \quad (46)$$

Расчет матричного элемента, входящего в коэффициент массовой диффузии (32), в точности аналогичен выполненному при получении (46) из (31). В итоге для коэффициентов a_α^m, определяющих вектор $|\chi_m\rangle$, имеем

$$a_\uparrow^m = a_\downarrow^m = -\frac{\rho_t}{\rho_n} \tau_{it} \ ; \quad (47)$$

$$a_{\rm ph}^m = \frac{\rho_i^2}{\rho_t \rho_n} \Delta^{-1} \left\{ t_r^{-1} + \frac{\rho_r}{\rho_i} (\tau_{ri}^{-1} - \tau_{{\rm ph}i}^{-1}) \right\} \ ; \quad (48)$$

$$a_r^m = \frac{\rho_i^2}{\rho_t \rho_n} \Delta^{-1} \left\{ t_{\rm ph}^{-1} + \frac{\rho_{\rm ph}}{\rho_i} (\tau_{{\rm ph}i}^{-1} - \tau_{ri}^{-1}) \right\} \ , \quad (49)$$

где

$$\tau_{it} = \frac{\rho_i}{\rho_t} \Delta^{-1} \left\{ \frac{\rho_{\rm ph}}{\rho_t} t_r^{-1} + \frac{\rho_r}{\rho_t} t_{\rm ph}^{-1} \right\} \ ;$$

$$\Delta = \tau_{{\rm ph}i}^{-1} \tau_{r{\rm ph}}^{-1} + \tau_{ri}^{-1} \tau_{{\rm ph}r}^{-1} + \tau_{ri}^{-1} \tau_{{\rm ph}i}^{-1} \ ; \quad (50)$$

$$t_r^{-1} = \tau_{ri}^{-1} + \tau_{r{\rm ph}}^{-1} + \tau_{{\rm ph}r}^{-1} \ ;$$

$$t_{\rm ph}^{-1} = \tau_{{\rm ph}i}^{-1} + \tau_{{\rm ph}r}^{-1} + \tau_{r{\rm ph}}^{-1} \ .$$

Соотношения (32), (47)–(50) дают

$$D_m = \frac{T}{m} \left(\frac{\rho_t}{\rho_n} \right)^2 \tau_{it} \ . \quad (51)$$

Из равенства (47) следует, что диффузия, обусловленная ∇n_i, не зависит от спина примесона, в отличие от диффузии, вызванной $\nabla n_\uparrow$, когда $a_\uparrow^s \neq a_\downarrow^s$. В итоге матричный элемент

$$\langle \varphi_s | (P_n\, I\, P_n)^{-1} | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_s | \chi_m \rangle = 0$$

отсутствует в соотношениях (31), (32). По той же причине в (33) нет матричного элемента

$$\langle \varphi_s | (P_n\, I\, P_n)^{-1} | \varphi_T \rangle = \langle \varphi_s | \chi_T \rangle = 0 \ .$$

Согласно (47)–(49), при наличии ∇n_i наряду с потоком примесонов существует и компенсирующий его поток фононов и ротонов. В связи с этим коэффициент массовой диффузии (51), в отличие от (46), содержит множитель $(\rho_t / \rho_n)^2$ и существенно разными в (46) и (51) оказываются времена, обусловленные газом тепловых возбуждений. Подробное обсуждение различных предельных случаев и отличия коэффициентов спиновой и массовой диффузии проводится в последнем разделе статьи, где расчетные значения сопоставляются с экспериментальными данными.

Выполняя вычисления, аналогичные приведенным выше, из соотношения (33) получаем

$$k_T = c\frac{m}{T}\left[\frac{n_i T}{\rho_i} - \frac{S_t T}{\rho_t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_{\rm ph}\rho_r}{\rho_i \rho_t}\left(\frac{S_{\rm ph} T}{\rho_{\rm ph}} - \frac{S_r T}{\rho_r}\right)\tau_\kappa(\tau_{{\rm ph}i}^{-1} - \tau_{ri}^{-1})\right] , \quad (52)$$

где $\tau_\kappa^{-1} = \frac{\rho_{\rm ph}}{\rho_n}\tau_r^{-1} + \frac{\rho_r}{\rho_n}\tau_{\rm ph}^{-1}$.

Выражение (51) будет совпадать с результатом работы [1], если в (51) заменить m на m_3, а τ_{it} — интерполяционным соотношением $(\tau_{i{\rm ph}}^{-1} + \tau_{ir}^{-1})^{-1}$. В предельных случаях фонон-примесонной ($\rho_r = 0$) или ротон-примесонной ($\rho_{\rm ph} = 0$) систем формула (52) дает результаты работы [1]. Выражения (51) и (52) находятся в полном соответствии с соотношениями работы [5].

В общем случае термодиффузионное отношение (52) оказывается зависящим от времен взаимодействия квазичастиц в меру разности частот столкновений фононов и ротонов с примесонами. Той же разностью, согласно (46) и (51), определяется и отличие в D_s и D_m времен, обусловленных газом тепловых возбуждений.

3. Диффузия квазичастиц и частиц

Физический смысл полученных выше результатов можно понять, если рассмотреть диффузию в многокомпонентном газе классических частиц. Как отмечалось в предыдущем разделе, при вычислении коэффициента массовой диффузии примесоны можно рассматривать как единый газ квазичастиц, игнорируя различие в проекциях спина. В связи с этим достаточно ограничиться случаем трехкомпонентного газа классических частиц.

Диффузия в таком газе описывается системой кинетических уравнений, аналогичной (4), при наличии градиентов плотностей числа частиц n_j всех компонент газа. Здесь индекс $j = 1, 2, 3$ нумерует компоненты. В рассматриваемом случае коэффициенты диффузии образуют трехкомпонентную матрицу D_{jk}, которая определяет связь между скоростями диссипативных потоков $\mathbf{u}_j$ и градиентами n_k компонент газа

$$\mathbf{u}_j = -\sum_{k=1}^{3} D_{jk}\nabla\frac{n_k}{n} , \quad (53)$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3$ — полная плотность числа частиц смеси, которая при постоянном полном давлении не зависит от координаты.

В результате вычислений, аналогичных приведенным выше, для D_{jk} имеем

$$D_{jk} = \frac{nT}{\rho} t_{jk} , \quad (54)$$

где

$$\rho = \sum_{l=1}^{3}\langle \mathbf{p}_l | \mathbf{p}_l\rangle = \sum_{l=1}^{3} m_l n_l ;$$

$$t_{jj} = \Delta_{kl}^{-1}\left[\frac{\rho_k}{\rho} t_l^{-1} + \frac{\rho_l}{\rho} t_k^{-1}\right] ; \quad (55)$$

$$t_{jk} = -\Delta_{kl}^{-1}\left[\frac{\rho_j}{\rho}(t_l^{-1} + \tau_{jl}^{-1}) - \frac{\rho_l}{\rho}\tau_{kj}^{-1}\right] ; \quad (56)$$

$$t_l^{-1} = \tau_{lj}^{-1} + \tau_{lk}^{-1} + \tau_{kl}^{-1} ; \quad (57)$$

$$\Delta_{kl} = \tau_{kj}^{-1}\tau_{lk}^{-1} + \tau_{lj}^{-1}\tau_{kl}^{-1} + \tau_{kj}^{-1}\tau_{lj}^{-1} .$$

В соотношениях (55)–(57) $j \neq k \neq l$ и j, k, l принимают значения 1, 2, 3, а

$$\tau_{kl}^{-1} = -\langle \mathbf{p}_k | \mathbf{p}_k\rangle^{-1}\langle \mathbf{p}_k | I_{kl} | \mathbf{p}_k\rangle \quad (58)$$

— время взаимодействия частицы k с l, которое дается матричным элементом от линеаризованного интеграла столкновения I_{kl}. Из определения (58) и закона сохранения импульса при столкновениях частиц следует

$$\tau_{kl}^{-1} = \frac{\rho_l}{\rho_k}\tau_{lk}^{-1} . \quad (59)$$

Выражение (54) можно получить и из соотношений, полученных в [11], где результат приведен в виде системы уравнений, содержащих интегральные скобки, по сути аналогичные матричным элементам (58). Однако запись (54)–(58), содержащая времена взаимодействия между частицами, делает выражения для D_{jk} наглядными, позволяет объяснить физический смысл результатов, провести сопоставление с газом квазичастиц и рассмотреть различные предельные случаи.

Для двухкомпонентной системы в отличие от трехкомпонентной диффузию принято описывать не матрицей второго порядка $D_{jk}^{(2)}$ (где $j, k = 1, 2$), а так называемым коэффициентом диффузии первой компоненты во второй D_1 или второй — в первой D_2 (см., например, [12]). Один из этих коэффициентов фигурирует в гидродинамических уравнениях бинарной смеси. Связь между D_1, D_2 и $D_{jk}^{(2)}$ следует из равенства

$$\nabla n_1 = -\nabla n_2 , \quad (60)$$

которое дает

$$\mathbf{u}_1 = -(D_{11}^{(2)} - D_{12}^{(2)})\frac{\nabla n_1}{n} = -D_1\frac{\nabla n_1}{n_t} ; \quad (61)$$

$$u_2 = -(D_{22}^{(2)} - D_{21}^{(2)})\frac{\nabla n_2}{n} = -D_2\frac{\nabla n_2}{n_2}, \quad (62)$$

где, согласно (54)–(59), для двухкомпонентной системы имеем

$$D_{11}^{(2)} = \frac{nT}{\rho}\tau_{21}\frac{\rho_2}{\rho}; \quad D_{22}^{(2)} = \frac{nT}{\rho}\tau_{12}\frac{\rho_1}{\rho}; \quad (63)$$

$$D_{12}^{(2)} = D_{21}^{(2)} = -\frac{nT}{\rho}\tau_{21}\frac{\rho_1}{\rho}. \quad (64)$$

Учитывая соотношения (61)–(64), получаем

$$D_1 = \frac{T}{m_1}\frac{\rho_1}{\rho}\tau_{21}; \quad D_2 = \frac{T}{m_2}\frac{\rho_2}{\rho}\tau_{12}. \quad (65)$$

В предельных случаях диффузии тяжелого газа 1 в легком 2, когда выполняются неравенства $m_1 >> m_2$, $n_1 << n_2$, $\rho_1 << \rho_2$, и диффузии легкого 2 в тяжелом 1 при $n_2 << n_1$ из соотношения (65) можно получить результаты, приведенные в [12].

Описание диффузии в газе частиц всего одним так называемым коэффициентом диффузии D_1 (или D_2) является спецификой бинарной смеси. Когда число компонент больше двух, явление диффузии описывается матрицей соответствующего ранга.

В трехкомпонентном газе квазичастиц сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He, в отличие от обычных частиц, вводится всего один коэффициент диффузии D_m примесонов в фонон-ротонном газе. Этот коэффициент содержится в гидродинамических уравнениях сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He. Коэффициент диффузии D_m, как нетрудно убедиться, определяется соответствующим диагональным элементом матрицы D_{jk}. Действительно, считая, что $1 \to i$, $2 \to$ ph, $3 \to r$ для первого слагаемого в (53) при $j = 1 \to i$ с учетом равенств (29), (51) и (54), имеем

$$-D_{11}\frac{\nabla n_1}{n} = -D_m\frac{\nabla n_i}{n_i}. \quad (66)$$

В области достаточно низких температур ($T < 0{,}5$ K), когда вкладом ротонов можно пренебречь, для коэффициента диффузии примесонов в газе фононов

$$D_m^{(2)} = D_m\big|_{\rho_r = 0},$$

учитывая соотношения (51), (63), (66), имеем

$$D_m^{(2)} = \frac{n_i}{n}D_{11} = \frac{T}{m}\left(\frac{\rho_{\rm ph}}{\rho_n}\right)^2\tau_{i\rm ph}. \quad (67)$$

Отметим существенную разницу между коэффициентом диффузии газа 1 в газе 2 (65) и коэффициентом диффузии $D_m^{(2)}$ примесонов в газе фононов. Поскольку содержащееся в (65) произведение $\rho_1\tau_{21} = \rho_2\tau_{12}$ определяется сечением рассеяния σ_{12} и не зависит от плотности, коэффициент диффузии D_1 остается конечным при $\rho_2 \to 0$ и уменьшается в меру множителя ρ^{-1} при увеличении плотности рассеивателей ρ_2. Что же касается коэффициента $D_m^{(2)}$, то, согласно (67), он стремится к нулю, когда $\rho_{\rm ph} \to 0$ и за счет множителя $\rho_{\rm ph}(\rho_i + \rho_{\rm ph})^{-2}$ является при $\rho_{\rm ph} < \rho_i$ растущей функцией от плотности рассеивателей $\rho_{\rm ph}$.

Ситуация принципиально не меняется, если, используя аналогию равенств (3) и (60), подобно (61) для примесон–фононной системы ввести коэффициент диффузии D_i соотношением

$$u_i = -D_m^{(2)}\frac{\nabla n_i}{n} - k_T D_m^{(2)}\frac{\nabla T}{T} = -D_i\frac{\nabla n_i}{n_i}, \quad (68)$$

где, согласно (3),

$$D_i = \frac{T}{m}\frac{S_{\rm ph}}{\overline{S}}\frac{\rho_i}{\rho_n}\tau_{{\rm ph}i}. \quad (69)$$

Наличие в (69) в отличие от D_1 множителя $S_{\rm ph}/\overline{S}$ приводит к существенной зависимости D_i от плотности фононного газа и связано со спецификой газа тепловых возбуждений, число которых не сохраняется, а является функцией температуры. Коэффициент (69) в работах [13,14] называется эффективным коэффициентом диффузии и используется при расчете потока примесонов.

Соотношение (53) можно записать так, что оно будет применимо для газа частиц и квазичастиц:

$$u_j = -\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\rho}t_{jk}\nabla P_k, \quad (70)$$

где для частиц

$$\nabla P_k = \nabla n_k T = T\nabla n_k,$$

а для квазичастиц ($1 \to i$; $2 \to$ ph; $3 \to r$) градиенты парциальных давлений даются равенствами (3). Подставляя последние в соотношение (70) с $j = 1 \to i$ и учитывая определение (29), получаем для коэффициентов D_m и k_T соответственно выражения (51) и (52).

Из соотношения (70) нетрудно получить и коэффициент спиновой диффузии в области низких температур, где вкладом ротонов можно пренебречь. Для этого в выражении (70) с $j = 1$ следует считать $1 \to \uparrow$, $2 \to \downarrow$, $3 \to$ ph и воспользоваться равенствами (22) и (28). Слагаемое τ_{ir}^{-1}, содержа-

щееся в (46), получается из решения аналогичной задачи для четырехкомпонентного газа частиц.

Исходя из выражения (70) можно найти вклад в теплопроводность, обусловленный диффузией газа тепловых возбуждений.

Согласно [5,6], коэффициент теплопроводности сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He можно представить в виде

$$\kappa = \kappa_{\rm ph} + \kappa_r + \kappa_i + \kappa_{{\rm ph},r,i} \ , \qquad (71)$$

где $\kappa_{\rm ph}$, κ_r, κ_i — парциальные коэффициенты теплопроводности, которые определяют соответственно аддитивный вклад фононов, ротонов и примесонов в общую теплопроводность, а $\kappa_{{\rm ph},r,i}$ — так называемая [5] неаддитивная часть теплопроводности. При линейном законе дисперсии фононов $\kappa_{\rm ph} = 0$ [9].

Определим диффузионную часть теплопроводности κ_D как коэффициент, связывающий диссипативный поток тепла $\mathbf{q}_t$ газа тепловых возбуждений

$$\mathbf{q}_t = S_{\rm ph}\, T\mathbf{u}_{\rm ph} + S_r\, T\mathbf{u}_r$$

с градиентом температуры. Коэффициент теплопроводности κ_D, как обычно [9], определяется так, что при $\mathbf{u}_i = 0$ поток тепла

$$\mathbf{q}_t\big|_{\mathbf{u}_i=0} = -\kappa_D \nabla T \ . \qquad (72)$$

Соотношение (72) с учетом (70) дает

$$\kappa_D = \frac{1}{T}\left(\frac{S_{\rm ph}\, T}{\rho_{\rm ph}} - \frac{S_r\, T}{\rho_r}\right)^2 \frac{\rho_{\rm ph}\rho_r}{\rho_n}\tau_\kappa \ . \qquad (73)$$

Сопоставляя (73) с результатом (71) расчетов [5,6], выполненных исходя из определения коэффициента теплопроводности сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He, получаем $\kappa_D = \kappa_{{\rm ph},r,i}$. Таким образом, неаддитивная часть теплопроводности обязана диффузии в газе квазичастиц.

Отметим симметрию формулы (73) относительно фононов и ротонов. В чистом ^{4}He выражение для κ_D можно записать в несимметричном виде:

$$\kappa_D\,\big|_{u_i=0} = \frac{1}{T}\rho_{\rm ph}\, v_{\rm ph}^4\left(1 - \frac{TS_t}{\rho_t v_{\rm ph}^2}\right)^2 \tau_{{\rm ph}r} \ , \qquad (74)$$

приведенном в [9]. Такая несимметричная запись и давала основание называть выражение (74) «фононной» теплопроводностью. Симметрия исходной формулы (73) свидетельствует о том, что такое название является сугубо условным в чистом ^{4}He, не говоря уже о растворах, где τ_κ содержит время τ_{ri}. Таким образом, рассматривая диффузию в газе тепловых возбуждений He II [7], можно в итоге получить «фононную» часть теплопроводности.

Численные оценки показывают, что в широкой области температур и концентраций теплопроводность κ_D оказывается существенно больше парциальных теплопроводностей κ_i и κ_r. В этом случае теплопроводность растворов фактически полностью определяется диффузионными потоками фононов и ротонов в трехкомпонентном газе квазичастиц. Согласно (73), κ_D определяется отличием законов дисперсии различных компонентов газа тепловых возбуждений. Можно предположить, что такой механизм теплопроводности реализуется и в других системах, содержащих многокомпонентный газ квазичастиц.

4. Обсуждение результатов и сопоставление с экспериментами

До настоящего времени, насколько нам известно, коэффициент спиновой диффузии не был вычислен с учетом вклада тепловых возбуждений. В связи с этим в литературе [3,4] последний описывался эмпирическим соотношением

$$D_s^{-1} = D^{-1} + D_{ii}^{-1} \ , \qquad (75)$$

где предполагалось, что D — коэффициент массовой диффузии, а D_{ii} определяется столкновениями примесонов друг с другом.

Результат (46), записанный в виде (75), дает

$$D = \frac{T}{m}(\tau_{i{\rm ph}}^{-1} + \tau_{ir}^{-1})^{-1} \ ; \qquad (76)$$

$$D_{ii} = \frac{T}{m}\tau_{ii} \ . \qquad (77)$$

Полученное выражение (76) существенно отличается от коэффициента массовой диффузии (51). Наличие множителя $\rho_t^2\rho_n^{-2}$ в D_m приводит к принципиально разной зависимости коэффициентов (51) и (76) от температуры. В отличие от D для D_m эта зависимость имеет колоколообразный вид.

Разными оказываются и времена релаксации, входящие в эти коэффициенты. В D, как в обычной газокинетической теории, это время

$$\tau_s = (\tau_{i{\rm ph}}^{-1} + \tau_{ir}^{-1})^{-1} \qquad (78)$$

определяется суммой частот столкновений с находящимися в равновесии фононами и ротонами, а в D_m — это время (50), описывающее релаксацию в неравновесном трехкомпонентном газе квазичастиц. По этой причине τ_{it} зависит не только от частот столкновений примесонов с тепловыми возбуждениями, но и от фонон-ротонной релаксации, входящей в (50).

В предельном случае медленного установления равновесия между фононами и ротонами ($\tau_{phr} \to \infty$, $\tau_{rph} \to \infty$) из (50) получим

$$\tau_{it}\Big|_{\infty} = \frac{\rho_{ph}^2}{\rho_t^2}\tau_{iph} + \frac{\rho_r^2}{\rho_t^2}\tau_{ir} . \qquad (79)$$

Здесь в отличие от (78) суммируются не частоты, а времена. Такой результат обусловлен тем, что аддитивные фононный и ротонный потоки, компенсирующие примесонный, являются независимыми в силу отсутствия взаимодействия между ними.

В противоположном предельном случае быстрой релаксации в фонон-ротонной системе ($\tau_{phr} \to 0$, $\tau_{rph} \to 0$) соотношение (50) переходит в (78). Здесь установление равновесия между примесонами и газом тепловых возбуждений определяется меньшим из времен.

При слабом взаимодействии между фононами и примесонами ($\tau_{iph} \to \infty$; $\tau_{phi} \to \infty$) и быстрой релаксации в примесон–ротонной системе ($\tau_{ir} \to 0$, $\tau_{ri} \to 0$) выражение (50) дает

$$\tau_{it}\Big|_{\infty,\,0} = \frac{\rho_i \rho_{ph}}{\rho_t^2}\tau_{phr} . \qquad (80)$$

В этом случае установление равновесия между примесонами и газом тепловых возбуждений определяется фонон–ротонным взаимодействием, и в коэффициенте диффузии примесонов D_m отсутствует частота столкновения последних с газом тепловых возбуждений.

Отметим, что, согласно предыдущему разделу, столь неожиданные результаты связаны со спецификой квазичастиц, для которых диффузия в трехкомпонентной системе описывается всего одним элементом $D_{11}(1 \to i)$ матрицы (54).

В общем случае отличие уравнения для времени (78) от уравнения (50) становится наглядным, если последнее записать в виде

$$\tau_{it} = \left[\tau_{iph}^{-1} + \tau_{ir}^{-1} - \frac{\rho_{ph}\rho_r}{\rho_i \rho_n}\tau_\kappa(\tau_{phi}^{-1} - \tau_{ri}^{-1})^2\right]^{-1} . \qquad (81)$$

Таким образом, время τ_s всегда меньше τ_{it} в меру различия частот столкновений примесонов с фононами и ротонами. На рис. 1 приведена температурная зависимость относительной разности времен τ_{it} и τ_s для раствора с молярной концентрацией x легкого изотопа равной 3%. При расчетах здесь и далее использовались значения времен τ_{phr}, τ_{iph} и τ_{ir}, полученные в [1,5,6,8,15]. К сожалению, в рассматриваемой области температур и концентраций, где различие между τ_{it} и τ_s существенно,

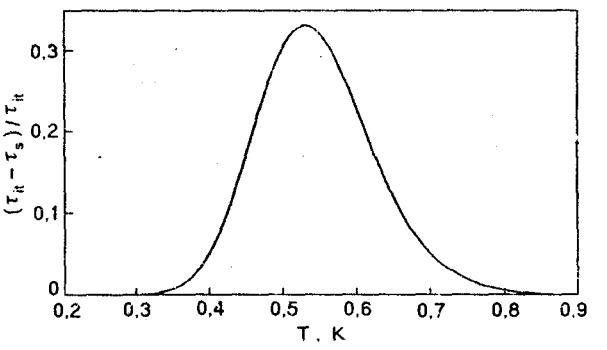

Рис. 1. Температурная зависимость относительной разности времен $(\tau_{it} - \tau_s)\tau_{it}^{-1}$, входящих в коэффициенты массовой и спиновой диффузии для $x = 3 \cdot 10^{-2}$.

экспериментальные данные о коэффициенте массовой диффузии отсутствуют.

На рис. 2 приведена полученная по формуле (46) зависимость коэффициента массовой диффузии от обратной температуры. Там же нанесены имеющиеся экспериментальные данные. Наличие максимума на кривой связано с колоколообразной зависимостью, содержащейся в (51) функции $\rho_t \rho_n^{-2}$, которая достигает наибольшего значения при $\rho_t = \rho_i$, и температурной зависимостью множителя

$$\rho_t \tau_{it} = \rho_{ph}\tau_{iph} + (\rho_r \tau_{ir} - \rho_{ph}\tau_{iph}) \times$$

$$\times \left(\tau_{phi} + \frac{\rho_r}{\rho_t}\tau_{phr}\right)\left(\tau_{phr} + \tau_{phi} + \frac{\rho_{ph}}{\rho_r}\tau_{ri}\right)^{-1} . \qquad (82)$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, при анализе зависимостей удобно рассматривать произведение времени на соответствующую плотность. Такое

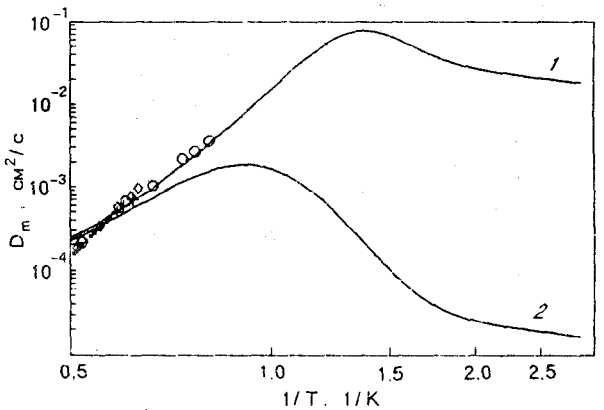

Рис. 2. Зависимость коэффициента массовой диффузии от обратной температуры. Расчет по формуле (51) для концентраций x: 10^{-3} (*1*), 10^{-2} (*2*) — экспериментальные данные [19,20] для молярных концентраций $1{,}39 \cdot 10^{-4}$ (○), $1{,}32 \cdot 10^{-3}$ (◇); данные [21] для $x = 10^{-3}$ и $9{,}4 \cdot 10^{-4}$ (□); данные [22] для $x = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ (+).

произведение слабо зависит (а в ряде случаев вообще не зависит) от плотностей компонентов смеси.

Выражение (82), следующее из (50), симметрично относительно перестановки фононов и ротонов (ph $\rightleftarrows$ r). Форма записи (82) позволяет оценить вклад ротонов в τ_{it}. Согласно (82), знак вклада определяется соотношением между сечениями рассеяния ротонов и фононов на примесонах. Согласно результатам работ [5] и [8], имеем

$$\rho_r \tau_{ir} / \rho_{\rm ph} \tau_{i\rm ph} = 1{,}14\, T^{5/2} .$$

Таким образом, увеличение числа ротонов может как уменьшить, так и увеличить множитель (82), определяющий коэффициент массовой диффузии (51).

Согласно (46), коэффициент спиновой диффузии при достаточно низких температурах в основном определяется временем τ_{ii}. Для расчета последнего по формуле (45) необходимо знать потенциал взаимодействия примесонов друг с другом, для которого в настоящее время нет общепринятого выражения. Обсуждаемый потенциал описывается разными модельными выражениями [9,16,17] с подгоночными параметрами, позволяющими добиться согласия с экспериментами. В связи с этим определим время τ_{ii} исходя из наблюдаемых значений спиновой диффузии в области низких температур. Сопоставляя экспериментальные данные [18] с формулой (46), получаем

$$\tau_{ii} = 5 \cdot 10^{-12} T^{-2} x^{-1} . \qquad (83)$$

На рис. 3 для разных концентраций приведена наблюдаемая и рассчитанная по формуле (46) зависимость коэффициента спиновой диффузии от обратной температуры. Там же нанесены кривые

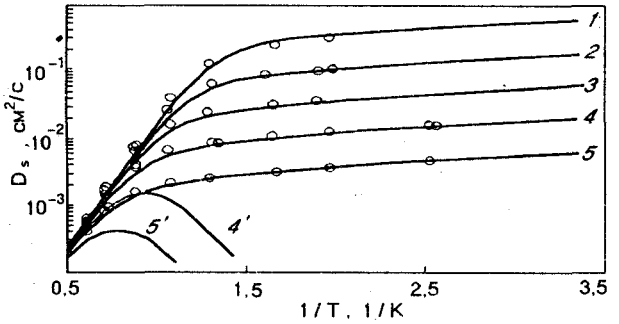

Рис. 3. Зависимость коэффициента спиновой диффузии от обратной температуры. Экспериментальные данные работы [18] (○) для концентраций x: $3 \cdot 10^{-4}$ (*1*), $1{,}02 \cdot 10^{-3}$ (*2*), $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ (*3*), $9{,}2 \cdot 10^{-3}$ (*4*), $3 \cdot 10^{-2}$ (*5*). Кривые *1–5* — расчет по формуле (46) для тех же концентраций. Кривые *4′* и *5′* — расчет по формуле (75), когда D — коэффициент массовой диффузии (51).

4′ и *5′*, полученные по формуле (75), в которой предполагалось, что D является коэффициентом массовой диффузии. Сравнение формул (51) и (76) показывает, что D_m совпадает с D только в случае $x \to 0$. Этот результат подтверждает выполненная в [18] обработка экспериментов для $T > 0{,}8$ K, когда из данных по D_s еще можно определить D с достаточной точностью.

Согласие кривых *1–5* с экспериментальными данными и отличие от последних кривых *4′* и *5′* свидетельствует с пользу достоверности полученных в настоящей работе результатов.

Заключение

Исходя из единого подхода вычислены коэффициенты спиновой (46), массовой (51) диффузий, термодиффузионное отношение (52) сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He и матрица (54), определяющая диффузионные потоки (53) в трехкомпонентном газе квазичастиц. Сопоставление полученных выражений позволило выяснить их физический смысл. Найдено общее соотношение (70), описывающее явление диффузии в газе квазичастиц квантовых растворов ^{3}He–^{4}He и в смеси классических газов. Показано, что диффузионный поток газа тепловых возбуждений (72) обусловливает неаддитивную часть (73) коэффициента теплопроводности раствора. Применявшаяся ранее эмпирическая формула (75), связывающая коэффициенты спиновой и массовой диффузии, противоречит результатам расчетов. Согласно последним, вклад в спиновую диффузию, обусловленный тепловыми возбуждениями (76), существенно отличается от коэффициента массовой диффузии временами (50), (78) (рис. 1) и коэффициентом $\rho_t^2 \rho_n^{-2}$, определяющим принципиально разную температурную зависимость указанных коэффициентов (рис. 2, 3). Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными (рис. 2, 3).

1. И. М. Халатников, В.Н. Жарков, *ЖЭТФ* **32**, 1108 (1957).
2. W. J. Mullin and J. W. Jeon, *J. Low Temp. Phys.* **88**, 433 (1992).
3. Б. Н. Есельсон, В. И. Григорьев, В. Г. Иванцов, Э. Я. Рудавский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей* ^{3}He–^{4}He, Наука, Москва (1973).
4. Б. Н. Есельсон, В. Г. Иванцов, В. А. Коваль, Э. Я. Рудавский, И. А. Сербин, *Свойства твердого и жидкого гелия*, Наукова думка, Киев (1982).
5. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **96**, 1286 (1989).
6. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and V. I.Tsyganok, *J. Low Temp. Phys.* **81**, 233 (1990).
7. Ch. Um, Ch. Jun, H. Shin, and T. F. George, *J. Low Temp. Phys.* **78**, 51 (1990).
8. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **88**, 1641 (1985).
9. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
10. И. Н. Адаменко, Е. Э. Немченко, В. И. Цыганок, А. И. Черванев, *ФНТ* **20**, 636 (1994).

11. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
12. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
13. С. Н. Бурмистров, Л. Б. Дубовский, *ЖЭТФ* 100, 1844 (1991).
14. T. C. P. Chui and J. A. Lipa, *Phys. Rev.* **B40**, 4306 (1989).
15. И. Н. Адаменко, В. А. Слюсарев, *ФНТ* **5**, 1113 (1979).
16. J. Bardeen, G. Baym, and D. Pines, *Phys. Rev.* **156**, 156 (1967).
17. E. P. Bashkin and A. E. Meyerovich, *Adv. Phys.* **30**, 1 (1981).
18. J. E. Opfer, K. Luszczunski, R. E. Norberg, *Phys. Rev.* **172**, 192 (1968).
19. Т. П. Птуха, *ЖЭТФ* **40**, 1583 (1961).
20. Т. П. Птуха, *ЖЭТФ* **39**, 896 (1960).
21. J. Tuttle, F. Zhong, and H. Meyer, *J. Low. Temp. Phys.* **82**, 15 (1991).
22. G. A. Herzlinger and J. G. King, *Phys. Lett.* **40A**, 65 (1972).

Diffusion of quasi-particles of ^{3}He–^{4}He mixtures and classical particles

I. N. Adamenko and K. E. Nemchenko

All diffusion coefficients of superfluid ^{3}He–^{4}He mixtures and the diffusion matrix of a tree-component gas of classical particles were calculated using the common approach. The comparison of all the results obtained made it possible to explain their physical sense. The diffusion flow of the gas of thermal excitations was shown to determine the nonadditive part of the thermal conductivity coefficient in the mixtures. The expression obtained for the coefficient of spin diffusion essentially differs from the earlier empirical formula that includes the coefficient of mass diffusion. The calculation results were compared with experimental data.