Физика низких температур, 1995, т. 21, № 6, с. 594–603 УДК 538.945

Неравновесные флуктуации тока в туннельных структурах сверхпроводник — нормальный металл

С. В. Найденов, В. А. Хлус

Институт монокристаллов НАН Украины, Украина, 310141, г. Харьков, пр. Ленина, 60

Статья поступила в редакцию 28 декабря 1994 г.

В рамках формализма задачи рассеяния получены общие выражения для тока и спектральной плотности токовых флуктуаций в низкочастотном пределе для контакта нормальный металл — сверхпроводник с произвольным барьером в присутствии постоянной внешней разности потенциалов. Показано, что в зависимости от характера туннелирования (нерезонансное в бесструктурном барьере; резонансное в барьере, содержащем локализованные состояния) возможно существенно различное поведение динамических и флуктуационных характеристик системы. Для конкретной модели резонансного туннелирования получено выражение для тока, допускающее существование отрицательного дифференциального сопротивления в определенной области значений параметров рассеяния. Также получена формула для шума тока, спектральная плотность которого по сравнению с нерезонансным туннелированием содержит дополнительные вклады, обусловленные интерференционными электрон-дырочными процессами рассеяния на локализованном состоянии.

В межах формалізму задачі розсіяння одержано загальні вирази для струму та спектральної густини струмових флуктуацій в низькочастотному наближенні для контакту нормальний метал — надпровідник з довільним бар'єром у присутності постійної зовнішньої різниці потенціалів. Виявлено, що в залежності від характеру тунелювання (нерезовансне у безструктурному бар'єрі; резонансне у бар'єрі, що містить локалізовані стани) можливою є істотно відмінна поведінка динамічних та флуктуаційних характеристик системи. Для конкретної моделі резонансного тунелювання одержано вираз для струму, який допускає існування негативного диференційного опору в певній зоні значень параметрів розсіяння. Також одержано формулу для шуму струму; спектральна густина якого у порівнянні з нерезонансним тунелюванням має додаткові внески за рахунок наявності інтерференційних електрон-діркових процесів розсіяння на локалізованому стані.

Введение

Спектральные плотности флуктуаций (шума) тока и напряжения являются важными характеристиками процесса переноса заряда в проводящих микроструктурах. Природа и свойства шума существенно зависят от характера движения носителей в области пространственного изменения электрического потенциала. Различные механизмы шумов могут играть доминирующую роль при баллистическом или диффузионном движении частиц, при туннелировании через потенциальные барьеры, прыжковых переходах между локализованными состояниями и т.д.

Для полного описания равновесных флуктуаций тока, согласно флуктуационно-диссипативной теореме (ФДТ) [1], достаточно рассмотреть линейный отклик системы на внешнее электрическое поле. Спектральная плотность шума в неравновесном состоянии определяется из коррелятора ток — ток, который вычисляется путем усреднения соответствующего операторного произведения с неравновесной матрицей плотности.

Во многих твердотельных устройствах основным источником флуктуаций тока при достаточно большом приложенном напряжении является дробовый шум [2,3], обусловленный дискретностью и стохастичностью процесса переноса заряда. В основе стандартного рассмотрения дробового шума лежит допущение, что движение отдельных носителей, независимо от его механизма, от одного токового контакта к другому является взаимно некоррелированным, т.е. может быть описано пуассоновским случайным процессом с фиксированным средним числом переходов в единицу времени, пропорциональным среднему транспортному току $\bar{I}$. В результате спектральная плотность шумового тока в частотной области, соответствующей белому шуму, определяется формулой Шоттки $S_I = 2e|\bar{I}|$, где e — абсолютная величина заряда носителя. Основанное на весьма общих предположениях, данное соотношение также справедливо при произвольной вольт-амперной зависимости $\bar{I}(V)$. В реальных системах картина токовых флуктуаций более сложная, например хорошо известно подавление дробового шума в вакуумных диодах по сравнению с величиной, определяемой по формуле Шоттки, вследствие влияния пространственного заряда [3, гл. 6].

В нормальных и сверхпроводящих туннельных контактах дробовый шум также описывается фор-

© С. В. Найденов, В. А. Хлус, 1995

мулой Шоттки при условии, что приложенное среднее напряжение значительно больше температуры и величины сверхпроводящей щели Δ (см., например, [4] и цитируемые там более ранние работы). Данный результат основан на вычислении среднего тока и коррелятора токов методом туннельного гамильтониана, т.е. справедлив при малой прозрачности барьера. Применимость стандартного выражения для дробового шума означает, что одночастичное туннелирование при указанных выше условиях можно рассматривать как некоррелированную последовательность переходов через барьер с малой вероятностью отдельного акта туннелирования.

Спектральная плотность неравновесных токовых флуктуаций в микроконтактах с сужением нормальный металл — нормальный металл и сверхпроводник — нормальный металл (*NcN*- и *ScN*-типов) изучалась в работе одного из авторов [5]. При этом предполагалось, что в области сужения существует потенциальный барьер малой толщины с произвольным значением коэффициента прозрачности, а вне барьера движение электронов является баллистическим. Рассматривался предельный случай, когда размер контакта мал по сравнению со всеми характерными длинами задачи — длиной упругого и неупругого рассеяния электронов, а также по сравнению с длиной когерентности сверхпроводника. Эти предположения позволяют проследить переход от режима туннелирования к металлической проводимости баллистического микроконтакта, сопротивление которого определяется формулой Шарвина [6]. При вычислении коррелятора токов использовалось обобщение метода квазиклассических функций Грина [7], пригодное при наличии резких в атомных масштабах потенциальных барьеров.

Целью настоящей работы является вычисление спектральной плотности флуктуационного тока для контакта сверхпроводник — нормальный металл с потенциальным барьером, в котором могут существовать локализованные электронные состояния вследствие флуктуаций потенциала вблизи дефектов и примесей. Можно также полагать, что рассматриваемый ниже подход применим к более общей ситуации, например к резонансным туннельным структурам, в которых один из электродов является сверхпроводником. Возможность резонансного туннелирования в подобных системах приводит к сильному изменению коэффициента прозрачности вблизи резонанса. В методе квазиклассических функций Грина вывод граничных условий на барьере [7] при наличии локализованных состояний представляет самостоятельную и нетривиальную задачу. Ниже рассматривается упрощенная одномерная модель барьера, которая допускает точное решение задачи рассеяния для квазичастичной волновой функции, удовлетворяющей уравнению Боголюбова—де Жена [8]. Оператор тока можно выразить через операторы рождения и уничтожения квазичастичных состояний рассеяния. При вычислении коррелятора ток — ток средние от операторных произведений расцепляются на произведения парных средних, связанных с функциями распределения квазичастиц в берегах контакта [9]. Из дальнейших результатов будет видно, что при слабой зависимости амплитуд прохождения и отражения квазичастиц от энергии выражения для среднего тока и коррелятора токов совпадают с соответствующими формулами квазиклассического метода [5,7]. В более общем случае, включающем резонансное туннелирование, спектральная плотность флуктуаций тока содержит дополнительные вклады, отражающие интерференцию рассеяния квазичастиц на барьере и андреевского отражения [10], связанного с недиагональными переходами в пространстве состояний частица — дырка.

1. Дробовый и избыточный шумы в нормальных и *SN*-контактах

Для нормальных микроконтактов основной результат работы [5] заключается в том, что по мере увеличения коэффициента прозрачности интенсивность дробового шума подавляется, т.е. отношение $S_I/(2e|\bar{I}|)$, равное единице в пределе малой прозрачности, при увеличении последней монотонно убывает до нуля для чистого микросужения. Температура предполагается нулевой, и равновесный шум Найквиста—Джонсона со спектральной плотностью $S_I = 4T/R_N$ (R_N — омическое сопротивление контакта) отсутствует. В этом случае низкочастотная спектральная плотность шума может быть записана в виде

$$S_I(V) = 2e|V|\,\frac{e^2}{\pi\hbar}\times$$

$$\times \int d\mathbf{r}_\parallel \int \frac{d\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi\hbar)^2}\, D(\mathbf{p}_\parallel, \mathbf{r}_\parallel)\,[1 - D(\mathbf{p}_\parallel, \mathbf{r}_\parallel)]\ , \quad (1)$$

где $D(\mathbf{p}_\parallel, \mathbf{r}_\parallel)$ — коэффициент прохождения через барьер для электронов, имеющих энергию равную фермиевской и составляющую импульса параллельную барьеру $\mathbf{p}_\parallel$ ($\mathbf{r}_\parallel$ — координата в плоскости барьера). Зависимость потенциала от $\mathbf{r}_\parallel$ считается плавной в атомных масштабах, поэтому для электронов на поверхности Ферми по переменным $\mathbf{p}_\parallel$, $\mathbf{r}_\parallel$ справедливо квазиклассическое описание. Вольтамперная характеристика контакта линейна, обратное сопротивление (кондактанс) равно

$$G = R_N^{-1} = \frac{e^2}{\pi\hbar}\int dr_\parallel \int \frac{dp_\parallel}{(2\pi\hbar)^2} D(p_\parallel, r_\parallel) \ . \quad (2)$$

Как было отмечено в [5], при отсутствии механизма рассеяния электронов в области сужения источником токового шума являются равновесные флуктуации функции распределения в берегах контакта [11]. Это подтверждается результатами работы [12], в которой кинетическое уравнение Больцмана использовалось для нахождения временной зависимости корреляторов флуктуаций электронной функции распределения и токов. Квазиклассическое описание движения электронов в системе, состоящей из двух идеальных токоподводящих контактов и области, где происходит рассеяние электронов на статических дефектах, приводит к спектральной плотности шума, аналогичной [5]. Вместо входящего в (1), (2) барьерного коэффициента отражения возникает вероятность прохождения электронов через рассеивающую область как функция координаты и импульса, определяющих классическую траекторию.

Таким образом, подавление дробового шума связано с вырожденностью электронной системы и с фазовой когерентностью движения электронов через контакт, т.е. с отсутствием случайного сбоя фазы волновой функции из-за неупругих взаимодействий. В классическом пределе малых чисел заполнения или при малой вероятности прохождения для всех начальных состояний мы возвращаемся к формуле Шоттки для дробового шума.

Дальнейший интерес к неравновесным флуктуациям тока в нормальных микроконтактах в значительной мере стимулировался изучением мезоскопических многоконтактных проводящих структур [13,14] и размерного квантования проводимости в двумерных полупроводниковых микроконтактах [15,16]. В этих системах важную роль играет квантование поперечного движения электронов в идеальных токоподводящих контактах. Задача определения матрицы кондактансов при рассмотрении линейного отклика на приложенное электрическое поле решается в духе подхода Ландауэра [17,18] путем нахождения соотношений между кинетическими характеристиками системы и компонентами матрицы рассеяния $\hat{t}$, связывающей начальные и конечные квантовые состояния (каналы) в различных контактах. Для многоканальной задачи обобщение формулы Ландауэра [18] для кондактанса на случай двухконтактной системы имеет вид [19]

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\mathrm{Sp}\,\hat{t}\,\hat{t}^{+} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_n T_n \ , \quad (3)$$

где T_n — собственные значения эрмитовой матрицы $\hat{t}\,\hat{t}^{+}$. Неравновесный шум тока в двумерных квантовых микроконтактах был рассмотрен Лесовиком [20], дальнейшее обобщение его результата для спектральной плотности [21] можно записать в виде

$$S_I(V) = 2e|V|\frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\mathrm{Sp}\,\hat{t}\,\hat{t}^{+}(1-\hat{t}\,\hat{t}^{+}) =$$

$$= 2e|V|\frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_n T_n(1-T_n) \ . \quad (4)$$

Очевидна связь между выражениями (3), (4) и квазиклассическими формулами (1), (2). Результат, аналогичный (1) и (4), для дробового шума был также получен в одномерной (одноканальной) модели туннельной нормальной системы [9].

Переход в сверхпроводящее состояние сопровождается дополнительным вкладом в неравновесные флуктуации тока [5]. В *ScN*-контактах этот избыточный шум непосредственно связан с андреевским отражением квазичастиц на границе нормальной и сверхпроводящей областей.

При нулевой температуре и отсутствии отражения одночастичных возбуждений на границе андреевское отражение является единственным источником флуктуаций тока. Аналогия с ролью обычного отражения в генерации шума проявляется в том, что спектральная плотность флуктуаций на нулевой частоте пропорциональна интегралу по энергии от $A(E)[1 - A(E)]$, $A(E)$ — вероятность андреевского отражения для электрона с энергией E (относительно уровня Ферми сверхпроводника), падающего на *SN*-границу из нормального металла. Интегрирование проводится по интервалу между уровнями Ферми электронов, следовательно, для идеального *ScN*-контакта шум тока при нулевой температуре исчезает при $eV < \Delta$, а затем растет, выходя на некоторый уровень насыщения ($S \sim \Delta/R_N$). Этот избыточный шум возникает за счет энергий, отвечающих надщелевому андреевскому отражению, при которых также возможен одночастичный процесс перехода нормального электрона в квазичастицу в сверхпроводнике. Сосуществование в данной области двух каналов переноса заряда — одночастичного и андреевского (элементарный переносимый заряд e и $2e$ соответственно) — приводят к избыточному токовому шуму. При произвольной прозрачности границы неравновесный шум тока, связанный с одночастичным и парным туннелированием, имеет нелинейную зависимость низкочастотной спектральной плотности от напряжения [5].

В следующих разделах мы рассмотрим задачу рассеяния для уравнения Боголюбова—де Жена и найдем выражение для коррелятора ток — ток че-

рез амплитуды процессов рассеяния и отражения, возможных в туннельной SN-системе. Основное внимание при рассмотрении будет уделено случаю, когда эти амплитуды имеют резкую зависимость от энергии, связанную с резонансным туннелированием [22].

2. Задача рассеяния для уравнений Боголюбова—Де Жена

При выводе граничных условий [7], связывающих предельные значения квазиклассических функций Грина по обе стороны тонкого барьерного слоя, внутри которого квазиклассическое приближение нарушается, в уравнениях движения отбрасываются все слагаемые, за исключением кинетической энергии электрона и потенциала барьера.Связь между решениями для гриновских функций в разных областях пространства в непосредственной близости от барьера выражается через параметры задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Поскольку при этом не учитываются недиагональные по электрон-дырочным индексам компоненты в уравнениях движения, различие амплитуд рассеяния электронных и дырочных возбуждений также теряется. Окончательное граничное условие содержит единственный параметр — коэффициент отражения электронов на уровне Ферми. Данное приближение неприменимо, если в узком энергетическом интервале соотношение между электронной и дырочной составляющими волновой функции сильно меняется. Это возможно, например, если внутри барьера имеется локализованное электронное состояние, отстоящее по энергии от уровня Ферми сверхпроводящего электрода на величину порядка энергетической щели Δ.

В рассмотренной ранее задаче о резонансном туннелировании в SN-системе [22] из уравнений Боголюбова—Де Жена были найдены вероятности андреевского и обычного отражений для электрона, налетающего на барьер из N-области, а также вероятности (при энергии возбуждения $E > \Delta$) перехода нормального электрона в квазичастицу в сверхпроводнике, принадлежащую электроноподобной или дырочноподобной ветвям спектра. Ток через барьер можно выразить через эти вероятности [23], используя требование непрерывности тока и условие нормировки суммарной плотности вероятности для всех рассматриваемых процессов. При нахождении коррелятора ток — ток и спектральной плотности токового шума будем использовать близкий, но несколько иной метод вычисления динамических характеристик системы.

Рассмотрим выражение для оператора плотности тока в представлении вторичного квантования

$$\hat{j} = \frac{e\hbar}{2im}\left(\hat{\Psi}^{+}\frac{d\hat{\Psi}}{dx} - \frac{d\hat{\Psi}^{+}}{dx}\hat{\Psi}\right), \qquad (5)$$

$\hat{\Psi} = \Sigma_\nu \Psi_\nu \hat{a}_\nu$ — двухкомпонентная (спинорная) волновая функция, разложенная по полному ортонормированному набору состояний рассеяния; $\hat{a}_\nu$ — операторы уничтожения состояний рассеяния боголюбовских квазичастиц. Индекс ν определяет полный набор квантовых чисел, необходимых для описания этих состояний: частицеподобную e или дырочноподобную h ветвь возбуждений; энергию стационарного состояния $E > 0$; направление импульса налетающей на барьер квазичастицы и квантовое число, характеризующее поперечное движение. Для системы с трансляционной инвариантностью в плоскости барьера в качестве поперечного квантового числа выбирается составляющая импульса в плоскости барьера.

Направим ось x перпендикулярно барьеру, который занимает область $L < x < R$. Нормальный металл занимает полупространство $x < L$, сверхпроводник — $x > R$. В силу непрерывности тока электронов (но не боголюбовских квазичастиц), его можно вычислять в любой точке, удобнее всего это делать на левом краю барьера при $x = L$, беря соответствующий предел из нормальной области.

Разложение исходной спинорной функции $\hat{\Psi}$ в представлении вторичного квантования по операторам состояний рассеяния боголюбовских квазичастиц оправданно при вычислении тока в NS-системе. Это связано с тем, что в нормальной области ток может быть выражен как через исходные электронные операторы, так и через операторы квазичастиц, поскольку в N-области отсутствует ток, переносимый сверхпроводящим конденсатом. При этом, как будет видно ниже, корректно учитывается вклад андреевского отражения в перенос заряда [23].

Далее рассматривается одномерная модель туннельной NS-структуры, обобщение ее на трехмерный случай легко проводится путем включения в конечный ответ интегрирования по поперечному импульсу, который входит в амплитуды рассеяния, содержащиеся в выражении для коррелятора ток — ток. Для вычисления оператора тока по формуле (5) определим состояния рассеяния. Исходим из уравнений Боголюбова—Де Жена (БДЖ), которым подчиняются спиноры Ψ_ν:

$$\begin{pmatrix} H(x) & \Delta \\ \Delta^{*} & -H(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Здесь

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - \mu(x) \qquad (7)$$

— одночастичный гамильтониан, в котором $V(x)$ — потенциал барьера с учетом приложенного электрического поля и контактной разности потенциалов:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < L, \\ V_B(x), & L < x < R, \\ V_1, & x > R. \end{cases} \qquad (8)$$

Электрохимический потенциал $\mu(x)$ имеет скачок, равный разности потенциалов V, связанной с протеканием тока. Энергия E отсчитывается от уровня Ферми в сверхпроводящем электроде. Потенциал спаривания выберем в виде $\Delta(x) = \theta(x - R)\Delta$, пренебрегая при этом возможными эффектами близости на NS-границе. Эффективная масса квазичастиц везде считается равной массе свободного электрона.

Система (6) имеет четыре линейно независимых решения, в качестве которых могут быть выбраны состояния рассеяния. Граничные условия задаются нормировкой падающих волн на единичную плотность вероятности, а рассеянные волны должны асимптотически исчезать на бесконечности при бесконечно малом сдвиге энергии в верхнюю комплексную полуплоскость, т.е. при энергиях $E + i0$. Для волновых функций состояний рассеяния вне барьера запишем следующие выражения с $\nu = 1$:

$$\Psi^e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1^+(x-L)} + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1^+(x-L)} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1^-(x-L)} \qquad (9.а)$$

при $x < L$,

$$\Psi^e_+ = c_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{ik_2^+(x-R)} + d_1 \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} e^{-ik_2^-(x-R)} \qquad (9.б)$$

при $x > R$.

Решение с $\nu = 2$ связано с (9) преобразованием вида

$$\Psi^h_+[x, E, \alpha_2(E)] = [\Psi^e_+(x, -E, \alpha_1(-E))]^* . \qquad (10)$$

Решения с $\nu = 3, 4$ соответствуют волнам, падающим на барьер справа:

$$\Psi^e_- = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1^+(x-L)} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1^-(x-L)} \qquad (11.а)$$

при $x < L$,

$$\Psi^e_- = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{-ik_2^+(x-R)} + b_3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{ik_2^+(x-R)} + a_3 \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} e^{-ik_2^-(x-R)} \qquad (11.б)$$

при $x > R$,

$$\Psi^h_-(x, E, \alpha_4(E)) = [\Psi^e_-(x, -E, \alpha_3(-E))]^* . \qquad (12)$$

Волновые векторы в этих выражениях равны

$$k_1^\pm = [2m/\hbar^2(\mu - V \pm E)]^{1/2},$$

$$k_2^\pm = [2m/\hbar^2(\mu - V_1 \pm \Omega)]^{1/2},$$

где $\Omega = \sqrt{E^2 - \Delta^2}$. Коэффициенты $u^2 = 1/2\,[1 + \Omega/E]$, $v^2 = 1 - u^2$ в решениях (11), (12) вещественны и определены только при $E > \Delta$.

Конкретный вид амплитуд рассеяния, набор которых обозначим через $\alpha_\nu = \{a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu\}$, для ряда простых моделей потенциала барьера был рассмотрен ранее [22,24]. Ниже мы получим общую формулу для тока и коррелятора ток — ток для барьера произвольной формы.

Волновая функция в представлении вторичного квантования может быть записана в виде

$$\hat{\Psi} = \sum_{\nu=1}^{4} \hat{\Psi}_\nu ,$$

$$\hat{\Psi}_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk_\nu \, \Psi(k_\nu(E), x) \hat{a}_\nu(k_\nu(E)) e^{-iE(k_\nu)t/\hbar} , \qquad (13)$$

где $E > 0$, $k_\nu = \{k_1^+, k_1^-, k_2^+, k_2^-\}$.

Операторы $\hat{a}_\nu^+$, $\hat{a}_\nu$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{\hat{a}_\nu(k_\nu), \hat{a}_\mu^+(k_\mu)\} = \delta_{\nu\mu}\,\delta(k_\nu - k_\mu) , \qquad (14.а)$$

$$\{\hat{a}_\nu , \hat{a}_\mu\} = \{\hat{a}_\nu^+ , \hat{a}_\mu^+\} = 0 . \qquad (14.б)$$

В дальнейшем удобно перейти от k-представления к интегрированию по E, что приведет к дополнительному множителю, пропорциональному сверхпроводящей плотности состояний при интегрировании по $k_{3,4}$.

Считая, что энергии Ферми $\varepsilon_{F_{1,2}} \gg E, \Delta, V, \omega$, в решениях (9)–(12) можно положить

$$k_{1,2}^\pm \simeq k_{F_{1,2}} . \qquad (15)$$

Между коэффициентами, определяющими состояния рассеяния (9)–(12), существуют соотношения, которые вытекают из уравнений БДЖ. В нормальной системе подобные соотношения выражают требование унитарности S-матрицы и ее инвариантность относительно обращения времени (предполагается, что магнитное поле равно нулю и нет рассеивающих центров с отличным от нуля магнитным моментом). Для одномерной задачи в NS-системе также можно было бы построить S-матрицу аналогично тому, как это делалось в

[24,25]. В данном случае удобнее находить соотношения между коэффициентами α_ν непосредственно из уравнений БДЖ, используя независимость от координаты x следующих величин:

$$\Psi_\nu^+ \hat{D}\hat{\tau}_3\Psi_\mu \ , \ \Psi_\nu^T \hat{D}\hat{\tau}_3\Psi_\mu \text{ и } \Psi_\nu^+ \hat{D}\Psi_\mu \ , \quad (16)$$

где Ψ_ν^T — транспонированный спинор, $\hat{\tau}_3$ — матрица Паули, а оператор $\hat{D}$ действует по правилу

$$f\hat{D}g = f\frac{dg}{dx} - g\frac{df}{dx} \ .$$

Раскрывая инварианты (16) и используя (9)–(12), можно выразить все величины α_ν через амплитуды, входящие в решение $\Psi_1 = \Psi_+^e(E)$, которые далее обозначим через $\alpha = \{a, b, c, d\}$ — амплитуды прохождения и отражения для нормального электрона, налетающего на барьер слева направо, со стороны N-электрода.

3. Вычисление коррелятора ток — ток для NS-структуры

Используя найденные в предыдущем разделе состояния рассеяния (9)–(12), можно записать оператор плотности тока (5) в следующем виде:

$$\hat{j} = \frac{e}{2\pi} \times$$

$$\times \sum_{\nu\mu}\int dk_\nu \int dk_\mu \, A_{\nu\mu}(k_\nu, k_\mu) e^{i(E_\nu - E_\mu)t/\hbar} \hat{a}_\nu^+(k_\nu)\hat{a}_\mu(k_\mu), \quad (17)$$

где

$$A_{\nu\mu} = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi_\nu^+ \frac{d\Psi_\mu}{dx} - \frac{d\Psi_\nu^+}{dx}\Psi_\mu\right)$$

— токовая матрица, которая строится по состояниям рассеяния; в силу эрмитовости оператора тока она также является эрмитовой: $A_{\nu\mu}^+ = A_{\mu\nu}$.

При вычислении средних от произведений операторов плотности тока в различные моменты времени возникнут средние от произведений квазичастичных операторов $\hat{a}_\nu$, $\hat{a}_\mu^+$, которые с помощью теоремы Вика можно выразить через равновесные функции распределения. Считая, что напряжение приложено к левому электроду и полностью падает на барьере, получаем

$$\langle \hat{a}_\nu^+(k_\nu)\hat{a}_\mu(k_\mu)\rangle = \delta_{\nu\mu}\,\delta(k_\nu - k_\mu)\rho(k_\nu) \ , \quad (18.а)$$

$$\langle \hat{a}_\nu^+ \hat{a}_\mu \hat{a}_\gamma^+ \hat{a}_\lambda \rangle =$$

$$= \{\delta_{\nu\mu}\,\delta_{\gamma\lambda}\,\delta(k_\nu - k_\mu)\delta(k_\gamma - k_\lambda)\rho_\nu(k_\nu)\rho_\gamma(k_\gamma) +$$

$$+ \delta_{\nu\lambda}\,\delta_{\mu\gamma}\,\delta(k_\nu - k_\lambda)\delta(k_\mu - k_\gamma)\rho_\nu(k_\nu)[1 - \rho_\mu(k_\mu)]\} \ . \quad (18.б)$$

При этом после перехода от k- к E-представлению функции распределения $\rho_\nu(k_\nu)$ сводятся к

$$\rho_\nu(k_\nu) = \rho_\nu(E(k_\nu)) = \left[1 + \exp\frac{E_\nu}{k_B T}\right]^{-1} \ , \quad (19)$$

где

$$E_\nu = \begin{cases} E - eV, & \nu = 1 \ , \\ E + eV, & \nu = 2 \ , \\ E, & \nu = 3, 4 \ . \end{cases}$$

Отличие аргументов для функций распределения электроноподобных и дырочноподобных возбуждений связано с тем, что $\rho_1(k_1^+) = f(E - eV)$, а $\rho_2(k_1^-) = 1 - f(-E - eV) = f(E + eV)$.

Используя (17)–(19), получаем выражение для средней плотности тока и фурье-образа коррелятора ток — ток в низкочастотном пределе:

$$j = \langle \hat{j} \rangle = \frac{e}{2\pi}\sum_\nu \int_0^\infty dE\, N_\nu(E) A_{\nu\nu}\rho_\nu(E) \ , \quad (20)$$

$$K(\omega = 0) = \frac{e^2}{2\pi} \times$$

$$\times \sum_{\nu\mu}\int_0^\infty \frac{m^2 dE}{\hbar^2 k_\nu k_\mu} N_\nu(E)N_\mu(E)A_{\nu\mu}A_{\mu\nu}[1 - \rho_\nu(E)]\rho_\mu(E) \ , \quad (21)$$

где

$$N_\nu(E) = \begin{cases} 1 \ , & \text{если } \nu = 1, 2 \ , \\ \dfrac{E\theta(E - \Delta)}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} = (u^2 - v^2)^{-1} \ , & \text{если } \nu = 3, 4 \ . \end{cases}$$

При получении (21) предполагается, что полоса частот, в которой измеряются флуктуации, лежит значительно ниже всех характерных частот, т.е. $\omega << \varepsilon_{F_{1,2}}, T, \Delta, V$.

Спектральная плотность флуктуаций связана с фурье-образом коррелятора токов ($S_I = 2$ К). Подставляя в (20) и (21) явный вид $A_{\nu\mu}$, после преобразований с использованием соотношений между амплитудными коэффициентами получаем

$$j = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,[1 + A(E) - B(E)][f(E - eV) - f(E)]\,, \tag{22}$$

$$S_I(V, T, \omega = 0) = \frac{2e^2}{\pi\hbar}\left\{\int_0^{\Delta} dE\left[A^2\left(\mathrm{ch}^{-2}\frac{E_-}{2T} + \mathrm{ch}^{-2}\frac{E_+}{2T}\right) + 2AB\left(1 - \mathrm{th}\frac{E_-}{2T}\,\mathrm{th}\frac{E_+}{2T}\right)\right] + \right.$$

$$+\int_{\Delta}^{\infty} dE\left\{\frac{(1+A-B_+)^2}{2\,\mathrm{ch}^2(E_-/2T)} + \frac{(1+A-B_-)^2}{2\,\mathrm{ch}^2(E_+/2T)} + \frac{(C_+ - D_-)^2 + (C_- - D_+)^2]}{2\,\mathrm{ch}^2(E/2T)} + A|b_- - b_+|^2\left(1 - \mathrm{th}\frac{E_-}{2T}\,\mathrm{th}\frac{E_+}{2T}\right) + \right.$$

$$+\frac{|c_+^* d_+ - c_-^* d_-|^2}{\tilde{N}_s^2\,\mathrm{ch}^2(E/2T)} + \left[(|a^* d_-^* - b_+^* c_+|^2 + |a^* c_-^* - b_+^* d_+|^2)\left(1 - \mathrm{th}\frac{E_-}{2T}\,\mathrm{th}\frac{E}{2T}\right) + \right.$$

$$\left.\left.\left.+ (|a^* c_+ - b_-\, d_-^*|^2 + |a^* d_+ - b_-\, c_-^*|^2)\left(1 - \mathrm{th}\frac{E_+}{2T}\,\mathrm{th}\frac{E}{2T}\right)\right]\tilde{N}_s^{-1}\right\}\right\}, \tag{23}$$

где $\tilde{N}_s = k_1/k_2(u^2 - v^2)^{-1}$ — нормированная плотность состояний в S-электроде; $E_\pm = E \pm eV$; амплитуды рассеяния с индексом «+» совпадают с рассмотренным выше набором $\alpha(E)$, а $\alpha_-(E) = \alpha_+(-E)$. В (22), (23) входят вероятности рассеяния

$$A(E) = |a|^2\,, \quad B(E) = |b|^2\,,$$

$$C(E) = |c|^2\tilde{N}_s^{-1}\theta(|E| - \Delta)\,, \tag{24}$$

$$D(E) = |d|^2\tilde{N}_s^{-1}\theta(|E| - \Delta)\,,$$

для которых выполняется условие сохранения вероятности: $A + B + C + D = 1$.

Обсудим некоторые свойства выражений (22), (23). Формула для тока совпадает с результатами, полученными ранее другими методами (кинетический расчет баланса заряда в модели [23], самосогласованный расчет на основе функций Грина в методе псевдотуннельного гамильтониана [26], расчет с помощью квазиклассических функций Грина [7]). В равновесном случае ($V = 0$) спектральная плотность токового шума удовлетворяет ФДТ:

$$S(V = 0, T) = 4T\frac{dI}{dV}\,. \tag{25}$$

В нормальном пределе для NN-системы из (23) следует приведенное выше выражение (1).

Для случая $\alpha_+ = \alpha_-$, т.е. слабой зависимости амплитуд рассеяния от энергии, формула (23) приводит к результатам работы [5], в которой использовались квазиклассические функции Грина и граничное условие Зайцева [7]. Интенсивность флуктуаций при этом выражается только через вероятности квазичастичных процессов рассеяния на NS-границе, в которые входит величина коэффициента отражения электронов при прохождении через поверхностный потенциальный барьер.

4. Флуктуации тока при резонансном туннелировании

Если внутри барьерного слоя существуют локализованные электронные состояния, то амплитуды рассеяния сильно зависят от энергии, что связано с резонансным туннелированием. В нормальных туннельных структурах коэффициент прозрачности имеет вблизи резонанса лоренцевскую зависимость от энергии (формула Брейта—Вигнера); ширина резонансной линии определяется суммарной вероятностью распада квазистационарного состояния за счет ухода электрона в правый и левый электроды. Задача о резонансном туннелировании в NS-контакте рассматривалась в [22], где были найдены амплитуды прохождения и отражения при туннелировании через один центр локализации.

В нормальном туннельном контакте спектральная плотность флуктуаций тока выражается через резонансный коэффициент прохождения. Для NS-структуры выражение для S_I усложняется, что обусловлено существованием андреевских процессов и переходом квазичастиц с одной ветви спектра

возбуждений на другую ($e \gtrless h$-переходы). В общем случае спектральная плотность токового шума выражается через амплитуды рассеяния и возникают интерференционные слагаемые.

В (23) можно выделить часть, отвечающую вкладу в шум тока возбуждений с энергиями меньше ширины щели, которая определяется лишь вероятностью андреевского отражения $A(E)$:

$$S_I(V) = \frac{2e^2}{\pi\hbar} \times$$

$$\times \int_0^{\Delta} dE \left\{ A^2(E) \left[\mathrm{ch}^{-2} \frac{E_+}{2T} + \mathrm{ch}^{-2} \frac{E_-}{2T} \right] + \right.$$

$$\left. + 2A(E)(1 - A(E)) \left[\mathrm{th} \frac{E_+}{2T} - \mathrm{th} \frac{E_-}{2T} \right] \mathrm{cth} \frac{eV}{T} \right\}. \quad (26)$$

При выводе данной формулы учитывается четность функции $A(E)$, которая сохраняется и при наличии резонансных уровней с произвольной энергией относительно середины сверхпроводящей щели [22]. Это выражение представляет собой основной вклад в спектральную плотность шума при температурах $T << \Delta$ и напряжении $eV < \Delta$. Вклад в шум возбуждений с энергиями больше Δ при этом экспоненциально мал.

Вероятность парного туннелирования, индуцированного андреевским отражением, может быть представлена в виде [22]

$$A(E) = 16u^2v^2(\Gamma_R \Gamma_L)^2 / W(E) , \quad (27)$$

где знаменатель $W(E)$ равен

$$W(E) = |u^2(E - E_r + i\Gamma_+)(E + E_r + i\Gamma_+) -$$

$$- v^2(E - E_r - i\Gamma_-)(E + E_r - i\Gamma_-)|^2 ,$$

$\Gamma_\pm = \Gamma_R \pm \Gamma_L$, $\Gamma_{R,L}$ — энергетические ширины квазилокального уровня, обусловленные переходами в правый, сверхпроводящий, электрод, и в левый, нормальный; E_r — энергия резонансного уровня, отсчитываемая от середины сверхпроводящей щели. Коэффициенты u и v определяются соотношениями

$$\begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{|E|} \right) , \text{ при } |E| > \Delta ,$$

$$\begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(1 \pm i \frac{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{E} \right) , \text{ при } |E| < \Delta .$$

Физический смысл слагаемых, входящих в формулу для токового шума, наиболее наглядно проявляется в пределе $T = 0$, когда тепловой шум отсутствует. Из формулы (26) при $T = 0$ получаем

$$S_I^<(V) = \frac{8e^2}{\pi\hbar} \int_0^{|eV|} dE\, \theta(\Delta - E) A(E)(1 - A(E)) . \quad (28)$$

Вклад в спектральную мощность шума возбуждений с энергиями больше ширины щели можно представить в достаточно простой форме лишь в случае нерезонансного туннелирования:

$$S_I^>(V) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int_0^{|eV|} dE\, \theta(E - \Delta) \times$$

$$\times [A(E)(1 - A(E)) + B(E)(1 - B(E)) + 2A(E)B(E)]. \quad (29)$$

При отсутствии локализованных состояний в барьере эти выражения совпадают с результатами, полученными из расчета коррелятора ток — ток с помощью квазиклассических уравнений для функций Грина [5]. В области энергий меньших ширины щели неравновесный шум полностью определяется вероятностью андреевского отражения, по аналогии с формулой (1) для обычного отражения, но с учетом энергетической зависимости $A(E)$. В надщелевой области, наряду с суммой вкладов андреевского и обычного отражений, имеется составляющая шума, связанная с интерференцией этих двух механизмов отражения.

Влияние сверхпроводимости в одном из электродов наиболее ярко проявляется при малых напряжениях на контакте и низких температурах ($eV, T << \Delta$). При этом транспортные и флуктуационные свойства системы определяются исключительно вероятностью андреевского отражения, индуцирующего туннелирование пар в сверхпроводник.

Рассмотрим NS-контакт с потенциальным барьером, содержащим одно локализованное состояние. Предположим, что резонансный уровень находится достаточно близко к уровню Ферми в сверхпроводнике и выполняется условие $|E_r|, \Gamma_{R,L} << \Delta$.

При вычислении спектральной плотности токового шума при напряжениях $|eV| << \Delta$ существенны величины энергии, намного меньшие ширины щели, для которых выражение (27) упрощается:

$$A(E) = \frac{4(\Gamma_R \Gamma_L)^2}{(E^2 - E_1^2)^2 + 4E^2\Gamma_L^2} , \quad (30)$$

где $E_1^2 = E_r^2 + \Gamma_R^2 + \Gamma_L^2$.

Приложенное к нормальному электроду напряжение V вызывает смещение энергии резонансного

уровня относительно равновесного значения, что в линейном приближении можно представить как

$$E_r(V) = E_r^0 + \gamma eV \ , \qquad (31)$$

где E_r^0 — энергия резонансного уровня при нулевом смещении; $\gamma = x_i / d$, x_i — расстояние от центра локализации до сверхпроводящего электрода. Для вычисления тока и спектральной плотности его шума при $T = 0$ воспользуемся формулами (22) и (28), справедливыми и в случае резонансного туннелирования. При этом в подщелевой области должно выполняться тождество $A + B = 1$, которое остается справедливым в рамках исходного предположения о характере параметров резонансного туннелирования в нашем случае. При расчете оказывается, что пики функции $A(E)$ индуцируют ступенчатые скачки в поведении тока. Причем для напряжений, больших пороговых, при которых происходят эти скачки, возможна ситуация с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Для случая, когда

$$A(E) = \left(\frac{\Gamma_R \Gamma_L}{E_1}\right)^2 \frac{1}{(|E| - E_1)^2 + \Gamma_L^2} \ ,$$

скачки полного тока происходят при

$$eV_{\pm} = \sqrt{E_r^2(\pm V_{\pm}) + \Gamma_R^2}$$

и для $\Gamma_L << (\Gamma_R^2 + E_R^2)^{1/2}$ равны

$$\Delta I_{\pm} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\Gamma_R^2 \Gamma_L}{E_1^2(V)} \ ,$$

так что при достаточно больших V ток может падать, если γ отлично от нуля. Форма ВАХ системы зависит от величины γ и от соотношения между параметрами E_r, Γ_R, Γ_L, V. Что касается вида $S_I(V)$, то здесь также возможны различные ситуации. Так, для $A(E)$ в форме сильно разнесенных лоренцевских пиков (случай $\Gamma_L << E_1(V)$) при напряжениях выше токовой ступеньки имеем

$$\frac{S_I(V)}{2e|I(V)|} = 2\left(1 - \frac{\Gamma_R^2}{2(E_r^2(V) + \Gamma_R^2)}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2} A_{\max}\right). \qquad (32)$$

Из формулы (32), в частности, видно, что для случая малой прозрачности, когда $A_{\max} \to 0$, выполняется

$$\frac{S_I}{2e|I|} = 2$$

и происходит удвоение дробового шума. Как было указано в работе [27], вызвано это по-прежнему эффектами двухчастичного туннелирования куперовской пары с общим удвоенным зарядом электрона. Отметим также, что в предельном случае, идеальной прозрачности $A_{\max} = 1$ не происходит подавления шума ниже его классического значения. Для случая $E_r = 0$, $\Gamma_R = \Gamma_L = \Gamma$, когда $A(E)$ имеет обычный лоренцевский вид, результат дробового шума, вызванного переносом куперовской парой заряда $2e$ через барьер, получается такой же, как и для нормального туннелирования:

$$\frac{S_I}{2e|I|} = 1/2 \ . \qquad (33)$$

В общем случае произвольных $\{E_r, \Gamma_R, \Gamma_L, V\} << \Delta$ выполняется соотношение

$$\frac{S_I(V)}{2e|I(V)|} = 2\left(1 - A(0)\frac{I_2(x, a)}{I_1(x, a)}\right) \ , \qquad (34)$$

где

$$I_p(x, a) = \int_0^x \frac{dy}{(y^4 - 2ay^2 + 1)^p} \ ,$$

$$p = 1, 2 \ ; \quad x = \frac{|eV|}{E_1} \ ;$$

$$a = \frac{E_1^2 - 2\Gamma_L^2}{E_1^2} \ ; \quad y = \frac{E}{E_1} \ .$$

Предельные случаи больших и малых V, вытекающие из (33), имеют вид

$$\frac{S_I(V)}{2e|I|} = 2\left[1 - \frac{\Gamma_R^2(E_r^2 + \Gamma_R^2 + \Gamma_L^2)}{2(E_r^2 + \Gamma_R^2 + \Gamma_L^2)^2}\right] \qquad (35.а)$$

для V, значительно превышающих напряжения, при которых происходит скачок тока, и

$$\frac{S_I(V)}{2e|I|} = 2[1 - A(0)] \qquad (35.б)$$

для $V \to 0$.

Заключение

Предложенный в данной работе метод расчета флуктуационных свойств туннельных SN-структур позволяет найти спектральную плотность токового шума, используя амплитуды прохождения и отражения квазичастиц на границе сверхпроводника и нормального металла при наличии произвольного потенциального барьера. При этом

выражения для спектральной мощности флуктуационного тока в пределе низких частот имеют структуру, которая явно демонстрирует вклад обычного и андреевского отражений в неравновесный токовый шум, а также вклад, возникающий вследствие интерференции одночастичных и парных процессов переноса заряда через *SN*-границу. В пределе бесструктурного туннелирования полученные выражения совпадают с ранее известными результатами, основанными на применении техники неравновесных квазиклассических функций Грина. Для туннелирования через структурный барьер, содержащий локализованные состояния, формулы для тока и подщелевого вклада в спектральную плотность флуктуаций тока сохраняют свой вид. Формула для вклада в токовый шум за счет надщелевой области энергетического спектра при этом усложнится в связи с возможностью интерференционных процессов в системе. Практический же расчет токовых и флуктуационных характеристик для конкретной модели барьера, содержащего локализованные состояния, указывает на разнообразие динамических свойств такой системы (возможность существования отрицательного дифференциального сопротивления, удвоение дробового шума для андреевских процессов и т.д.).

Данная работа поддержана грантом № U2F000 Международного научного фонда.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1*, Москва, Наука (1976).
2. М. Букингем, *Шумы в электронных приборах и системах*, Мир, Москва (1986).
3. А. Ван дер Зил, *Шум (источники, описание, измерение)*, Сов. Радио, Москва (1973).
4. D. Rogovin and D. J. Scalapino, *Ann. Phys.* (N. Y.) **86**, 90 (1974).
5. В. А. Хлус, *ЖЭТФ* **93**, 2179 (1987).
6. Ю. В. Шарвин, *ЖЭТФ* **48**, 984 (1965).
7. А. В. Зайцев, *ЖЭТФ* **86**, 1742 (1984).
8. А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1982).
9. B. Yurke and G. P. Kochanski, *Phys. Rev.* **B41**, 8184 (1990).
10. А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **46**, 1823 (1964).
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1976).
12. C. W. J. Beenakker and H. van Houten, *Phys. Rev.* **B43**, 12066 (1991).
13. A. D. Stone and A. Szafer, *IBM J. Res. Develop.* **32**, 383 (1988).
14. M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2901 (1990).
15. B. J. van Wees, H. van Houten, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
16. D. A. Waram, T. J. Thornton, and R. Newbury, *J. Phys.* **C21**, L209 (1988).
17. R. Landauer, *IBM J. Res. Develop.* **1**, 223 (1957).
18. R. Landauer, *Phil. Mag.* **21**, 863 (1970).
19. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, *Phys. Rev.* **B22**, 3519 (1980).
20. Г. Б. Лесовик, *Письма в ЖЭТФ* **49**, 513 (1989).
21. C. W. J. Beenakker and M. Büttiker, *Phys. Rev.* **B46**, 1889 (1992).
22. V. A. Khlus, A. V. Dyomin, and A. L. Zazunov, *Physica* **C214**, 413 (1993).
23. G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, *Phys. Rev.* **B25**, 4515 (1982).
24. А. Л. Шеланков, *ФТТ* **26**, 1615 (1984).
25. C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev.* **B46**, 12841 (1992).
26. G. B. Arnold, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 143 (1985).
27. M. G. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) (in press).

Nonequilibrium fluctuations of current in superconductor-normal metal tunnel structures

S. V. Naydenov and V. A. Khlus

General expressions for the current and the spectral density of current fluctuations in the low frequency limit for the normal metal-superconductor contact with an arbitrary barrier in the presence of a constant external potential difference have been obtained in terms of the scattering problem formalism. It is demonstrated that the dynamic and fluctuation characteristics of the system can behave quite differently, as dictated by the tunnelling character (nonresonant in a structureless barrier; resonant in a barrier containing localized states). For a particular model of resonance tunneling, the expression is obtained for the current allowing for existence of negative differential resistance in a certain range of the scattering parameters as well as a formula for the noise of the current whose spectral density contains more contributions than nonresonance tunneling that are due to interference electron-hole process of scattering from a localized state.