УДК 517.36

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

А. А. Мартынюк, А. С. Хорошун

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail:center@inmech.kiev.ua

For nonlinear singularly perturbed uncertain systems, we construct a control yielding their absolute parametric stability. We give an estimate for the set of parameter values such that the above property is preserved.

Для нелінійних неточних сингулярно збурених систем побудовано керування, що забезпечує їх абсолютну параметричну стійкість. Оцінено множину значень параметрів, для яких вказана властивість системи зберігається.

Введение. Практически каждая реальная управляемая система содержит некоторые неопределенные параметры. Это может быть связано с неточностью измерительных приборов, неучетом некоторых факторов при моделировании процесса, который исследуется, либо с чем то еще. Если о значениях этих параметров ничего не известно, то практически невозможно сказать заранее, как поведет себя система при наличии сконструированного для нее управления. Возможно, что изменения параметров вызовут эффекты, разрушающие то свойство, которое введением в систему управления должно было гарантироваться. Наличие хотя бы минимальной информации о параметрах системы дает возможность учитывать ее при построении управления, что значительно улучшает качество управления.

Концепция параметрической устойчивости, введенная в [1] и затем развитая в работах [2 – 6], позволяет исследовать систему с учетом изменения входящих в нее параметров и определять границы этих изменений, при которых исследуемое свойство системы не нарушается. В работе [7] получены результаты по исследованию свойств устойчивости сингулярно возмущенной системы в случае, когда вид управления известен. Однако представляет интерес управление системой, содержащей неопределенные параметры. Конструированию такого управления, определению условий на саму систему, обеспечивающих желаемое ее свойство, а также оценке области изменения параметров, при которых заданное свойство системы будет сохраняться, посвящена данная работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неточную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f_1(x, y, p),$$

$$\mu\dot{y} = f_2(x, y, p),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$. Векторные функции $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по переменным x и y и непрерывно зависящими от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\mu \in (0, 1]$ — малый параметр.

Отметим, что состояние равновесия данной системы является подвижным. Подвижность состояния равновесия, т. е. изменение его координат x и y, вызвано изменением значений параметра. Это означает, что если для некоторого фиксированного значения параметра p найдено соответствующее состояние равновесия исследуемой системы, то при другом фиксированном значении параметра будем иметь, возможно, другое состояние равновесия, т. е. состояние равновесия сдвинется, поменяет свое местоположение.

Приведем определение абсолютной параметрической устойчивости неточной системы.

Определение 1. *Неточная система дифференциальных уравнений называется абсолютно параметрически устойчивой относительно области $P \subseteq \mathbb{R}^l$, если для всех $p \in P$ выполняются следующие условия:*

1) существует единственное состояние равновесия $x^e(p)$ рассматриваемой системы;

2) $x^e(p)$ глобально асимптотически устойчиво.

Введем в исходную систему управление таким образом, чтобы обеспечить абсолютную устойчивость подвижного состояния равновесия этой системы. Рассмотрим полученную систему

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x, y, p) + B_1(p)u, \\
\mu\dot{y} &= f_2(x, y, p) + B_2(p)u,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $B_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$ имеют элементы, непрерывно зависящие от векторного параметра p. Управление $u \in \mathbb{R}^k$ будем рассматривать в виде $u = K_1x + K_2y$, где $K_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{k\times m}$ — некоторые постоянные матрицы. Предположим, что для системы (1) справедлива теорема о существовании и единственности решения начальной задачи.

Использовав формулу конечных приращений Лагранжа для функций $f_1(x, y, p)$ и $f_2(x, y, p)$ в окрестности нулевых значений переменных x и y, систему (1) приведем к виду

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)x + A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\
\mu\dot{y} &= A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1x + K_2y),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) = \left.\frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}}, \quad A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) = \left.\frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}},
$$

$$
A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) = \left.\frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}}, \quad A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) = \left.\frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}},
$$

$C_1(p) = f_1(0, 0, p)$, $C_2(0, 0, p) = f_2(0, 0, p)$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$ — некоторые точки соответствующих пространств.

Относительно системы (2) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Пусть система уравнений (2) такова, что:*

1) существует значение параметра $p = p^*$ *такое, при котором существует состояние равновесия* $x = x^*$, $y = y^*$ *рассматриваемой системы;*

2) существуют такие положительные числа α, β, γ, $\delta < +\infty$, *что выполняются следующие оценки:*

$$\|A_{11}(x,y,p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\| \le \alpha, \quad \|A_{12}(x,y,p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| \le \beta,$$

$$\|A_{21}(x,y,p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\| \le \gamma, \quad \|A_{22}(x,y,p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\| \le \delta$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^l$;

3) матрицы $A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1$ *и* $A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2$ *устойчивы, а матрица*

$$A = A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2 - (A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\times$$
$$\times (A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)$$

невырождена.

Замечание 1. Отметим, что здесь и далее используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

Отметим, что система, сходная с системой (2), рассматривалась в работе [8], где был установлен вид управления u, которое обеспечивает практическую устойчивость исходной системы при всех значениях параметров из некоторой ограниченной наперед заданной области. В данной работе синтезировано в явном виде управление u, которое при выполнении некоторых условий на функции $f_1(x,y,p)$, $f_2(x,y,p)$ обеспечивает абсолютную параметрическую устойчивость подвижного состояния равновесия сингулярно возмущенной системы (1) относительно некоторой области в пространстве параметров $\mathbb{R}^l$. Указанная область также будет определена исходя лишь из общего вида системы (1).

2. Анализ существования состояния равновесия исследуемой системы. Состояние равновесия системы (2), суть состояние равновесия системы (1), если оно существует, является решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\ 0 &= A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1x + K_2y). \end{aligned} \tag{3}$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_1)x + (A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_2)y + C_1(p), \\ 0 &= (A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) + B_2(p)K_1)x + (A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) + B_2(p)K_2)y + C_2(p). \end{aligned} \tag{4}$$

Если квадратная матрица $A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1$ размерности $n \times n$ невырождена при некоторых значениях $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и p, то из первого уравнения системы (4) можем выразить переменную x в виде

$$x = -\Big(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1\Big)^{-1}\Big((A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)y + C_1(p)\Big). \tag{5}$$

Определим область $P_1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq a\} \subseteq \mathbb{R}^l$, где $a \in \mathbb{R}_+$, и ограничения на матрицу $A_{11}(x, y, p)$, суть на производную функции $f_1(x, y, p)$, при которых матрица $A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1$ невырождена.

Представим эту матрицу с учетом невырожденности матрицы $A_{11}(x^*, y^*, p^*)+B_1(p^*)K_1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1 &= A_{11}(x^*, y^*, p^*) + (A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - \\ &- A_{11}(x^*, y^*, p^*)) + (B_1(p) - B_1(p^*))K_1 + B_1(p^*)K_1 = \\ &= (A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)(I^{n\times n} + (A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1} \times \\ &\times [(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*) + (B_1(p) - B_1(p^*))K_1]),\end{aligned}$$

где $I^{n\times n}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Поскольку матрица $A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1$ невырождена, невырожденность исходной матрицы эквивалентна невырожденности матрицы

$$I^{n\times n} + (A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\left[(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*) + (B_1(p) - B_1(p^*))K_1\right],$$

что будет иметь место, если выполняется соотношение

$$\Big\|(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\left[(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*) + (B_1(p) - B_1(p^*))K_1\right]\Big\| < 1. \tag{6}$$

Учитывая оценку

$$\begin{aligned}&\Big\|(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\left[(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*) + (B_1(p) - B_1(p^*))K_1\right]\Big\| \leq \\ &\leq \Big\|(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\| \times \\ &\times \left(\|A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*)\| + \max_{p\in P_1}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|\right) \leq \\ &\leq \Big\|(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|(\alpha + \max_{p\in P_1}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|),\end{aligned}$$

убеждаемся, что если выполняется неравенство

$$\Big\|(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|(\alpha + \max_{p\in P_1}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|) < 1, \tag{7}$$

то выполняется неравенство (6), т. е. исследуемая матрица невырождена. Таким образом, с помощью соотношения (7) можно оценить область P_1 и величину α, при которых исходная матрица невырождена.

Подставляя соотношение (5) во второе уравнение системы (4), получаем уравнение для определения переменной y :

$$0 = (A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_2)y + C_2(p) - (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}\times$$
$$\times ((A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)y + C_1(p)),$$

или, преобразовав его,

$$\big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_2 - (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1) \times$$
$$\times(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)\big)\, y =$$
$$= (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}C_1(p) - C_2(p).$$

Существование решения этого уравнения при некоторых значениях $\tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, p эквивалентно невырожденности матрицы

$$A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_2-$$
$$- (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)$$

при этих значениях параметров. Определим область $P_2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b\}$ и ограничения на матрицы $A_{11}(x, y, p)$, $A_{12}(x, y, p)$, $A_{21}(x, y, p)$, $A_{22}(x, y, p)$, при которых данная матрица невырождена.

Перепишем эту матрицу в следующем виде:

$$A\Big(I^{m\times m} + A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)) + (B_2(p) - B_2(p^*))K_2+$$
$$+ (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)-$$
$$- (A_{21}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*, y^*, p^*)+$$
$$+ B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_2)\Big)\Big).$$

Поскольку матрица A невырождена согласно п. 3 предположения 1, невырожденность исследуемой матрицы следует из невырожденности матрицы

$$I^{m\times m} + A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)) + (B_2(p) - B_2(p^*))K_2+$$
$$+ (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)-$$
$$- (A_{21}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*, y^*, p^*)+$$
$$+ B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_2)\Big),$$

что будет иметь место, если выполняется соотношение

$$\Big\|A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_2+ \\ +(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+ \\ +B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)- \\ -(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+ \\ +B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\Big)\Big\|<1. \tag{8}$$

Оценим величину нормы в левой части неравенства (8). Рассмотрим разность

$$(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)- \\ -(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+ \\ +B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)= \\ =\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times \\ \times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times \\ \times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+ \\ +\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times \\ \times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times \\ \times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+ \\ +\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times \\ \times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times \\ \times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+ \\ +\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times \\ \times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\times\\
&\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times\\
&\times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+\\
&+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times\\
&\times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+\\
&+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\times\\
&\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times\\
&\times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Тогда, учитывая (9), можем оценить величину нормы в левой части неравенства (8):

$$
\begin{aligned}
&\Big\|A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_2+\\
&\quad+(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)-\\
&\quad-(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+\\
&\quad+B_1(p^*)K_1)^{-1}(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\Big)\Big\|\le\\
&\le\|A^{-1}\|\Big(\delta+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_2\|\Big)+\|A^{-1}\|\Big[\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\,\|K_1\|\Big)\times\\
&\quad\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times\\
&\quad\times\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\,\|K_1\|\Big)\times\\
&\quad\times\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+\\
&\quad+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\,\|K_1\|\Big)\times\\
&\quad\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times\\
&\quad\times\Big\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big\|+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times\\
&\quad\times\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\Big\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big\|+
\end{aligned}
$$

$$+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$
$$\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$
$$\times\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$
$$\times\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+$$
$$+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$
$$\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$
$$\times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)\Big]. \tag{10}$$

Оценим величину

$$\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|.$$

Пусть $A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1=(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)+E$. Тогда, согласно формуле 5.8.2 из [9],

$$\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|=$$
$$=\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1+E)^{-1}\Big\|\le$$
$$\le\frac{\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}((A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1)\|}{1-\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}((A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1)\|}\times$$
$$\times\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)\|\le$$
$$\le\frac{\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|^2(\alpha+\max\limits_{p\in P_2}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)}{1-\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha+\max\limits_{p\in P_2}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\,\|K_1\|)}=M(\alpha), \tag{11}$$

если

$$\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha+\max_{p\in P_2}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)<1. \tag{12}$$

Таким образом, из (8), (10) – (12) получим, что если выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
&\|A^{-1}\|(\delta + \max_{p\in P_2}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_2\|)+\\
&+\|A^{-1}\|\Bigg[\Big(\gamma + \max_{p\in P_2}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)M(\alpha)\Big(\beta + \max_{p\in P_2}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+\\
&+\Big(\gamma + \max_{p\in P_2}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times\\
&\times\Big(\beta + \max_{p\in P_2}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big) + \Big(\gamma + \max_{p\in P_2}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times\\
&\times M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\| + \Big(\gamma + \max_{p\in P_2}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times\\
&\times\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\|+\\
&+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\|M(\alpha)\Big(\beta + \max_{p\in P_2}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+\\
&+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\|\,\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times\\
&\times\Big(\beta + \max_{p\in P_2}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\,\|K_2\|\Big)+\\
&+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\|M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\| < 1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

и (12), то выполняется неравенство (8), т. е. исследуемая матрица невырождена. Таким образом, с помощью соотношений (12), (13) можно оценить область P_2 и величины α, β, γ и δ. Значит, оценив область $\Omega_p = P_1 \cap P_2$ и выбрав величины α, β, γ и δ так, чтобы выполнялись соотношения (7) и (13) (условие (12) совпадает с условием (7), поэтому оно опущено), получим, что для всех $p \in \Omega_p$ и функций $f_1(x,y,p)$, $f_2(x,y,p)$ таких, что выполняются оценки из п. 2 предположения 1, где α, β, γ и δ выбраны выше, существует единственное состояние равновесия системы (2), суть системы (1).

Замечание 2. Поскольку при $p = p^*$ и значениях $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ соотношения (7), (13) выполняются и функции, входящие в эти соотношения, предполагаются непрерывными по параметру p, то область Ω_p и величины $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ всегда могут быть определены.

3. Анализ параметрической устойчивости подвижного состояния равновесия. Пусть для системы (2) выполняются условия предположения 1. Введем обозначения. Пусть $((x^e(p))^T, (y^e(p))^T)^T$ — состояние равновесия системы (2), соответствующее некоторому значению параметра p, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметрические положительно определенные матрицы, $P_1^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметрические положительно определенные матрицы, являющиеся решениями алгебраических уравнений Ляпунова

$$(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^T P_1^* + P_1^*(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1) = -Q_1,$$

$$(A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2)^T P_2^* + P_2^*(A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2) = -Q_2$$

соответственно, согласно п. 3 предположения 1 матрицы P_1^* и P_2^* существуют.

Сформулируем и докажем теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости [6] нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия предположения 1 и функции* $f_1(x,y,p)$, $f_2(x,y,p)$, *входящие в систему (1), таковы, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$

$$\left\| \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_x - \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \alpha_1 <$$
$$< \min\left\{ \alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - 2\|P_1^*\|\|K_1\| \max\limits_{p\in\Omega_{p1}} \|B_1(p)-B_1(p^*)\|}{2\|P_1^*\|} \right\}, \qquad (14)$$

область $\Omega_{p1} = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p-p^*\| \le b_1\}$ *такова, что*

$$2\|P_1^*\|\|K_1\| \max_{p\in\Omega_{p1}} \|B_1(p)-B_1(p^*)\| < \lambda_{\min}(Q_1),$$

$$\left\| \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \beta,$$

$$\left\| \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \gamma,$$

$$\left\| \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \delta_1 <$$
$$< \min\left\{ \delta, \frac{\lambda_{\min}(Q_2) - 2\|P_2^*\|\|K_2\| \max\limits_{p\in\Omega_{p2}} \|B_2(p)-B_2(p^*)\|}{2\|P_2^*\|} \right\}, \qquad (15)$$

область $\Omega_{p2} = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p-p^*\| \le b_2\}$ *такова, что*

$$2\,\|P_2^*\|\|K_2\| \max_{p\in\Omega_{p2}} \|B_2(p)-B_2(p^*)\| < \lambda_{\min}(Q_2),$$

величины α, β, γ, δ *и область* Ω_p *определены из условий (7) и (13) и для всех* $p \in P \subseteq$ $\subseteq (\Omega_p \cap \Omega_{p1} \cap \Omega_{p2})$ *выполняется условие*

$$AC > BD, \qquad (16)$$

где

$$A = -\lambda_{\min}(Q_1) + 2\|P_1^*\|(\alpha_1 + \|K_1\|\|B_1(p)-B_1(p^*)\|),$$

$$B = 2\|P_1^*\|(\|A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2\| + \beta + \|K_2\|\|B_1(p) - B_1(p^*)\|),$$

$$C = -\lambda_{\min}(Q_2) + 2\|P_2^*\|(\delta_1 + \|K_2\|\|B_2(p) - B_2(p^*)\|),$$

$$D = 2\|P_2^*\|(\|A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1\| + \gamma + \|K_1\|\|B_2(p) - B_2(p^*)\|).$$

Тогда система (1) при управлении $u = K_1x+K_2y$ абсолютно параметрически устойчива относительно области P для всех $\mu \in (0,1]$.

Замечание. Теорему 1 можно сформулировать следующим образом. При выполнении условий теоремы 1 управление $u = K_1x + K_2y$, где K_1 и K_2 выбираются согласно п. 3 предположения 1, абсолютно параметрически стабилизирует систему (1).

Доказательство. Поскольку область $P \subseteq (\Omega_p \cap \Omega_{p1}\Omega_{p2})$ и величины α, β, γ, и δ удовлетворяют условиям (7) и (13), то, как показано в п. 2, для всех $p \in P$ существует единственное состояние равновесия системы (1). Покажем, что для всех значений параметра из указанной области соответствующее состояние равновесия будет глобально асимптотически устойчиво. Пусть p — произвольное значение параметра из области P и $((x^e(p))^T, (y^e(p))^T)^T$ — соответствующее ему состояние равновесия. Рассмотрим векторную функцию

$$V(x,y) = (v_1(x), v_2(y))^T, \tag{17}$$

где $v_1(x) = (x-x^e)^T P_1^*(x-x^e)$, $v_2(y) = (y-y^e)^T P_2^*(y-y^e)$, и оценим производные ее компонент вдоль решений системы (1):

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(1)} &= \dot{x}^T P_1^*(x-x^e) + (x-x^e)^T P_1^*\dot{x} = \\
&= \Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x+K_2y)\Big)^T P_1^*(x-x^e) + \\
&\quad + (x-x^e)^T P_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x+K_2y)\Big) = \\
&= (x-x^e)^T\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_1\Big)^T P_1^*(x-x^e) + \\
&\quad + (y-y^e)^T\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_2\Big)^T P_1^*(x-x^e) + \\
&\quad + (x-x^e)^T P_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_1\Big)(x-x^e) + \\
&\quad + (x-x^e)^T P_1^*\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1(p)K_2\Big)(y-y^e),
\end{aligned} \tag{18}$$

где учтено, что $A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x^e + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y^e + C_1(p) + B_1(p)(K_1x^e + K_2y^e) = 0$. Из (18) получим

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_1(x)}{dt}\bigg|_{(1)} = (x-x^e)^T\Big[\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^T P_1^* + \\
+P_1^*\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)\Big]\times \\
\times(x-x^e)+(x-x^e)^T\Big[\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_1^* + \\
+P_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)+ \\
+\Big((B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big)^T P_1^* + P_1^*(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big](x-x^e)+ \\
+(y-y^e)^T\Big[\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)^T P_1^* + \\
+\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_1^* + \\
+\Big((B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big)^T P_1^*\Big](x-x^e)+ \\
+(x-x^e)^T\Big[P_1^*\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+ \\
+P_1^*\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)+P_1^*(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big](y-y^e) \le \\
\le \Big[-\lambda_{\min}(Q_1)+2\|P_1^*\|\Big(\alpha_1+\|K_1\|\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big)\Big]\|x-x^e\|^2 + \\
+2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\|+\beta+ \\
+\|K_2\|\,\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big)\|x-x^e\|\|y-y^e\|. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Продолжим оценку (19) с учетом того, что $\lambda_{\min}(P_1^*)\|x-x^e\|^2 \le v_1(x) \le \lambda_{\max}(P_1^*)\|x-x^e\|^2$, $\lambda_{\min}(P_2^*)\|y-y^e\|^2 \le v_2(y) \le \lambda_{\max}(P_2^*)\|y-y^e\|^2$:

$$
\frac{dv_1(x)}{dt}\bigg|_{(1)} \le A\frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)} + B\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)}, \qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_2(y)}{dt}\bigg|_{(1)} = \dot{y}^T P_2^*(y-y^e)+(y-y^e)^T P_2^*\dot{y} = \\
= \frac{1}{\mu}\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1x+K_2y)\Big)^T P_2^*(y-y^e)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T P_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y+C_2(p)+B_2(p)(K_1x+K_2y)\Big)=$$

$$=\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_2\Big)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(x-x^e)^T\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1\Big)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T P_2^*\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_2\Big)(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T P_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1\Big)(x-x^e), \tag{21}$$

где учтено, что $A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x^e+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y^e+C_2(p)+B_2(p)(K_1x^e+K_2y^e)=0$. Из (21) получим

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\bigg|_{(1)}=\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T\Big[\Big(A_{22}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_2\Big)^T P_2^*+$$

$$+P_2^*\Big(A_{22}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_2\Big)\Big](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T\Bigg[\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2^*+$$

$$+P_2^*\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\Big((B_2(p)-B_2(p^*))K_2\Big)^T P_2^*+P_2^*(B_2(p)-B_2(p^*))K_2\Big](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(x-x^e)^T\Big[\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)^T P_2^*+$$

$$+\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2^*+\Big((B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big)^T P_2^*\Big](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T\Big[P_2^*\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)+$$

$$+P_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)+P_2^*(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big](x-x^e)\le$$

$$\le\frac{1}{\mu}\Big[-\lambda_{\min}(Q_2)+2\|P_2^*\|\Big(\delta_1+\|K_2\|\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big)\Big]\|y-y^e\|^2+$$

$$+\frac{2\|P_2^*\|}{\mu}\Big(\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\|+\gamma+$$

$$+\|K_1\|\,\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big)\|x-x^e\|\,\|y-y^e\|. \tag{22}$$

Продолжим оценку (22) с учетом того, что $\lambda_{\min}(P_1^*)\|x-x^e\|^2 \le v_1(x) \le \lambda_{\max}(P_1^*)\|x-x^e\|^2$, $\lambda_{\min}(P_2^*)\|y-y^e\|^2 \le v_2(y) \le \lambda_{\max}(P_2^*)\|y-y^e\|^2$:

$$\left.\frac{dv_2(y)}{dt}\right|_{(1)} \le \frac{1}{\mu}C\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)} + \frac{1}{\mu}D\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)}. \tag{23}$$

Таким образом, исходя из оценок (20), (23), для производной векторной функции $V(x,y)$ в силу системы (1) имеет место оценка относительно конуса $\mathbb{R}_+^2$:

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(1)} \le \begin{pmatrix} A\dfrac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)} + B\dfrac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\dfrac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)} \\ \\ \dfrac{1}{\mu}C\dfrac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)} + \dfrac{1}{\mu}D\dfrac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\dfrac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Воспользовавшись неравенством $-az^2 + bz \le -\dfrac{a}{2}z^2 + \dfrac{b^2}{2a}$, продолжим оценку (24):

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(1)} \le MV(x,y),$$

где

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{A}{\lambda_{\min}(P_1^*)} & \dfrac{B^2}{\lambda_{\min}(P_2^*)(-A)} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{D^2}{\lambda_{\min}(P_1^*)(-C)} & \dfrac{1}{\mu}\dfrac{C}{\lambda_{\min}(P_2^*)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Отметим, что поскольку выполняются условия (14) и (15), то $A < 0$ и $C < 0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{du}{dt} = Mu, \tag{26}$$

где матрица M задана в (20), а $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}_+^2$. Поскольку $A < 0$ и $C < 0$, внедиагональные элементы матрицы A положительны и функция $f(u) = Mu$ квазимонотонна относительно конуса $\mathbb{R}_+^2$, т. е. система (26) является системой сравнения для системы (1). При выполнении условия (16) матрица M устойчива, значит, состояние равновесия $u = 0$ глобально асимптотически устойчиво. Согласно принципу сравнения состояние равновесия $((x^e(p))^T, (y^e(p))^T)^T$ системы (1) также глобально асимптотически устойчиво. Так как p — произвольная точка области P, система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области.

Поскольку все изложенное више имеет место для всех $\mu \in (0,1]$, свойство абсолютной параметрической устойчивости также сохраняется для всех $\mu \in (0,1]$.

Теорема доказана.

4. Пример. В качестве примера применения предложенной выше методики рассмотрим стабилизацию неточной сингулярно возмущенной системы общего вида третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, p), \\ \mu\dot{y} &= f_2(x, y, p). \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^1$, $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^1$. Введем в систему (27) управление $u = K_1x + K_2y$ и рассмотрим полученную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\ \mu\dot{y} &= f_2(x, y, p) + B_2(p)(K_1x + K_2y), \end{aligned} \tag{28}$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $B_1(p) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B_2(p) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$,.

Относительно системы (28) сделаем следующие предположения. Для значения параметра $p^* = 0$ существует состояние равновесия $x^* = 0$, $y^* = 0$ системы (28). Функции $f_1(x, y, p)$ и $f_2(x, y, p)$ таковы, что

$$A_{11}(x^*, y^*, p^*) = \left.\frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial x}\right|_{(x^*, y^*, p^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12}(x^*, y^*, p^*) = \left.\frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial y}\right|_{(x^*, y^*, p^*)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(x^*, y^*, p^*) = \left.\frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial x}\right|_{(x^*, y^*, p^*)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$A_{22}(x^*, y^*, p^*) = \left.\frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial y}\right|_{(x^*, y^*, p^*)} = 1,$$

и существуют такие положительные числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta < +\infty$, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\|A_{11}(x, y, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*)\| \le \alpha, \quad \|A_{12}(x, y, p) - A_{12}(x^*, y^*, p^*)\| \le \beta, \\ &\|A_{21}(x, y, p) - A_{21}(x^*, y^*, p^*)\| \le \gamma, \quad \|A_{22}(x, y, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)\| \le \delta \end{aligned} \tag{29}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$, $p \in \Omega_p \subseteq \mathbb{R}^1$.

Из условия устойчивости матриц $A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1$ и $A_{22}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_2$ выберем матрицы $K_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0,2 \\ 0,1 & -2 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и убедимся, что матрица A из п. 3 предположения 1 невырождена.

С помощью подхода, предложенного в п. 2, определим величины $\alpha = \delta = 0,101$, $\beta = \gamma = 0,1$ и область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| < 0,14\}$ такие, что для всех $p \in \Omega_p$ и функций $f_1(x,y,p)$, $f_2(x,y,p)$ таких, что выполняются оценки (29), существует единственное состояние равновесия системы (28).

Выбрав матрицы $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = (1)$ вычислим матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,508 & 0,077 \\ 0,077 & 0,515 \end{pmatrix}, \quad P_2 = (0,5).$$

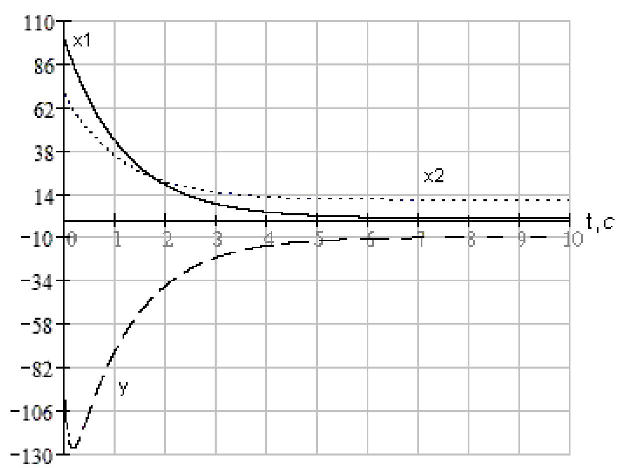
Из соотношений (14), (15) вычислим $\alpha_1 = \delta_1 = 0,1$ и убедимся, что $\Omega_p \subset \Omega_{p1}$ и $\Omega_p \subset \Omega_{p2}$, т. е. $\Omega_p \cap \Omega_{p1} \cap \Omega_{p2} = \Omega_p$. Условие (16) выполняется для всех $p \in \Omega_p$, значит, согласно теореме 1, система (28) абсолютно параметрически устойчива относительно области Ω_p для всех $\mu \in (0,1]$. Таким образом, указан класс функций, определенный оценками (29), управление $u = \begin{pmatrix} -2 & 0,2 \\ 0,1 & -2 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} y$, абсолютно параметрически стабилизирующее систему (27) и область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 0,14\}$ такой стабилизации.

Выбрав

$$f_1(x,y,p) = \begin{pmatrix} x_1 - 0,1\cos\left(x_1 + \dfrac{y}{\sqrt{2}} + p\right) + y \\ 0,9x_2 + 1000p^2 + \left(1 - \dfrac{0,1}{\sqrt{2}}\right) x_3 + \arctan\left(0,1\left(x_2 + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y,p) = x_1 + x_2 + x_3 + p + 0,1\ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}),$$

убедимся, что эти функции удовлетворяют оценкам (29). Заметим, что система (27) при выбранных выше функциях неустойчива.



Поведение переменных $x = (x_1, x_2)^T$, y системы (28) при $p = 0,1$, $\mu = 0,1$, $x_0 = (100, 70)^T$, $y_0 = -100$ показано на рисунке. Соответствующее выбранному значению параметра состояние равновесия $x = (0,8789; 11,0667)^T$, $y = -9,5866$.

6. Заключительные замечания. В работе исследована сингулярно возмущенная система общего вида при наличии неопределенных параметров. Построено управление, которое обеспечивает абсолютную параметрическую устойчивость системы. С помощью метода сравнения с векторной функцией Ляпунова определены условия такой устойчивости и область в пространстве параметров, для значений параметров из которой указанный тип устойчивости сохраняется. В качестве примера рассмотрено применение предложенной методики для сингулярно возмущенной системы третьего порядка.

1. *Ikeda M., Ohta Y., Šiljak D. D.* Parametric stability // Proc. Univ. Genova. The Ohio State Univ. Joint Conf. — Boston etc.: Birkhäuser, 1991.
2. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* К теории параметрической устойчивости // Доп. НАН України. — 2007. — № 7. — С. 59 – 65.
3. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* О параметрической устойчивости крупномасштабных систем // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 5. — С. 104 – 115.
4. *Хорошун А. С.* Параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных систем с неопределенностью // Доп. НАН України. — 2008. — № 2. — С. 36 – 41.
5. *Хорошун А. С.* Глобальная параметрическая квадратическая стабилизируемость нелинейных систем с неопределенностью // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 6. — С. 126 – 133.
6. *Хорошун А. С.* Условия абсолютной параметрической устойчивости систем Лурье // Доп. НАН України. — 2010. — № 5. — С. 64 – 71.
7. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем // Прикл. механика. — 2010. — **46**, № 10. — С. 106 – 121.
8. *Garofalo F., Leitmann G.* Nonlinear composite control of a class of nominally linear singularly perturbed uncertain systems // Deterministic Control of Uncertain Systems / Ed. A. S. I. Zinober. — London: Peter Peregrinus, 1990. — P. 269 – 288.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

Получено 30.07.10,
после доработки — 07.12.10