УДК 517.925; 517.93

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ*

А. Г. Мазко, В. В. Шрам

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: mazko@imath.kiev.ua

We develop new methods for an analysis of the robust stability of equilibrium states for some classes of nonlinear differential systems. We formulate necessary and sufficient conditions for stability of the zero solution for families of pseudolinear controlled systems with undefined coefficient matrices and a feedback in the measured output. An application of the obtained results is reduced to solving a system of linear differential matrix inequalities. We give an example of stabilizing system for a double inverted pendulum.

Роботу присвячено розробці нових методів аналізу робастної стійкості станів рівноваги деяких класів нелінійних диференціальних систем. Сформульовано достатні умови стійкості нульового розв'язку сімей псевдолінійних керованих систем з невизначеними матрицями коефіцієнтів та зворотного зв'язку по вимірюваному виходу. Розвинуто метод аналізу стійкості за першим наближенням сім'ї нелінійних систем. Застосування отриманих результатів зводиться до розв'язання систем лінійних диференціальних матричних нерівностей. Наведено приклад системи стабілізації подвійного перевернутого маятника.

1. Введение. В современных прикладных исследованиях возникают задачи анализа и синтеза динамических систем, которые описываются дифференциальными или разностными уравнениями с неопределенными параметрами и функциональной структурой (см., например, [1–3]). Основные качественные характеристики таких систем (устойчивость, локализация спектра линейной части в заданной области и т. п.) будем называть робастными относительно множества параметрической и функциональной неопределенности. Например, нулевое решение $x \equiv 0$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = Ax + f(x,t), \quad f(0,t) \equiv 0, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

называется *робастно (асимптотически) устойчивым* относительно заданных множеств матриц $\mathcal{A}$ и векторных функций $\mathcal{F}$, если оно (асимптотически) устойчиво по Ляпунову при всех фиксированных $A \in \mathcal{A}$ и $f \in \mathcal{F}$. В качестве множеств параметрической неопределенности системы (1.1) используются матричные интервалы и политопы $\mathcal{A}$, а функциональную неопределенность может описывать множество непрерывных ограниченных вектор-функций $\mathcal{F}$. В работах [2, 4] в терминах линейных матричных неравенств получены достаточные условия устойчивости линейных управляемых систем с неопределенными матрицами коэффициентов и обратной связи по измеряемому выходу.

Данная работа посвящена разработке новых методов анализа робастной устойчивости состояний равновесия некоторых классов псевдолинейных и нелинейных динамических систем. Сформулированы достаточные условия устойчивости нулевого решения се-

* Выполнена при частичной поддержке НИР № 0107U002198.

мейств псевдолинейных управляемых систем с неопределенными матрицами коэффициентов и обратной связи по измеряемому выходу. Развит метод анализа устойчивости по первому приближению семейства нелинейных систем. Применение полученных результатов сводится к решению систем линейных дифференциальных матричных неравенств. Приведен пример системы стабилизации двойного перевернутого маятника.

Будем использовать следующие обозначения: $*$ и T — операции соответственно комплексного сопряжения и транспонирования матриц; I_n — единичная матрица порядка n; $O_{n,m}$ — нулевая матрица размеров $n \times m$; $X = X^* > 0$ (≥ 0) — положительно (неотрицательно) определенная эрмитова матрица X; $i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\}$ — инерция эрмитовой матрицы $X = X^*$, состоящая из количеств ее положительных $(i_+(X))$, отрицательных $(i_-(X))$ и нулевых $(i_0(X))$ собственных значений с учетом кратностей; $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ — максимальное (минимальное) собственное значение эрмитовой матрицы; $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

2. Робастная стабилизация семейства псевдолинейных систем. Рассмотрим псевдолинейную систему управления

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u, \quad y = C(x,t)x + D(x,t)u, \tag{2.1}$$

$$u = K(x,t)y, \quad K(x,t) \in \mathcal{E}_{x,t} = \{K : \ K^T P^{-1}(x,t) K \leq Q(x,t)\}, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и наблюдения объекта, A, B, C, D, K, P и Q — матрицы соответствующих размеров $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $l \times m$, $m \times l$, $m \times m$ и $l \times l$, непрерывно зависящие от x и t, S_0 — некоторая окрестность точки $x = 0$. Для простоты зависимость данных матриц от x и t будем опускать. Симметричные положительно определенные матрицы $P = P^T > 0$ и $Q = Q^T > 0$ при фиксированных x и t описывают множество матриц обратной связи $\mathcal{E}_{x,t}$, являющееся эллипсоидом в пространстве $\mathbb{R}^{m \times l}$. Данное множество можно описать также в виде $\mathcal{E}_{x,t} = \{K : \ KQ^{-1}(x,t)K^T \leq P(x,t)\}$.

Из (2.1) и (2.2) следует неравенство

$$[x^T, u^T] \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T Q D \\ D^T Q C & D^T Q D - P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.3}$$

Предположим, что

$$D^T Q D < P^{-1}, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

Тогда из $x = 0$ следует, что $u = 0$ и $x \equiv 0$ является состоянием равновесия системы, которое мы исследуем на устойчивость. Замкнутая система является псевдолинейной и имеет вид

$$\dot{x} = M(x,t)x, \quad M(x,t) = A + B(I_m - KD)^{-1} KC. \tag{2.5}$$

При этом обратная матрица $(I_m - KD)^{-1}$ всегда существует. Действительно, при условиях (2.2) и (2.4) имеем $D^T K^T P^{-1} K D \leq D^T Q D < P^{-1}$. Согласно теореме Ляпунова для дискретных систем, $\rho(KD) < 1$ и, следовательно, матрица $I_m - KD$ невырожденная.

Сформулируем известные критерии отрицательной и неположительной определенностей блочных матриц и вспомогательные утверждения, которые будут использованы при получении основных результатов.

Лемма 2.1 [5]. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\begin{bmatrix} G & R^* \\ R & H \end{bmatrix} < 0 \iff H < 0, \quad G < R^* H^{-1} R. \tag{2.6}$$

Если блок H невырожденный, то

$$\begin{bmatrix} G & R^* \\ R & H \end{bmatrix} \leq 0 \iff H < 0, \quad G \leq R^* H^{-1} R. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. *Пусть выполняется система матричных неравенств*

$$P = P^* > 0,\ Q = Q^* > 0,\ \begin{bmatrix} -P^{-1} & D^* \\ D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,\ \begin{bmatrix} -W & U^* & V^* \\ U & -P^{-1} & D^* \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{2.8}$$

Тогда для любой матрицы $K \in \mathcal{E} = \{K : K^* P^{-1} K \leq Q\}$ выполняются соотношения

$$U^* F(K) V + V^* F^*(K) U \leq W, \quad F(K) = (I - KD)^{-1} K. \tag{2.9}$$

Доказательство. Первое блочное неравенство в (2.8) в силу критерия (2.6) сводится к виду $D^* Q D < P^{-1}$. Поэтому $D^* K^* P^{-1} K D < P^{-1}$ при $K \in \mathcal{E}$. Согласно теореме Ляпунова для дискретных систем, $\rho(KD) < 1$ и матрица $I - KD$ невырожденная.

Используем формулу Фробениуса обращения блочной матрицы

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & D^* \\ D & -Q^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & S^{-1} D^* Q \\ Q D S^{-1} & -Q + Q D S^{-1} D^* Q \end{bmatrix}, \quad S = D^* Q D - P^{-1},$$

и с помощью критерия (2.7) приведем второе блочное неравенство в (2.8) к виду

$$[U^*, V^*] \begin{bmatrix} -S^{-1} & -S^{-1} D^* Q \\ -Q D S^{-1} & Q - Q D S^{-1} D^* Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \leq W.$$

Очевидно, что неравенство (2.9), представимое в виде

$$[U^*, V^*] \begin{bmatrix} 0 & F(K) \\ F^*(K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \leq W,$$

выполняется, если

$$\begin{bmatrix} S^{-1} & S^{-1} D^* Q + F(K) \\ Q D S^{-1} + F^*(K) & -Q + Q D S^{-1} D^* Q \end{bmatrix} \leq 0$$

или, в силу критерия (2.7),

$$Q + QDF(K) + F^*(K)D^*Q + F^*(K)SF(K) \geq 0,$$

$$F^*(K)P^{-1}F(K) \leq [I + DF(K)]^* Q [I + DF(K)].$$

Поскольку $F(K) \equiv K[I + DF(K)]$, последнее неравенство выполняется, если $K^*P^{-1}K \leq \leq Q$, т. е. $K \in \mathcal{E}$.

Лемма доказана.

Сформулируем условия устойчивости нулевого решения системы (2.5).

Теорема 2.1 [8]. *Пусть для некоторой матрицы $X(t) = X^T(t)$ выполняются неравенства*

$$X(t) \geq X_0 > 0, \quad Y(x,t) \leq 0, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{2.10}$$

где $Y(x,t) = \dot{X}(t) + M^T(x,t)X(t) + X(t)M(x,t)$. Тогда решение $x \equiv 0$ системы (2.5) устойчиво по Ляпунову.

Если же

$$X_1 \geq X(t) \geq X_0 > 0, \quad Y(x,t) \leq -Y_0 < 0, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

то решение $x \equiv 0$ системы (2.5) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условие (2.4) и дифференциальное матричное неравенство*

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A^TX + XA + Y & XB & C^T \\ B^TX & -P^{-1} & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

где $X(t) = X^T(t)$ и $Y(t) = Y^T(t)$ — такие матрицы, что $X(t) \geq X_0 > 0, Y(t) \geq 0$ $(X_1 \geq X(t) \geq X_0 > 0, Y(t) \geq Y_0 > 0)$, X_0, X_1 и Y_0 — постоянные матрицы. Тогда любое управление (2.2) обеспечивает устойчивость (*равномерную асимптотическую устойчивость*) *нулевого решения системы (2.1).*

Доказательство. Построим функцию Ляпунова замкнутой системы (2.5) в виде $v(x,t) = = x^TX(t)x$. В силу теоремы 2.1 имеем достаточные условия устойчивости решения $x \equiv 0$ системы

$$\dot{X} + A^TX + XA + C^TF^T(K)B^TX + XBF(K)C + Y \leq 0, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0,$$

где $X(t) \geq X_0 > 0$ и $Y(t) \geq 0$. Полагая в лемме 2.2

$$U = B^TX, \quad V = C, \quad W = -\dot{X} - A^TX - XA - Y,$$

получаем условия устойчивости решения $x \equiv 0$ системы (2.5) в виде (2.12). Аналогично с помощью теоремы 2.1 и леммы 2.2 устанавливаются условия (2.12) равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) с соответствующими ограничениями на матрицы $X(t)$ и $Y(t)$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Можно привести другое доказательство теоремы 2.2 на основе теоремы о неущербности s-процедуры [6], согласно которой неравенство $w(x) \leq 0$ (< 0) при ограничении $w_0(x) \geq 0$ эквивалентно соотношениям $w(x) + \tau w_0(x) \leq 0$ (< 0), $x \neq 0$, где $w(x)$ и $w_0(x)$ — две квадратичные формы, $\tau > 0$ — некоторое число.

В теореме 2.2 нулевое решение системы (2.1) без управления ($u = 0$) должно быть соответственно устойчивым и равномерно асимптотически устойчивым. В случае $D \equiv 0$ эти ограничения можно снять, если матрицу управления выбирать из эллипсоида

$$\mathcal{E}_{x,t}^{(0)} = \{K : (K - K^{(0)})^T P^{-1} (K - K^{(0)}) \leq Q\}, \tag{2.13}$$

где $K^{(0)}$ — такая матрица, что нулевое решение системы

$$\dot{x} = A^{(0)} x, \quad A^{(0)} = A + BK^{(0)} C, \tag{2.14}$$

имеет указанные свойства устойчивости. Следующее утверждение, вытекающее из теоремы инерции [7], дает метод определения матрицы $K^{(0)}$.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются соотношения*

$$AZ + ZA^T < B(V + V^T)B^T, \tag{2.15}$$

$$VB^T Z^{-1} C^+ C = VB^T Z^{-1}, \tag{2.16}$$

где Z — симметричная $(n \times n)$-матрица с инерцией $i(Z) = \{p, q, 0\}$, V — $(m \times m)$-матрица, C^+ — псевдообратная матрица. Тогда система (2.14) с матрицей линейной обратной связи по выходу

$$K^{(0)} = -VB^T Z^{-1} C^+ \tag{2.17}$$

имеет p (q) собственных значений с учетом кратностей, расположенных в открытой левой (правой) полуплоскости. В частности, при условиях (2.15) – (2.17) и $Z = Z^T > 0$ данная система асимптотически устойчива.

Замечание 2.2. Если матрица C имеет полный ранг l, то $C^+ = C^T (CC^T)^{-1}$ и условие (2.16) эквивалентно равенству $C^\perp Z^{-1} BV^T = 0$, где $C^\perp$ — такая матрица, что

$$\det \begin{bmatrix} C \\ C^\perp \end{bmatrix} \neq 0, \quad C^\perp C^T = 0.$$

Из непрерывной зависимости исходных матриц системы (2.1), (2.2) от x и t следует, что для обеспечения устойчивости (равномерной асимптотической устойчивости) нулевого решения замкнутой системы достаточно выполнения строгих матричных неравенств (2.12) при $x = 0$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условие (2.4) и дифференциальное матричное неравенство*

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A_0^T X + X A_0 + Y & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -P_0^{-1} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -Q_0^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad t \geq 0, \tag{2.18}$$

где $A_0 = A(0,t)$, $B_0 = B(0,t)$, $C_0 = C(0,t)$, $D_0 = D(0,t)$, $P_0 = P(0,t)$, $Q_0 = Q(0,t)$, $X(t) = X^T(t)$ *и* $Y(t) = Y^T(t)$ *— такие матрицы, что* $X(t) \geq X_0 > 0$, $Y(t) \geq 0$ ($X_1 \geq X(t) \geq X_0 > 0$, $Y(t) \geq Y_0 > 0$). *Тогда любое управление (2.2) обеспечивает устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) нулевого решения системы (2.1).*

Рассмотрим семейство управляемых систем типа (2.1), (2.2) с неопределенными матричными коэффициентами

$$\begin{gathered} A(x,t) \in \mathcal{P}_a = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu_a} \alpha_i A_i \,:\, \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\nu_a} \alpha_i = 1 \right\}, \\ B(x,t) \in \mathcal{P}_b = \left\{ \sum_{j=1}^{\nu_b} \beta_j B_j \,:\, \beta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\nu_b} \beta_j = 1 \right\}, \\ C(x,t) \in \mathcal{P}_c = \left\{ \sum_{k=1}^{\nu_c} \gamma_k C_k \,:\, \gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu_c} \gamma_k = 1 \right\}, \\ D(x,t) \in \mathcal{P}_d = \left\{ \sum_{s=1}^{\nu_d} \delta_s D_s \,:\, \delta_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{\nu_d} \delta_s = 1 \right\}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Здесь заданные наборы матриц A_i, B_j, C_k и D_s являются вершинами соответствующих политопов $\mathcal{P}_a \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{P}_b \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathcal{P}_c \subset \mathbb{R}^{l\times n}$ и $\mathcal{P}_d \subset \mathbb{R}^{l\times m}$. Стабилизирующие управления по-прежнему строим в виде линейной обратной связи по выходу (2.2).

Теорема 2.5. *Пусть выполняется система матричных неравенств*

$$D_s^T Q D_s < P^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^T X + X A_i + Y & X B_j & C_k^T \\ B_j^T X & -P^{-1} & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{2.20}$$

$$x \in S_0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, \nu_a}, \quad j = \overline{1, \nu_b}, \quad k = \overline{1, \nu_c}, \quad s = \overline{1, \nu_d},$$

где $X(t) = X^T(t)$ *и* $Y(t) = Y^T(t)$ *— такие матрицы, что* $X(t) \geq X_0 > 0$, $Y(t) \geq 0$ ($X_1 \geq X(t) \geq X_0 > 0$, $Y(t) \geq Y_0 > 0$). *Тогда любое управление (2.2) обеспечивает устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) нулевого решения каждой системы (2.1), (2.19).*

Доказательство теоремы 2.5 сводится к применению теоремы 2.2. Действительно, так как матрицы A, B, C и D входят в выражения (2.12) линейно, то при умножении на α_i,

β_j, γ_k и δ_s соответствующих матричных неравенств (2.20) и их суммировании получим матричные неравенства (2.12) и (2.4), используемые в теореме 2.2. В [9] описана более общая методика сведения матричных неравенств с полиэдральными коэффициентами к конечной системе линейных матричных неравенств.

Замечание 2.3. При выполнении условий теорем 2.2, 2.4 и 2.5 $X(t)$ является матрицей общей квадратичной функции Ляпунова для каждой системы (2.1) с неопределенными коэффициентами (2.19) и с любым управлением (2.2). При использовании теоремы 2.5 достаточно обеспечить выполнение систем строгих матричных неравенств (2.20) лишь при $x = 0$ (см. теорему 2.4).

Замечание 2.4. Системы матричных неравенств (2.20) можно использовать при решении обратных задач робастной стабилизации. В частности, для заданной матрицы $X(t)$ при условиях теоремы 2.5 построить семейство систем стабилизации, описываемых матричными политопами (2.19) и эллипсоидами матриц управления (2.2). В данной задаче неизвестными матрицами будут вершины политопов A_i, B_j, C_k и D_s, а также выражения $P_1 = -P^{-1} < 0$ и $Q_1 = -Q^{-1} < 0$.

3. Робастная устойчивость некоторого класса нелинейных систем. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(x,t)x + g(x,t), \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

где A и g — непрерывные матричная и векторная функции, удовлетворяющие условиям

$$A(x,t) \in \mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i \ : \ \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \geq \alpha > 0 \right\}, \tag{3.2}$$

$$\|g(x,t)\| \leq \gamma \|x\|^{1+\delta}, \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Условие (3.2) можно рассматривать как возможность представления

$$A(x,t) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(x,t) A_i,$$

где $\alpha_i(x,t)$ — неотрицательные скалярные функции такие, что

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(x,t) \geq \alpha > 0.$$

При условии (3.3) $g(0,t) \equiv 0$ и система (3.1) имеет нулевое решение $x \equiv 0$.

Теорема 3.1. *Если для некоторых матриц $X(t) = X^T(t) > 0$ и $Y_i = Y_i^T < 0$ выполняется система матричных неравенств*

$$0 < X_0 \leq X(t) \leq X_1, \quad 0 \leq \dot{X}(t) \leq Y_i - \alpha\,[A_i^T X(t) + X(t) A_i], \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,\nu}, \tag{3.4}$$

то нулевое решение $x \equiv 0$ каждой системы (3.1) – (3.3) равномерно асимптотически устойчиво и $v(x) = x^T X(t)x$ — общая функция Ляпунова данного семейства систем.

Доказательство. Вычислим производную функции Ляпунова $v(x) = x^T X x$ в силу системы (3.1) и проведем ее оценку с учетом ограничений (3.2) – (3.4):

$$
\begin{aligned}
\dot v(x) &= x^T \dot X x + \dot x^T X x + x^T X \dot x = x^T(\dot X + A^T X + XA)x + 2g^T X x = \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \, x^T \left(\frac{1}{\alpha}\dot X + A_i^T X + X A_i \right) x + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \right) x^T \dot X x + 2g^T X x \le \\
&\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i x^T Y_i x + 2\sqrt{g^T X g \, x^T X x} \le \\
&\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \max_i \lambda_{\max}(Y_i)\|x\|^2 + 2\sqrt{g^T X_1 g \, x^T X_1 x} \le \\
&\le \max_i \lambda_{\max}(Y_i)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(X_1)\|g\|\|x\| \le \\
&\le \left[\max_i \lambda_{\max}(Y_i)| + 2\gamma\lambda_{\max}(X_1)\|x\|^{\delta} \right] \|x\|^2 .
\end{aligned}
$$

Здесь использованы неравенства $x^T Z x \le \lambda_{\max}(Z)\|x\|^2$ и $g^T X x \le \sqrt{g^T X g \, x^T X x}$, выполняемые для любых матриц $Z = Z^T$ и $X = X^T \ge 0$.

Таким образом, если

$$
\|x\| \le \left(\frac{-\varepsilon - \max_i \lambda_{\max}(Y_i)}{2\gamma\lambda_{\max}(X_1)} \right)^{\frac{1}{\delta}}, \quad 0 < \varepsilon < -\max_i \lambda_{\max}(Y_i), \tag{3.5}
$$

то $\dot v(x) \le -\varepsilon\|x\|^2$ и согласно теореме Ляпунова нулевое решение $x \equiv 0$ каждой системы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво. При этом неравенства (3.5) описывают подмножество области притяжения данных систем.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *При условиях теоремы 3.1 семейство псевдолинейных систем*

$$
\dot x = A(x,t)x + B(x,t)u, \quad A(x,t) \in \mathcal{A}, \quad \|B(x,t)\| \le b\|x\|^{\beta}, \quad x \in R^n, \quad t \ge 0,
$$

стабилизируемо управлением $u(x,t)$, если $\|u(x,t)\| \le d\|x\|^{\gamma}$, $b > 0$, $d > 0$, $\beta + \gamma > 1$.

4. Стабилизация двойного перевернутого маятника. Рассмотрим псевдолинейную стационарную модель стабилизации двойного перевернутого маятника на тележке (рис. 1)

$$
R(\theta)\ddot\theta + N(\theta,\dot\theta)\dot\theta + G(\theta) = Hu, \tag{4.1}
$$

где

$$
\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2\cos(\theta_1) & d_3\cos(\theta_2) \\ d_2\cos(\theta_1) & d_4 & d_5\cos(\theta_1-\theta_2) \\ d_3\cos(\theta_2) & d_5\cos(\theta_1-\theta_2) & d_6 \end{bmatrix},
$$

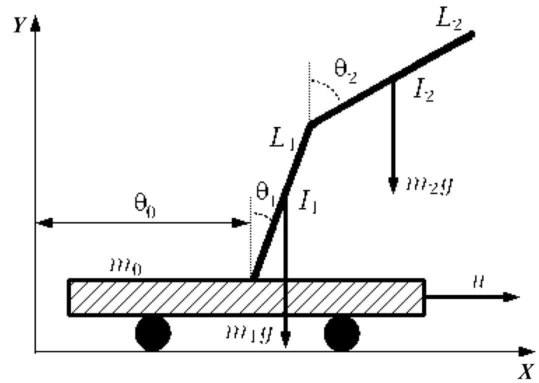

Рис. 1. Двойной перевернутый маятник на тележке.

$$N(\theta,\dot\theta)=\begin{bmatrix}0 & -d_2\sin(\theta_1)\dot\theta_1 & -d_3\sin(\theta_2)\dot\theta_2\\ 0 & 0 & d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_2\\ 0 & -d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_2 & 0\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$G(\theta)=\begin{bmatrix}0\\ -f_1\sin\theta_1\\ -f_2\sin\theta_2\end{bmatrix}=G_1(\theta)\theta,\quad G_1(\theta)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -f_1\dfrac{\sin(\theta_1)}{\theta_1} & 0\\ 0 & 0 & -f_2\dfrac{\sin(\theta_2)}{\theta_2}\end{bmatrix},$$

$$d_1=m_0+m_1+m_2,\quad d_2=\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)L_1,\quad d_3=\frac{1}{2}m_2L_2,\quad d_4=\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right)L_1^2,$$

$$d_5=\frac{1}{2}m_2L_1L_2,\quad d_6=\frac{1}{3}m_2L_2^2,\quad f_1=\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)L_1g,\quad f_2=\frac{1}{2}m_2L_2g,$$

m_0, m_1 и m_2 — соответственно массы тележки, первого и второго звеньев маятника, L_1 и L_2 — длины первого и второго звеньев маятника, θ_0 — отклонение тележки, θ_1 и θ_2 — углы отклонения звеньев маятника от вертикальной оси, I_1 и I_2 — моменты инерции звеньев маятника, g — ускорение свободного падения, u — управляющая сила [10].

Положим $m_0=1,5$ кг, $m_1=0,5$ кг, $m_2=0,75$ кг, $L_1=0,5$ м, $L_2=0,75$ м.

Перепишем систему (4.1) в виде

$$\dot x=A(x)x+B(x)u, \tag{4.2}$$

где

$$x=\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix},\quad A(x)=\begin{bmatrix}O_{3,3} & I_3\\ -R^{-1}G_1 & -R^{-1}N\end{bmatrix},\quad B(x)=\begin{bmatrix}O_{3,1}\\ R^{-1}H\end{bmatrix}.$$

Нулевое состояние равновесия $x=0$ системы без управления ($u=0$) является неустойчивым. Используя теорему 2.4, построим множество линейных обратных связей по состоянию

$$u=Kx,\quad (K-K^{(0)})^T(K-K^{(0)})\le\eta I_6,$$

обеспечивающих асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутой системы. В данном случае в (2.13) $P = 1$, $Q = \eta I_6$ и $\|K - K^{(0)}\| \le \eta$. Матрицу $K^{(0)}$ определяем согласно (2.17) в виде $K^{(0)} = -B(0)^T Z^{-1}$, где $Z > 0$ — решение матричного неравенства Ляпунова (см. также [1])

$$A(0)Z + ZA(0)^T < 2B(0)B(0)^T.$$

Решая данное неравенство с помощью системы MATLAB, получаем

$$K^{(0)} = [-0,00923;\ 195,34659;\ -205,04781;\ -0,2791;\ 10,09102;\ -28,14679]\,.$$

Найдено также максимальное значение $\eta_{\max} = 0,096$ параметра η, характеризующего радиус стабилизации в пространстве матриц обратной связи K.

Решение блочного неравенства (2.18) найдено в виде постоянной матрицы

$$X = \begin{bmatrix} 0,0025 & -0,093 & 0,26 & 0,034 & 0,017 & 0,047 \\ -0,093 & 1498 & -1964,5 & -2,77 & 16,63 & -117,8 \\ 0,26 & -1964,5 & 3281 & 7,57 & -16,88 & 188,8 \\ 0,034 & -2,77 & 7,57 & 1,12 & 0,545 & 1,5 \\ 0,017 & 16,63 & -16,88 & 0,545 & 7,54 & -9,37 \\ 0,047 & -117,8 & 188,8 & 1,5 & -9,37 & 75,52 \end{bmatrix} > 0.$$

При этом семейство замкнутых систем имеет общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T X x$. На рис. 2–4 показано поведение решений системы (4.2) с управлением $u = K^{(0)}x$ и вектором начальных условий

$$x_0 = [0,1;\ 0,05;\ 0,05;\ 0,1;\ 0,05;\ 0,05]^T.$$

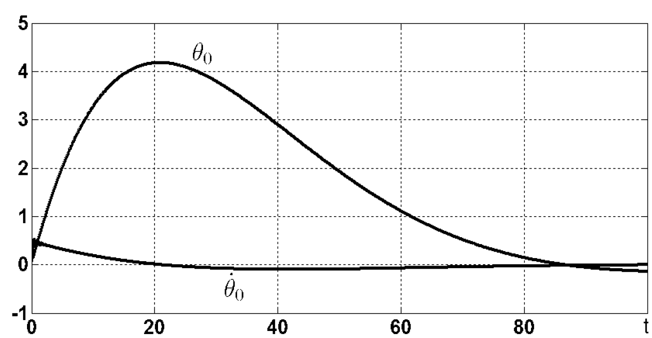

Рис. 2. Функции $\theta_0(t)$ и $\dot\theta_0(t)$, $0 \le t \le 100$.

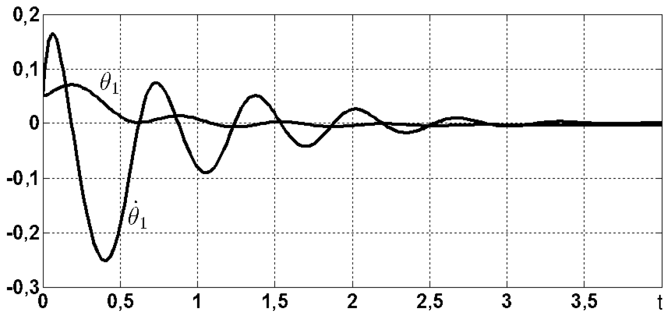

Рис. 3. Функции $\theta_1(t)$ и $\dot\theta_1(t), 0 \le t \le 5$.

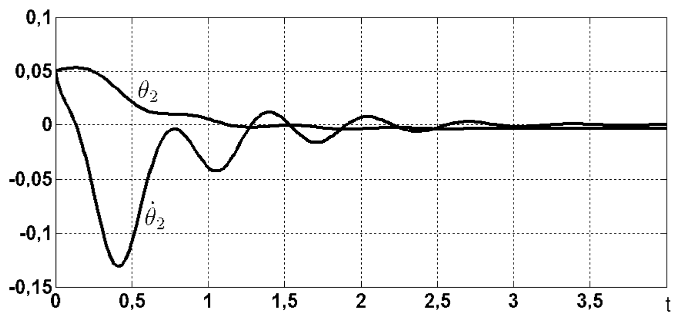

Рис. 4. Функции $\theta_2(t)$ и $\dot\theta_2(t), 0 \le t \le 5$.

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
3. *Djaferis T. E.* Robust control design: a polynomial approach. — Boston: Kluwer, 1995. — 288 p.
4. *Мазко О. Г., Шрам В. В.* Робастна стійкість лінійних керованих систем з невизначеними коефіцієнтами // Математичні проблеми механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 3. — С. 70 – 86.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
6. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем // Труды II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. — М.: Наука, 1965.
7. *Mazko A. G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems // Int. Book Series „Stability, Oscillations and Optimization of Systems” / Eds A. A. Martynyuk, P. Borne, C. Cruz-Hernandez. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2008. — Vol. 2. — xx + 270 p.
8. *Мазко А. Г.* Конусные неравенства и устойчивость дифференциальных систем // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 8. — С. 1058 – 1074.
9. *Мазко О. Г., Шрам В. В.* Умови стійкості та локалізації спектра сім'ї лінійних динамічних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 3. — С. 149 – 168.
10. *Bogdanov A.* Optimal control of a double inverted pendulum on a cart // OGI School Sci. Eng., OHSU, 2004.

Одержано 17.12.10