УДК 517.9

ПОБУДОВА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ УКОРОЧЕННЯ ЇЇ ЗА КУТОВОЮ ЗМІННОЮ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

Ю. В. Теплінський

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський Хмельницької обл.,
вул. Івана Огієнка, 61
e-mail: yuriy-teplinsky@yandex.ru

К. В. Пасюк

Буковин. держ. фін. академія
Україна, 58000, Чернівці, вул. Штерна, 1
e-mail: pkv.85@mail.ru

We use the method of reduction in the angular variable to construct an invariant torus that depends on an infinite set of constant sign changing deviations of the arguments for a linear system of differential-difference equations. This means that the function that defines the torus is represented as a limit of a sequence of functions with each one defining an invariant torus for the initial system reduced with respect to the angular variable as the order of reduction tends to infinity.

Для построения бесконечномерного инвариантного тора линейной системы дифференциально-разностных уравнений, зависящей от бесконечного множества постоянных разнознаковых отклонений аргументов, применен метод укорочения угловой переменной, т. е. функция, определяющая этот тор, представлена в виде предела последовательности функций, каждая из которых определяет инвариантный тор укороченной относительно угловой переменной исходной системы, при неограниченном росте порядка укорочения.

1. Постановка задачі. У роботах [1, 2] за допомогою відомого методу функції Гріна – Самойленка [3, 4] знайдено достатні умови існування в банаховому просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$ ліпшицевих та гельдерових інваріантних торів лінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь загального виду, що визначені на нескінченновимірних торах і містять нескінченну множину різнознакових сталих відхилень аргументів, а в [5] наведено достатні умови неперервної залежності цих торів від параметрів. У даній роботі ми продовжуємо дослідження властивостей інваріантних торів цих систем.

Система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + B(\varphi,t)x(t+\Delta) + c(\varphi,t) \tag{1}$$

є частковим випадком системи (1) з [1] (або рівняння (9) з [2]), тобто $x \in \mathfrak{M}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots) \in \mathfrak{M}$; відображення $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), a_3(\varphi), \ldots\}$ визначене періодичними відносно координат φ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π функціями $a_i(\varphi) : \mathfrak{M} \to R^1$ $\forall i \in N$, що дозволяє вважати систему (1) визначеною на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$, а ці координати кутовими координатами на ньому; N — множина натуральних чисел; $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок першого рівняння системи (1), що задовольняє початкову умову $\varphi = \varphi_0(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$; $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{ij=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця з 2π-періодичними відносно φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, елементами, елементи $b_{ij}(\varphi,t) = b_{ij}(y_1(\varphi,t), y_2(\varphi,t), \ldots)$ нескінченної матриці $B(\varphi,t)$ та координати $c_i(\varphi,t) = c_i(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t), \ldots)$ векторної функції $c(\varphi,t)$ визначаються рівностями $y_i(\varphi,t) = \varphi_{i_{t+\Gamma_i}}(\varphi)$ та $z_i(\varphi,t) = \varphi_{i_{t+\delta_i}}(\varphi)$ відповідно, причому функції $c_i(z) = c_i(z_1, z_2, \ldots)$ та $b_{ij}(y_1, y_2, \ldots)$ є 2π-періодичними відносно кожної своєї координати для будь-яких натуральних i та j; $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \ldots)$; Γ_i, δ_i та Δ_i — довільні фіксовані дійсні числа для будь-яких $i \in N$; $\|P(\varphi)\| = \sup_s \sum_{j=1}^{\infty} |p_{sj}(\varphi)|$, $\|P(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} \|P(\varphi)\|$.

Назвемо умовами ($\mathbf{U}$) такі умови:

1) $\forall s \in N$:

$$\|a(\varphi)\| \leq A = \text{const} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{y \in \mathcal{T}_\infty} |b_{sj}(y)| \leq B^0 = \text{const} < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\varphi)| \leq P^0 = \text{const} < \infty;$$

2) множини δ_i, Γ_i та Δ_i відхилень аргументу t обмежені числами Δ^*, Γ^* та Δ_* відповідно, тобто $\forall i \in N : |\delta_i| < \Delta^*$, $|\Gamma_i| < \Gamma^*$, $|\Delta_i| < \Delta_*$;

3) $B^0 + \|P(\varphi) + E\|_0 < 1$, де E — одинична нескінченна матриця,

а умовами Ліпшиця ($\mathbf{L}$) наступні:

1) $\forall \{\varphi, \varphi^1\} \subset \mathcal{T}_\infty : \|a(\varphi) - a(\varphi^1)\| \leq \alpha \|\varphi - \varphi^1\|$, $\alpha = \text{const} > 0$,

$$\|P(\varphi) - P(\varphi^1)\| \leq p^0 \|\varphi - \varphi^1\|, \quad p^0 = \text{const} > 0;$$

2) $\forall \{z, z^1\} \subset \mathcal{T}_\infty : \|c(z) - c(z^1)\| \leq \eta \|z - z^1\|$, $\eta = \text{const} > 0$;

3) $\forall \{y, y^1\} \subset \mathcal{T}_\infty : \|B(y) - B(y^1)\| \leq \beta \|y - y^1\|$, $\beta = \text{const} > 0$.

При виконанні умов ($\mathbf{U}$) і ($\mathbf{L}$) виконуються умови наслідку 3 з [1] (крім другої та третьої), а отже, існує неперервна на $\mathcal{T}_\infty$ функція $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).

Запишемо скінченновимірну систему у вигляді рівняння

$$\frac{d\overset{(m)}{\varphi}}{dt} = \overset{(m)}{a}(\overset{(m)}{\varphi}), \tag{2}$$

де $\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m$ — m-вимірний тор, $\bar{0} = (0, 0, 0, \ldots)$, $\overset{(m)}{a}(\overset{(m)}{\varphi}) = \{a_1(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}), \ldots$ $\ldots, a_m(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})\}$.

Очевидно, при будь-якому $\overset{(m)}{\varphi} \in \mathcal{T}_m$ система (2) має єдиний визначений на всій осі розв'язок $\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})$ такий, що $\overset{(m)}{\varphi}_0(\overset{(m)}{\varphi}) = \overset{(m)}{\varphi}$.

Тепер запишемо зліченну систему у вигляді рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0})x + B(\overset{(m)}{\varphi}, t)x(t + \Delta) + c(\overset{(m)}{\varphi}, t), \tag{3}$$

де

$$B(\overset{(m)}{\varphi}, t) = B(\overset{(m)}{\varphi}_{1_{t+\Gamma_1}}(\overset{(m)}{\varphi}), \ldots, \overset{(m)}{\varphi}_{m_{t+\Gamma_m}}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}),$$

$$c(\overset{(m)}{\varphi}, t) = c(\overset{(m)}{\varphi}_{1_{t+\delta_1}}(\overset{(m)}{\varphi}), \ldots, \overset{(m)}{\varphi}_{m_{t+\delta_m}}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}).$$

Легко перевірити, що для рівняння (3), визначеного на m-вимірному торі, виконуються всі умови, вказані вище для рівняння (1), визначеного на нескінченновимірному торі. Тому рівняння (3) має інваріантний тор $\mathfrak{T}_m$, породжений функцією $\mathfrak{u}_m(\overset{(m)}{\varphi}) : \mathcal{T}_m \to \mathfrak{M}$. Дійсно, позначаючи $\mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}) = P(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}) + E$, одержуємо, що для будь-якого $k \in N \bigcup \{0\}$ рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ex(t) + \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})) + B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta) + c(\overset{(m)}{\varphi}, t),$$

в якому $\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta) = \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}_{1_{t+\Delta_1}}(\overset{(m)}{\varphi}), \ldots, \overset{(m)}{\varphi}_{m_{t+\Delta_m}}(\overset{(m)}{\varphi}))$, визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathfrak{T}_m^{k+1}$, породжений функцією

$$x = \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi}) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0 \, \mathfrak{c}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi}, \tau) \, d\tau,$$

де $\Omega_\tau^0 = \operatorname{diag}\{\exp\{\tau\}, \exp\{\tau\}, \ldots\}$ — діагональна матриця,

$$\mathfrak{c}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi}, t) = \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})) + B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta) + c(\overset{(m)}{\varphi}, t),$$

а $\mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})$ визначено рівністю

$$\mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi}) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0 c(\overset{(m)}{\varphi}, \tau) \, d\tau.$$

Доведення рівномірної відносно $\overset{(m)}{\varphi} \in \mathcal{T}_m$ збіжності при $k \to \infty$ послідовності $\{\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\}_{k=1}^{\infty}$ до неперервної на $\mathcal{T}_m$ функції $\mathfrak{u}_m(\overset{(m)}{\varphi})$ проводиться аналогічно до доведення теореми 1 з [2].

Задача полягає у відшуканні достатніх коефіцієнтних умов, при яких послідовність $\{\mathfrak{u}_m(\overset{(m)}{\varphi})\}$ збігається до функції $u(\varphi)$ при $m \to \infty$.

2. Основний результат та його доведення. Будемо говорити, що функція $s(\varphi)$ задовольняє посилену умову Коші – Ліпшиця на $\mathcal{T}_\infty$ з коефіцієнтом $\varepsilon(m)$, якщо існує така додатна скалярна функція $\varepsilon(m)$, яка визначена на множині цілих невід'ємних чисел і прямує до нуля при $m \to \infty$, що для $\{\varphi, \varphi^1\} \subset \mathcal{T}_\infty$, перші m відповідних координат яких попарно збігаються, справджується нерівність

$$\|s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) - s(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots)\| \leq$$
$$\leq \varepsilon(m)\|\{\varphi_{m+1} - \varphi^1_{m+1}, \varphi_{m+2} - \varphi^1_{m+2}, \ldots\}\|.$$

Наступну умову назвемо умовою $(\mathbf{L}^*)$:

матриці $P(\varphi)$, $B(y)$ та функції $a(\varphi)$, $c(z)$ задовольняють посилені умови Коші – Ліпшиця на $\mathcal{T}_\infty$ з коефіцієнтами $p^0(m)$, $\beta(m)$ та $\alpha(m)$, $\eta(m)$ відповідно.

Зауважимо, що при умові $(\mathbf{L}^*)$ виконуються і умови $(\mathbf{L})$ з коефіцієнтами $p^0 = p^0(0)$, $\beta = \beta(0)$, $\eta = \eta(0)$ і $a = \alpha(0)$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{U})$ *та* $(\mathbf{L}^*)$. *Тоді*

$$\|u(\varphi) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty$$

рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Зберігши сенс позначень $\mathfrak{u}^k(\varphi)$ та $\mathfrak{c}^k(\varphi, t)$ з доведення наслідку 3 з [1] для рівняння (1), запишемо рівності

$$\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}^{k+1}_m(\overset{(m)}{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau \left\{\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi, \tau) - \mathfrak{c}^{k+1}_m(\overset{(m)}{\varphi}, \tau)\right\} d\tau, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi, t) - \mathfrak{c}^{k+1}_m(\overset{(m)}{\varphi}, t) &= \mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi, t)\mathfrak{u}^k(\varphi, t + \Delta) + c(\varphi, t) - \\
&- \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})) - B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t) = \\
&= \mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\left(\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\right) + \\
&+ \left(\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\right)\mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})) + \\
&+ B(\varphi, t)\left(\mathfrak{u}^k(\varphi, t + \Delta) - \mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta)\right) + \\
&+ \left(B(\varphi, t) - B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\right)\mathfrak{u}^k_m(\overset{(m)}{\varphi}, t + \Delta) + c(\varphi, t) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t).
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \bar{0}), \quad \tilde{\varphi} = (0, \ldots, 0, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots),$$

$$(\varphi_{1_{t+\delta_1}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\delta_2}}(\varphi), \ldots) = \varphi_{t+\delta}(\varphi),$$

$$(\overset{(m)}{\varphi}_{1_{t+\delta_1}}(\overset{(m)}{\varphi}), \ldots, \overset{(m)}{\varphi}_{m_{t+\delta_m}}(\overset{(m)}{\varphi})) = \overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}),$$

$\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})$ — розв'язок першого рівняння системи (1) з початковою умовою $\varphi_0(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}) = \{\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}\}$. У цих позначеннях мають місце рівності

$$c(\varphi, t) = c(\varphi_{t+\delta}(\varphi)), \quad (\varphi_{1_{t+\delta_1}}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}), \varphi_{2_{t+\delta_2}}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}), \ldots) = \varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}),$$

$$c(\overset{(m)}{\varphi}, t) = c(\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|c(\varphi, t) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| = \|c(\varphi_{t+\delta}(\varphi)) - c(\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0})\| \le \\ \le \|c(\varphi_{t+\delta}(\varphi)) - c(\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}))\| + \\ + \|c(\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})) - c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}))\| + \\ + \|c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})) - c(\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0})\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко побачити, що

$$\|c(\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})) - c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0}))\| \le \eta(m)\|\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})\| \le \eta(m)(2\pi + A|t| + A\Delta^*). \tag{6}$$

Використовуючи фрагменти доведень леми 10.1 та теореми 10.4 з [6], одержуємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} V(t) = \overline{\|\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})\|} \le \\ \le \int\limits_0^{|t|} \left\{ \alpha(m)\|\varphi_s(\varphi) - \varphi_s(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})\| + \alpha(0)\overline{\|\varphi_s(\varphi) - \varphi_s(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})\|} \right\} ds \le \\ \le \alpha(m)(2\pi|t| + At^2) + \int\limits_0^{|t|} \alpha(0)V(s)\,ds, \end{aligned}$$

$$V^0(t) = \|\bar{\varphi}_t(\varphi) - \{\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}\}\| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{|t|} \left\{ \alpha(m)\|\varphi_s(\varphi)\| + \alpha(0)\|\bar{\varphi}_s(\varphi) - \{\overset{(m)}{\varphi}_s(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}\}\| \right\} ds \leq$$

$$\leq \alpha(m)\left(2\pi|t| + \frac{A}{2}\,t^2\right) + \int\limits_0^{|t|} \alpha(0)V^0(s)\,ds.$$

Використовуючи твердження задачі 1 з [7, с. 47] і проводячи нескладні, але досить громіздкі розрахунки, при всіх $t \geq 0$ одержуємо оцінки

$$V^0(t) \leq \alpha(m)\left(2\pi t + \frac{A}{2}\,t^2\right) + \int\limits_0^t \alpha(0)\alpha(m)\left(2\pi s + \frac{A}{2}\,s^2\right)\exp\left\{\int\limits_s^t \alpha(0)du\right\} ds \leq V_*^0(t),$$

де функція

$$V_*^0(t) = \frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left\{-2\pi - At - \frac{A}{\alpha(0)} + \left(2\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)t\}\right\}$$

набуває значення нуль при $t = 0$, додатних значень при $t > 0$ і є розв'язком інтегрального рівняння

$$V_*^0(t) = \alpha(m)(2\pi t + At^2) + \int\limits_0^t \alpha(0)V_*^0(s)\,ds, \quad t \geq 0.$$

У подальшому будемо використовувати більш грубу оцінку

$$V^0(t) \leq \frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(2\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)t\}, \quad t \geq 0.$$

Проводячи аналогічні міркування при $t \leq 0$, приходимо до оцінки

$$V^0(t) \leq \frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(2\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)|t|\}, \quad t \in R^1,$$

з якої випливає нерівність

$$\|\bar{\varphi}_{t+\delta}(\varphi) - \{\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}), \bar{0}\}\| \leq \frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(2\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\} \tag{7}$$

при всіх $t \in R^1$.

Тепер неважко переконатися, що при всіх $t \in R^1$ справджується оцінка

$$\overline{\|\varphi_{t+\delta}(\varphi) - \varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}, \bar{0})}\| \leq \frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(2\pi + \frac{2A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\}. \tag{8}$$

Використавши (8), запишемо ланцюжок нерівностей

$$\|c(\varphi_{t+\delta}(\varphi)) - c(\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0}))\| \leq \|c(\varphi_{t+\delta}(\varphi)) - c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\varphi) + \tilde{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0}))\| +$$

$$+ \|c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\varphi) + \tilde{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0})) - c(\varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0}))\| \leq$$

$$\leq 2\pi\eta(m)\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\} + \eta(0)\|\overline{\varphi_{t+\delta}(\varphi) - \varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0})}\| \leq$$

$$\leq \left\{2\pi\eta(m) + \eta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(2\pi + \frac{2A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\}. \qquad (9)$$

Аналогічно, використавши нерівності (7) та (8), одержимо оцінки

$$\|c(\bar{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0})) - c(\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}),\bar{0})\| \leq \eta(0)\|\bar{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0}) - \{\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}),\bar{0}\}\| \leq$$

$$\leq \eta(0)\left\{\|\overline{\varphi_{t+\delta}(\varphi) - \varphi_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi},\bar{0})}\| + \|\bar{\varphi}_{t+\delta}(\varphi) - \{\overset{(m)}{\varphi}_{t+\delta}(\overset{(m)}{\varphi}),\bar{0}\}\|\right\} \leq$$

$$\leq 4\eta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\}. \qquad (10)$$

З нерівностей (5), (6), (9) та (10) випливає нерівність

$$\|c(\varphi,t) - c(\overset{(m)}{\varphi},t)\| \leq \eta(m)(2\pi + A|t| + A\Delta^*) +$$

$$+ \left\{2\pi\eta(m) + 6\eta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)(|t| + \Delta^*)\},\ t \in R^1. \qquad (11)$$

Замінивши у співвідношеннях (5), (6), (9) – (11) символи c, Δ^*, $\eta(m)$, δ на B, Γ^*, $\beta(m)$, Γ відповідно, одержимо оцінку

$$\|B(\varphi,t) - B(\overset{(m)}{\varphi},t)\| \leq \beta(m)(2\pi + A|t| + A\Gamma^*) +$$

$$+ \left\{2\pi\beta(m) + 6\beta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)(|t| + \Gamma^*)\},\ t \in R^1. \qquad (12)$$

Оцінимо тепер за нормою різницю $\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))$. Для цього замінимо у співвідношеннях (5), (6), (9) – (11) символи c, Δ^*, $\eta(m)$, δ на P, 0, $p^0(m), 0$ відповідно та отримаємо оцінку

$$\|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| = \|P(\varphi_t(\varphi)) - P(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}),\bar{0})\| \leq p^0(m)(2\pi + A|t|) +$$

$$+ \left\{2\pi p^0(m) + 6p^0(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)|t|\},\ t \in R^1. \qquad (13)$$

Із співвідношень (4) випливають нерівності

$$\|\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi,t)-\mathfrak{c}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi},t)\| \le \|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\| \left\|\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi))-\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\right\| +$$

$$+\left\|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))-\mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\right\| \|\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\|+$$

$$+\|B(\varphi,t)\|\left\|\mathfrak{u}^k(\varphi,t+\Delta)-\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi},t+\Delta)\right\|+$$

$$+\left\|B(\varphi,t)-B(\overset{(m)}{\varphi},t)\right\|\|\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi},t+\Delta)\|+\|c(\varphi,t)-c(\overset{(m)}{\varphi},t)\|.$$

У доведенні наслідку 3 з [1] показано, що при всіх $k \in N$ і $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ норма $\|\mathfrak{u}^k(\varphi)\|$ не перевищує константу $\dfrac{C^0}{1-(\|\mathfrak{B}\|_0+B^0)} = \bar{d} > 0$. Очевидно, що і $\|\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\| \le \bar{d}$ при всіх $k \in N$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Тоді, використовуючи співвідношення (11) – (13), одержуємо нерівності

$$\|\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi,t)-\mathfrak{c}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi},t)\| \le \|P(\varphi)+E\|_0\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0+\bar{d}\Bigg\{p^0(m)(2\pi+A|t|)+$$

$$+\left[2\pi\, p^0(m)+6p^0(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)|t|\}\Bigg\}+$$

$$+B^0\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0+\bar{d}\Bigg\{\beta(m)(2\pi+A|t|+A\Gamma^*)+$$

$$+\left[2\pi\beta(m)+6\beta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)(|t|+\Gamma^*)\}\Bigg\}+$$

$$+\eta(m)(2\pi+A|t|+A\Delta^*)+$$

$$+\left[2\pi\eta(m)+6\eta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)(|t|+\Delta^*)\} \le$$

$$\le \{\|P(\varphi)+E\|_0+B^0\}\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0+$$

$$+\zeta^0(m)\left\{\mathfrak{K}_1\exp\{\alpha(0)|t|\}+\mathfrak{K}_2+\mathfrak{K}_3|t|\right\},$$

де $\zeta^0(m) = \alpha(m)+p^0(m)+\beta(m)+\eta(m) \to 0$ при $m \to \infty$;

$$\mathfrak{K}_1 = \bar{d}\left[2\pi+6\frac{p^0(0)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]+\bar{d}\left[2\pi+6\frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)\Gamma^*\}+$$

$$+\left[2\pi+6\frac{\eta(0)}{\alpha(0)}\left(\pi+\frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)\Delta^*\} = \text{const} > 0,$$

$$\mathfrak{K}_2 = \bar{d}(4\pi + A\Gamma^*) + 2\pi + A\Delta^* = \text{const} > 0,$$

$$\mathfrak{K}_3 = A(2\bar{d} + 1) = \text{const} > 0.$$

Припустимо спочатку, що $\alpha(0) < 1$. Тоді можна записати нерівності

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\{\tau\}\{(\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 +$$

$$+ \zeta^0(m)\,[\mathfrak{K}_1 \exp\{-\alpha(0)\tau\} + \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_3\tau]\}\, d\tau \leq$$

$$\leq (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 +$$

$$+ \zeta^0(m)\left\{\mathfrak{K}_1 \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\{(1-\alpha(0))\tau\}d\tau + \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_3 \int\limits_{-\infty}^{0} \tau\exp\{\tau\}d\tau\right\} \leq$$

$$\leq (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 + \zeta^0(m)\mathfrak{K}_0,$$

де

$$\mathfrak{K}_0 = \left\{\frac{\mathfrak{K}_1}{1-\alpha(0)} + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3\right\} = \text{const} > 0.$$

Одержали рекурентну нерівність, що з урахуванням нерівності $\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0 < 1$ приводить до оцінок

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 \leq \|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})\|_0(\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)^{k+1} +$$

$$+ \zeta^0(m)\mathfrak{K}_0\Big\{(\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)^k + (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)^{k-1} + \ldots$$

$$\ldots + (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0) + 1\Big\} \leq$$

$$\leq \|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 + \zeta^0(m)\mathfrak{K}_0 \sum_{i=0}^{\infty} (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)^i =$$

$$= \|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 + \frac{\zeta^0(m)\mathfrak{K}_0}{1 - (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)}.$$

З рівності

$$\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0 \left\{c(\varphi,\tau) - c(\overset{(m)}{\varphi},\tau)\right\} d\tau$$

та нерівності (11) випливають оцінки

$$\|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\{\tau\}\Bigg\{\eta(m)(2\pi - A\tau + A\Delta^*) +$$

$$+ \left\{2\pi\eta(m) + 6\eta(0)\frac{\alpha(m)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\{\alpha(0)(-\tau + \Delta^*)\}\Bigg\} d\tau \leq \zeta^0(m)\mathfrak{K}_5,$$

де

$$\mathfrak{K}_5 = 2\pi + A\Delta^* + A + \frac{\mathfrak{K}_4}{1 - \alpha(0)},$$

$$\mathfrak{K}_4 = \left[2\pi + 6\frac{\eta(0)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right]\exp\{\alpha(0)\Delta^*\} = \mathrm{const} > 0.$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 \leq \zeta^0(m)\mathfrak{K}_6,$$

де $\zeta^0(m) \to 0$ при $m \to \infty$ і

$$\mathfrak{K}_6 = \mathfrak{K}_5 + \frac{\mathfrak{K}_0}{1 - (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)} = \mathrm{const} > 0.$$

Це означає, що рівномірно відносно $k \in N$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ справджується співвідношення $\lim_{m\to\infty} u_m^k(\overset{(m)}{\varphi}) = u^k(\varphi)$, а отже,

$$u(\varphi) = \lim_{k\to\infty} u^k(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_m^k(\overset{(m)}{\varphi}). \tag{14}$$

Залишилося показати, що $\lim_{m\to\infty} u_m(\overset{(m)}{\varphi}) = u(\varphi)$, тобто повторна границя в рівності (14) має властивість комутативності. Дійсно, запишемо нерівності

$$\|u(\varphi) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \|u(\varphi) - u^k(\varphi)\| + \|u^k(\varphi) - u_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\| + \|u_m^k(\overset{(m)}{\varphi}) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \varepsilon,$$

де ε — як завгодно мале додатне число. Тоді знайдеться такий номер k_0, що при всіх $k \geq k_0$ та $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ виконуються нерівності

$$\|u(\varphi) - u^k(\varphi)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|u_m^k(\overset{(m)}{\varphi}) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

рівномірно відносно $m \in N$. Зафіксуємо будь-яке значення $k \geq k_0$ і одержимо оцінку

$$\|u(\varphi) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|u^k(\varphi) - u_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|.$$

Зрозуміло, що знайдеться такий номер m_0, що при всіх $m \geq m_0$ та $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ виконуватиметься нерівність

$$\|u^k(\varphi) - u^k_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

а разом з нею й оцінка

$$\|u(\varphi) - u_m(\overset{(m)}{\varphi})\| \leq \varepsilon,$$

що завершує доведення теореми у випадку, коли $\alpha(0) < 1$.

Нехай тепер $\alpha(0) \geq 1$. У цьому випадку нерівності (11)–(13) доведеться замінити іншими оцінками.

Очевидно, що при $\alpha(0) \geq 1$ для всіх $t \in R^1$ справджується нерівність $|t| < \exp\{\alpha(0)|t|\}$, а це дає можливість замість (11) одержати оцінку

$$\|c(\varphi, t) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| < \zeta^0(m)\mathfrak{K}_7 \exp\{\alpha(0)|t|\}, \quad t \in R^1,$$

де

$$\mathfrak{K}_7 = 2\pi + A + A\Delta^* + \left\{2\pi + 6\frac{\eta(0)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)\Delta^*\}$$

є додатною сталою.

Врахувавши нерівність $\|c(\varphi, t) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| \leq 2C^0$, легко отримати оцінку

$$\|c(\varphi, t) - c(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| < \left(2C^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_7^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}\,|t|\right\}, \tag{15}$$

де ν — довільне додатне дійсне число.

Аналогічно для будь-якого $t \in R^1$ замість (12) одержуємо нерівність

$$\|B(\varphi, t) - B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| < \zeta^0(m)\mathfrak{K}_8 \exp\{\alpha(0)|t|\},$$

де

$$\mathfrak{K}_8 = 2\pi + A + A\Gamma^* + \left\{2\pi + 6\frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right)\right\}\exp\{\alpha(0)\Gamma^*\}$$

теж є додатною сталою. Враховуючи нерівність $\|B(\varphi, t) - B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| \leq 2B^0$, приходимо до оцінки

$$\|B(\varphi, t) - B(\overset{(m)}{\varphi}, t)\| < \left(2B^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_8^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\}. \tag{16}$$

І, нарешті, для будь-якого $t \in R^1$ замість (13) одержуємо нерівність

$$\|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| < \zeta^0(m)\mathfrak{K}_9 \exp\{\alpha(0)|t|\},$$

де

$$\mathfrak{K}_9 = 4\pi + A + 6\frac{p^0(0)}{\alpha(0)}\left(\pi + \frac{A}{\alpha(0)}\right) = \mathrm{const} > 0.$$

Тепер, врахувавши нерівність $\|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| \le 2P^0$, запишемо оцінку

$$\|\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi)) - \mathfrak{B}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| < \left(2P^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_9^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\}. \qquad (17)$$

Враховуючи нерівності (15) – (17), одержуємо такі співвідношення:

$$\|\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi,t) - \mathfrak{c}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi},t)\| < \|P(\varphi)+E\|_0\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 +$$

$$+ \bar{d}\left(2P^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_9^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\} + B^0\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 +$$

$$+ \bar{d}\left(2B^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_8^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\} +$$

$$+ \left(2C^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_7^{\frac{\nu}{\nu+1}} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\} =$$

$$= \{\|P(\varphi)+E\|_0 + B^0\}\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 +$$

$$+ \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_{10} \exp\left\{\frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}|t|\right\},$$

де

$$\mathfrak{K}_{10} = \bar{d}\left(2P^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{K}_9^{\frac{\nu}{\nu+1}} + \bar{d}\left(2B^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{K}_8^{\frac{\nu}{\nu+1}} + \left(2C^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{K}_7^{\frac{\nu}{\nu+1}} = \mathrm{const} > 0.$$

Тоді можна записати нерівності

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi})\| < \int_{-\infty}^{0} \exp\{\tau\}\{\|P(\varphi)+E\|_0 + B^0\}\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_{10} \exp\left\{\left(1 - \frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}\right)\tau\right\} d\tau =$$

$$= (\|P(\varphi)+E\|_0 + B^0)\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}_m^k(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 + \mathfrak{K}_{11}\left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}},$$

де

$$\mathfrak{K}_{11} = \mathfrak{K}_{10}\frac{1}{1 - \frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}} = \mathrm{const} > 0,$$

а ν вибирається з умови $1 - \dfrac{\alpha(0)\nu}{\nu+1} > 0$.

Одержали рекурентну нерівність, що з урахуванням нерівності $\|P(\varphi)+E\|_0 + B^0 < 1$ приводить до оцінки

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}_m^{k+1}(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 < \|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}_m^0(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 + \frac{\left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_{11}}{1 - (\|P(\varphi)+E\|_0 + B^0)}.$$

Нерівність (15) приводить до оцінки

$$\|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}^0_m(\overset{(m)}{\varphi})\| < \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\{\tau\} \left(2C^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathfrak{K}_7^{\frac{\nu}{\nu+1}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{-\alpha(0)\nu}{\nu+1}\tau\right\} d\tau = \mathfrak{K}_{12} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}},$$

де

$$\mathfrak{K}_{12} = \left(2C^0\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{K}_7^{\frac{\nu}{\nu+1}} \frac{1}{1 - \frac{\alpha(0)\nu}{\nu+1}} = \mathrm{const} > 0.$$

Таким чином, справджується нерівність

$$\|\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) - \mathfrak{u}^{k+1}_m(\overset{(m)}{\varphi})\|_0 < \mathfrak{K}_{13} \left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}},$$

де

$$\mathfrak{K}_{13} = \mathfrak{K}_{12} + \frac{\mathfrak{K}_{11}}{1 - (\|P(\varphi) + E\|_0 + B^0)} = \mathrm{const} > 0.$$

Завершується доведення так само, як і у випадку, коли $\alpha(0) < 1$, оскільки $\left[\zeta^0(m)\right]^{\frac{\nu}{\nu+1}} \to \to 0$ при $m \to \infty$.

Теорему доведено.

Приклад. Покажемо, що для матриці

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 & \frac{1}{2}\sin\varphi_2 & \frac{1}{4}\sin\varphi_3 & \ldots & \frac{1}{2^{j-1}}\sin\varphi_j & \ldots \\ \frac{1}{2}\sin\varphi_1 & \frac{1}{4}\sin\varphi_2 & \frac{1}{8}\sin\varphi_3 & \ldots & \frac{1}{2^j}\sin\varphi_j & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2^{i-1}}\sin\varphi_1 & \frac{1}{2^i}\sin\varphi_2 & \frac{1}{2^{i+1}}\sin\varphi_3 & \ldots & \frac{1}{2^{i+j-2}}\sin\varphi_j & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

виконуються посилені умови Коші – Ліпшиця. Тут через φ позначено вектор $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots)$.

Через φ^1_m позначимо вектор $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \varphi^1_{m+3}, \ldots)$. Легко переконатися, що справджуються нерівності

$$\|P(\varphi) - P(\varphi^1_m)\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\sin\varphi_{k+1} - \sin\varphi^1_{k+1}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\varphi_{k+1} - \varphi^1_{k+1}| \leq \varepsilon(m)\|\varphi - \varphi^1_m\|,$$

де $\varepsilon(m) = \dfrac{1}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} + \dfrac{1}{2^{m+2}} + \ldots = \dfrac{1}{2^{m-1}} \to 0$ при $m \to \infty$, які доводять сформульоване твердження.

Зауваження. А. А. Ельназаровим у [8] розглянуто систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi)x(t) + Ax(t-h) + f(\varphi), \tag{18}$$

що визначена на скінченновимірному торі і є частковим випадком системи (1). Тут $h = \mathrm{const} > 0$ — стале запізнення, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathfrak{M}$, $P(\varphi)$ та A — обмежені за нормою нескінченні матриці, причому елементами останньої з них є сталі числа. Для цієї системи вказано достатні умови побудови інваріантного тора методом укорочення її по змінній x. Зрозуміло, що наведена вище теорема дає можливість звести задачу побудови інваріантного тора системи виду (18), визначеної на декартовому добутку $\mathcal{T}_\infty \times \mathfrak{M}$, до аналогічної задачі щодо послідовності систем рівнянь, визначених на декартовому добутку $\mathcal{T}_m \times R^n$ при умові необмеженого зростання m та n, як це було зроблено для диференціальних рівнянь без відхилення аргументу в монографії [6]. Це зауваження стосується також дослідженої Б.Х. Жанбусиновою системи рівнянь (1) з [9], яка відрізняється від системи (18) тим, що в ній матриця A залежить від φ, а функція f залежить не лише від $\varphi_t(\varphi)$, а й від $\varphi_{t-h}(\varphi)$.

1. *Теплінський Ю. В., Пасюк К. В.* Про існування інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 108–115.
2. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В.* Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 347–367.
3. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. I. Аналитические методы. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. — С. 495–499.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 302 с.
5. *Теплінський Ю. В., Пасюк К. В.* Про неперервну залежність інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь від параметрів // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2010. — Вип. 501. — С. 93–103.
6. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
7. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 475 с.
8. *Ельназаров А. А.* Деякі питання теорії зліченних систем та асимптотичних методів: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1998. — 16 с.
9. *Жанбусинова Б. Х.* Квазипериодические решения счетных систем дифференциально-разностных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1991. — 12 с.

Одержано 01.10.10