УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОНОТОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ПСЕВДОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

А. И. Двирный, В. И. Слынько

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

We consider a generalization of the comparison principle for pseudolinear differential equations, in a Banach space, with impulsive effects. On the basis of these results, we find conditions for global stability in a cone of the trivial solution for the considered class of equations. The obtained results are used for a study of stability in Takagi – Sugeno models.

Розглядається узагальнення принципу порівняння для псевдолінійних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями в банаховому просторі. На основі цих результатів встановлено умови глобальної стійкості в конусі тривіального розв'язку класу систем, що розглядається. Отримані результати застосовуються при дослідженні стійкості в моделях Такагі – Сугено.

Введение. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием [1] являются математическими моделями процессов и явлений в механике, технике и биологии. Теории устойчивости решений этого класса уравнений посвящено много работ (см., например, [2, 5 – 8]). Основными методами исследования устойчивости являются надлежащим образом обобщенные методы А. М. Ляпунова, метод сравнения и др. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве с ограниченным оператором в правой части, записанные в псевдолинейной форме, были предметом исследований в монографии [9] в связи с гипотезой Г. Р. Белицкого – Ю. И. Любича. Исследование устойчивости решений нестационарных нелинейных систем с импульсным воздействием можно существенно упростить за счет введения дополнительных предположений, обеспечивающих монотонность решений дифференциального уравнения по начальным данным относительно порядка, порожденного некоторым конусом.

В данной работе задача об устойчивости нулевого решения исходного нелинейного нестационарного уравнения с импульсным воздействием сводится к исследованию значительно более простой задачи — исследованию устойчивости линейной системы с импульсным воздействием второго порядка, позитивной относительно конуса $\mathbb{R}^2_+$.

Отметим, что для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых являются монотонными по начальным данным относительно конуса неотрицательных элементов, исчерпывающие результаты об устойчивости были получены в работе [10]. Излагаемые ниже утверждения являются развитием этих результатов для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве.

1. Постановка задачи. Пусть X — рефлексивное банахово пространство с нормой

© А. И. Двирный, В. И. Слынько, 2011

$\|.\|_X$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x, \quad t \neq \tau_k,$$
$$x(t+0) = B_k(x(t))x(t), \quad t = \tau_k, \tag{1.1}$$

где $x \in X$, $t \in [a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in C([a,+\infty) \times X; \mathcal{L}(X,X))$, $\mathcal{L}(X,X)$ — линейное банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, $B_k \in C(X, \mathcal{L}(X,X))$ — обратимые операторы при всех $(k,x) \in \mathbb{N} \times X$, $x(t+0)$ — значение функции $x(t)$ справа, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности.

Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что при всех $(t_0,x_0) \in [a,+\infty) \times X$ выполняется неравенство $\|A(t,x)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq M$. Тогда при всех $(t_0,x_0) \in [a,\infty) \times X$ решения $x(t;t_0,x_0)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) существуют, единственны и являются нелокально продолжимыми, поскольку, вследствие теоремы М. А. Красносельского (теорема 1.6 [4]), все решения задачи Коши для соответствующего дифференциального уравнения (1.1) без импульсного воздействия существуют, единственны и являются нелокально продолжимыми, а операторы $B_k(x)$ — обратимыми.

Напомним [3], что непустое выпуклое множество K называется телесным конусом, если

$$\forall \lambda \geq 0\, (\lambda K \subset K): \; K \cap (-K) = 0, \quad \operatorname{int} K \neq \varnothing.$$

Конус K определяет в банаховом пространстве X отношение порядка по правилу

$$y \overset{K}{\geq} x \Leftrightarrow y - x \in K, \quad y \overset{K}{>} x \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} K.$$

Конус K называется нормальным (см. [3]), если существует постоянная $a_K > 0$ такая, что при всех $y,x \in K$ из неравенства $y \overset{K}{\geq} x$ следует оценка $\|x\|_X \leq a_K \|y\|_X$.

Сделаем следующие предположения:

1) пусть в пространстве X задан нормальный конус K;

2) при всех $(t,p) \in [a,+\infty) \times K$ линейная функция $A(t,p)x$ переменной $x \in X$ является квазимонотонной неубывающей относительно конуса K (см. [12]), т. е. для всех $0 \overset{K}{\leq} \varphi$, $\psi \in K^*$ таких, что $(\varphi,\psi) = 0$, выполняется неравенство

$$(A(t,p)\varphi, \psi) \geq 0;$$

3) при всех $(k,p) \in \mathbb{N} \times K$ линейная функция $B_k(p)x$ переменной x является позитивной относительно конуса K (см. [12]), т. е. из неравенства $0 \overset{K}{\leq} \varphi$ следует неравенство

$$B_k(p)\varphi \overset{K}{\geq} 0;$$

4) решение $x(t;t_0,x_0)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) является монотонным по начальным данным относительно конуса K, т. е. если $x_{20} \overset{K}{\geq} x_{10}$, то $x(t;t_0,x_{20}) \overset{K}{\geq} x(t;t_0,x_{10})$ при всех $t \geq t_0$;

5) существуют постоянные векторы $w_1, w_2 \in K$ и функции $\gamma_{ij}(t)$, $\gamma_{ij} \in C([a, +\infty), \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2$, $\gamma_{ij}(t) \geq 0$ при $i \neq j$ такие, что при всех $(t, x) \in [a, +\infty) \times K$ выполняются оценки

$$
\begin{aligned}
A(t,x)w_1 &\overset{K}{\leq} \gamma_{11}(t)w_1 + \gamma_{12}(t)w_2, \\
A(t,x)w_2 &\overset{K}{\leq} \gamma_{21}(t)w_1 + \gamma_{22}(t)w_2;
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

6) существуют постоянные $\delta_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$, $\delta_{ij}^{(k)} \geq 0$, такие, что при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times K$

$$
\begin{aligned}
B_k(x)w_1 &\overset{K}{\leq} \delta_{11}^{(k)}w_1 + \delta_{21}^{(k)}w_2, \\
B_k(x)w_2 &\overset{K}{\leq} \delta_{12}^{(k)}w_1 + \delta_{22}^{(k)}w_2.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X, X)$ будем называть квазимонотонным оператором, если функция $f(x) = Ax$ является квазимонотонно неубывающей.

2. Основной результат. В этом пункте рассматривается глобальная устойчивость решения $x = 0$ уравнения (1.1). Приведем соответствующие определения.

Пусть $w_i \in K, i = 1, 2,$ — элементы из K. Эта пара элементов называется допустимой, если существуют неотрицательные постоянные δ_1 и δ_2 такие, что $w = \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 \in \in \operatorname{int} K$. Напомним [3], что равенство

$$
\|x\|_w = \inf \left\{ \alpha \,|\, -\alpha w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \alpha w \right\}
$$

определяет норму в пространстве X (норма Биркгофа).

Определение 2.1. *Состояние равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения (1.1) называется:*

1) глобально устойчивым в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$, если для любого $t_0 \in [a, \infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ ($\delta(t_0, \varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$) такое, что из условий $x_0 \in K$, $\|x_0\|_w < \delta$ следует неравенство

$$
\|x(t; t_0, x_0)\|_X < \varepsilon \quad \textit{при всех} \quad t \geq t_0;
$$

2) глобально равномерно устойчивым в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$, если $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ в п. 1 можно выбрать независимо от t_0;

3) глобально асимптотически устойчивым в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$, если оно глобально устойчиво в конусе K и для любого $x_0 \in K$

$$
\lim_{t \to \infty} \|x(t; t_0, x_0)\|_X = 0.
$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим (позитивную) линейную двумерную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{du_1}{dt} = \gamma_{11}(t)u_1 + \gamma_{21}(t)u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \gamma_{12}(t)u_1 + \gamma_{22}(t)u_2, \quad t \neq \tau_k, \\ u_1(t+0) = \delta_{11}^{(k)}u_1 + \delta_{12}^{(k)}u_2, \quad u_2(t+0) = \delta_{21}^{(k)}u_1 + \delta_{22}^{(k)}u_2, \quad t = \tau_k.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим через $\Psi(t,t_0) = [\psi_{ij}(t;t_0)]_{i,j=1}^2$ матрицант этой системы уравнений.

Теорема 2.1. *Предположим, что дифференциальное уравнение (1.1) удовлетворяет предположениям 1 – 6 и матрицант $\Psi(t;t_0)$ системы сравнения (2.1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) существуют допустимая пара элементов (w_1, w_2) конуса K, для которой выполняются оценки (1.2), (1.3), и функция $c(t_0) > 0$ такая, что $\psi_{ij}(t;t_0) \leq c(t_0)$, $i,j = 1,2$, при всех $t \geq t_0$;

2) выполняется условие 1 теоремы 2.1 и $\sup\limits_{t_0 \in [a,\infty)} c(t_0) < \infty$;

3) существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \psi_{ij}(t;t_0) = 0, \quad i,j = 1,2.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения (1.1):

1) глобально устойчиво по Ляпунову в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$;

2) глобально равномерно устойчиво по Ляпунову в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$;

3) глобально асимптотически устойчиво по Ляпунову в конусе K по двум нормам $(\|.\|_w, \|.\|_X)$.

Пример. Приведем пример, иллюстрирующий теорему 2.1. Рассмотрим в конечномерном банаховом пространстве $(\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \psi(t,x)Ax, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) = \psi(t,x(t))Bx(t), \quad t = \tau_k,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, A, B — (3×3)-матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\alpha & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\delta \end{pmatrix},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — положительные числа, $\varepsilon \geq 0$ и $\varepsilon < \alpha$.

Моменты импульсного воздействия удовлетворяют неравенствам

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < +\infty.$$

Относительно скалярной функции $\psi(t,x)$ предположим, что при всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ выполняются неравенства

$$0 < \psi_m \le \psi(t,x) \le \psi_M < +\infty, \quad 1 - \delta\psi_m > 0.$$

Пусть $K = \mathbb{R}^3_+$, $w_1 = (1,1,0)^T$, $w_2 = (0,0,1)^T$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\|x\|_\infty = \|x\|_w$, тогда

$$\psi(t,x)Aw_1 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\le} \psi_m(\varepsilon - \alpha)w_1 + 2\varepsilon\psi_M w_2,$$

$$\psi(t,x)Aw_2 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\le} \psi_M\varepsilon w_1 + \psi_M\beta w_2,$$

$$(I + \psi(t,x)B)w_1 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\le} (1 + \psi_M(\gamma+\varepsilon))w_1 + 2\varepsilon\psi_M w_2,$$

$$(I + \psi(t,x)B)w_2 \overset{\mathbb{R}^3_+}{\le} \varepsilon\psi_M w_1 + (1 - \delta\psi_m)w_2.$$

Поэтому система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \psi_m(\varepsilon - \alpha)u_1 + \psi_M\varepsilon u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= 2\varepsilon\psi_M u_1 + \psi_M\beta u_2, \quad t \ne \tau_k, \\ u_1(t+0) &= (1 + \psi_M(\gamma+\varepsilon))u_1 + \varepsilon\psi_M u_2, \\ u_2(t+0) &= 2\varepsilon\psi_M u_1 + (1 - \delta\psi_m)u_2, \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, что матрицант $\Psi(\tau_{k+1}+0, \tau_k+0)$ системы сравнения (2.3) удовлетворяет неравенству

$$\Psi(\tau_{k+1}+0; \tau_k+0) \overset{\mathbb{R}^2_+}{\le} \Psi^*,$$

где

$$\Psi^* = \exp\left[\begin{pmatrix} \psi_m(\varepsilon-\alpha)\theta_1 & \varepsilon\psi_M\theta_2 \\ 2\psi_M\varepsilon\theta_2 & \beta\psi_M\theta_2 + \psi_m(\alpha-\varepsilon)(\theta_2-\theta_1) \end{pmatrix}\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 + \psi_M(\varepsilon+\gamma) & \varepsilon\psi_M \\ 2\psi_M\varepsilon & 1 - \delta\psi_m. \end{pmatrix}.$$

Покажем, что выполнение условия $\rho(\Psi^*) < 1$ гарантирует асимптотическую устойчивость системы сравнения (2.3) и, как следствие, глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (2.2).

Действительно, если $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, то

$$\Psi(t;t_0) \overset{\mathbb{R}^2_+}{\le} \Psi(t;\tau_k+0)(\Psi^*)^{k-1}\Psi(\tau_1+0;t_0).$$

Если $\rho(\Psi^*) < 1$, то $(\Psi^*)^k \to 0$ при $k \to \infty$, откуда следует, что $\Psi(t;t_0) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. Доказательство основной теоремы. Рассмотрим в банаховом пространстве X дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x, \tag{3.1}$$

где $x \in X$, $t \in [a,+\infty)$, а операторнозначная функция $A(t,x)$ удовлетворяет предположениям 2, 5 и при всех $(t,x) \in [a,\infty) \times K$ выполняется неравенство $\|A(t,x)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le M$.

Рассмотрим интервал $[t_0,T] \subset [a,+\infty)$. Пусть $\{t_k\}$ — конечное множество точек этого интервала: $t_0 < t_1 < \ldots < t_s = T$. Обозначим $h = \max\limits_{k=0,s-1}\{t_{k+1} - t_k\}$ и сконструируем функцию

$$x_h(t) = \begin{cases} e^{A(t_0,x_0)(t-t_0)}x_0, \quad t \in [t_0,t_1], \\ e^{A(t_1,x_1)(t-t_1)}x_1, \quad x_1 = x_h(t_1), \quad t \in (t_1,t_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{A(t_{s-1},x_{s-1})(t-t_{s-1})}x_{s-1}, \quad x_{s-1} = x_h(t_{s-1}), \quad t \in (t_{s-1},t_s]. \end{cases}$$

Отметим, что $x_h \in C([t_0,T],X)$.

Лемма 3.1. $\lim\limits_{h\to 0} \sup\limits_{t\in[t_0,T]} \|x(t) - x_h(t)\|_X = 0.$

Рассмотрим некоторое ограниченное подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X,X)$, состоящее из квазимонотонных операторов и удовлетворяющее следующему условию: существуют два вектора $w_1, w_2 \in K$ и для каждого оператора $A \in \mathcal{M}$ существуют постоянные $\gamma_{ij}^{(A)}$, $i,j = 1,2$, $\gamma_{ij}^{(A)} \ge 0$, $i \ne j$, такие, что выполняются неравенства

$$Aw_1 \overset{K}{\le} \gamma_{11}^{(A)}w_1 + \gamma_{12}^{(A)}w_2,$$

$$Aw_2 \overset{K}{\le} \gamma_{21}^{(A)}w_1 + \gamma_{22}^{(A)}w_2,$$

причем $\sup_{A\in\mathcal{M}} |\gamma_{ij}^{(A)}| < \infty$, $i,j = 1,2$.

Лемма 3.2. *Пусть* $h > 0$ *— достаточно малое положительное число. Тогда для любого элемента* A *множества* $\mathcal{M}$ *выполняются неравенства*

$$0 \overset{K}{\le} e^{Ah}w_1 \overset{K}{\le} \pi_{11}^{(A)}w_1 + \pi_{12}^{(A)}w_2 + R_1^{(A)}(h),$$

$$0 \overset{K}{\le} e^{Ah}w_2 \overset{K}{\le} \pi_{21}^{(A)}w_1 + \pi_{22}^{(A)}w_2 + R_2^{(A)}(h),$$

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \|R_i^{(A)}(h)\|_X \le Ch^2, \quad i = 1,2,$$

где $\Pi^{(A)} = [\pi_{ij}^{(A)}]_{i,j=1}^2 = e^{\Gamma^{(A)}h}$, $\Gamma^{(A)} = [\gamma_{ij}^{(A)}]_{i,j=1}^2$ — *матрицы второго порядка,* C — *некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Неравенства $e^{Ah}w_i \overset{K}{\geq} 0$, $i = 1, 2$, следуют из того, что множество $\mathcal{M}$ состоит из квазимонотонных операторов.

Введем обозначения $m_0 = \sup_{A\in\mathcal{M}} \|A\|$, $\gamma_0 = \max_{i,j=1,2} \sup_{A\in\mathcal{M}} |\gamma_{ij}^{(A)}|$. Из условия леммы следует

$$e^{Ah}w_1 = w_1 + hAw_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1 \overset{K}{\leq} (1 + h\gamma_{11}^{(A)})w_1 + h\gamma_{12}^{(A)} w_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1.$$

Из определения матричной экспоненты следуют представления

$$\delta_{ij} + h\gamma_{ij}^{(A)} = \pi_{ij}^{(A)} + r_{ij}^{(A)}, \quad i, j = 1, 2,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $r_{ij}^{(A)}$, $i, j = 1, 2,$ — элементы матрицы $-\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{h^k (\Gamma^{(A)})^k}{k!}$. Поэтому

$$e^{Ah}w_1 \overset{K}{\leq} \pi_{11}^{(A)} w_1 + \pi_{12}^{(A)} w_2 + R_1^{(A)}(h),$$

где

$$R_1^{(A)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} w_1 + r_{11}^{(A)} w_1 + r_{12}^{(A)} w_2.$$

Пусть $h < \min\left\{\dfrac{1}{4\gamma_0}, \dfrac{1}{2m_0}\right\}$, тогда

$$|r_{ij}^{(A)}| \leq \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k (\Gamma^{(A)})^k}{k!} \right\|_E \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2\gamma_0 h)^k}{k!} \leq 2\gamma_0^2 h^2 (1 + 2\gamma_0 h + (2\gamma_0 h)^2 + \ldots) = \frac{2\gamma_0^2 h^2}{1 - 2\gamma_0 h} \leq 4\gamma_0^2 h^2.$$

Здесь $\|.\|_E$ обозначает матричную норму Шмидта.

Оценим $R_1^{(A)}$:

$$\|R_1^{(A)}(h)\|_X \leq 4\gamma_0^2 h^2 (\|w_1\|_X + \|w_2\|_X) + \frac{m_0^2 \|w_1\|_X h^2}{1 - m_0 h} \leq$$

$$\leq h^2 [4\gamma_0^2 (\|w_1\|_X + \|w_2\|_X) + 2m_0^2 \|w_1\|_X] \leq Ch^2,$$

где $C = 2(2\gamma_0^2 + m_0^2)(\|w_1\| + \|w_2\|)$.

Аналогично доказывается оценка для $e^{Ah}w_2$.

Лемма 3.2 доказана.

Рассмотрим двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \gamma_{11}(t)u_1 + \gamma_{21}(t)u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma_{12}(t)u_1 + \gamma_{22}(t)u_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

и обозначим через $\Omega(t, t_0) = [\omega_{ij}(t; t_0)]_{i,j=1}^2$ матрицант этой системы.

Лемма 3.3. *Пусть δ_1, δ_2 — некоторые неотрицательные числа, $x(t; t_0; x_0)$ — решение задачи Коши для дифференциального уравнения (3.1). Тогда при $t \geq t_0$ справедливы оценки*

$$0 \overset{K}{\leq} x(t; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1\omega_{11}(t, t_0) + \delta_2\omega_{12}(t, t_0))w_1 + (\delta_1\omega_{21}(t; t_0) + \delta_2\omega_{22}(t; t_0))w_2.$$

Доказательство. Если $\delta_1 = \delta_2 = 0$, то утверждение леммы очевидно, поэтому будем считать, что $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$. Рассмотрим некоторый интервал $[t_0, T]$, $T > t_0$, и некоторое его разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_s = T$, $t_{k+1} - t_k = \dfrac{T - t_0}{s}$, $k = 0, \ldots, s-1$. Также введем в рассмотрение аппроксимацию $x_h(t; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)$ решения $x(t; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (3.1) и обозначим через $\pi_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2$, $m = 0, 1, \ldots, s$, элементы матриц $\Pi^{(m)}$, определенные формулами $\Pi^{(0)} = I$, $\Pi^{(m)} = e^{\Gamma(t_{m-1})h}$.

Использовав метод математической индукции, установим неравенства

$$\begin{aligned} 0 \overset{K}{\leq} x_m \overset{\text{df}}{=} x_h(t_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) &\overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)})w_1 + \\ &+ (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)})w_2 + r_m(h) \end{aligned} \tag{3.3}$$

при $m = 0, 1, 2, \ldots, s$, где $\beta_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2$, — элементы матриц

$$B^{(0)} = I, \quad B^{(m)} = e^{\Gamma(t_0)h} \ldots e^{\Gamma(t_{m-1})h},$$

а $r_m(h)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\begin{aligned} r_{m+1}(h) = {} & (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)})R_1^{(A(t_m, x_m))}(h) + \\ & + (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)})R_2^{(A(t_m, x_m))}(h) + e^{A(t_m, x_m)h} r_m(h). \end{aligned}$$

Действительно, используя лемму 2.2, при $m = 0$ получаем

$$\begin{aligned} 0 \overset{K}{\leq} x_0 \overset{\text{df}}{=} x_h(t_0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = e^{A(t_0, x_0)(t_0 - t_0)}(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} \\ \overset{K}{\leq} (\delta_1\pi_{11}^{(0)} + \delta_2\pi_{21}^{(0)})w_1 + (\delta_1\pi_{12}^{(0)} + \delta_2\pi_{22}^{(0)})w_2 + r_0(h), \end{aligned}$$

где $r_0(h) = 0$.

Предположим далее, что неравенство (3.3) выполняется при некотором натуральном m. Тогда получим

$$x_h(t_{m+1}; t_0\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = e^{A(t_m,x_m)h} x_m \overset{K}{\geq} 0,$$

$$x_{m+1} = x_h(t_{m+1}; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = e^{A(t_m,x_m)h} x_m \overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)}) e^{A(t_m,x_m)h} w_1 +$$
$$+ (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)}) e^{A(t_m,x_m)h} w_2 + e^{A(t_m,x_m)h} r_m(h).$$

Применяя лемму 3.2, получаем оценку

$$x_{m+1} \overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)})(\pi_{11}^{(m)} w_1 + \pi_{12}^{(m)} w_2) + (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)})(\pi_{21}^{(m)} w_1 + \pi_{22}^{(m)} w_2) +$$
$$+ (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,x_m))}(h) + (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,x_m))}(h) +$$
$$+ e^{A(t_m,x_m)h} r_m(h) = (\delta_1(\beta_{11}^{(m)}\pi_{11}^{(m+1)} + \beta_{12}^{(m)}\pi_{21}^{(m+1)}) +$$
$$+ \delta_2(\beta_{21}^{(m)}\pi_{11}^{(m+1)} + \beta_{22}^{(m)}\pi_{21}^{(m+1)})) w_1 +$$
$$+ (\delta_1(\beta_{11}^{(m)}\pi_{12}^{(m+1)} + \beta_{12}^{(m)}\pi_{22}^{(m+1)}) + \delta_2(\beta_{21}^{(m)}\pi_{12}^{(m+1)} + \beta_{22}^{(m)}\pi_{22}^{(m+1)})) w_2 +$$
$$+ (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,x_m))}(h) +$$
$$+ (\delta_1\beta_{12}^{(m)} + \delta_2\beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,x_m))}(h) + e^{A(t_m,x_m)h} r_m(h).$$

Поскольку $B^{(m+1)} = B^{(m)}\Pi^{(m+1)}$, оценку для x_{m+1} преобразуем к виду

$$x_{m+1} \overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(m+1)} + \delta_2\beta_{21}^{(m+1)}) w_1 + (\delta_1\beta_{12}^{(m+1)} + \delta_2\beta_{22}^{(m+1)}) w_2 +$$
$$+ (\delta_1\beta_{11}^{(m)} + \delta_2\beta_{21}^{(m)}) R_1^{(A(t_m,x_m))}(h) + (\delta_1\beta_{12}^{(m)} +$$
$$+ \delta_2\beta_{22}^{(m)}) R_2^{(A(t_m,x_m))}(h) + e^{A(t_m,x_m)h} r_m(h).$$

Множество $\mathcal{M} = \{A(t,x) \,|(t,x) \in [a,\infty) \times K\} \subset \mathcal{L}(X,X)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Обозначим $\gamma_0 = \max_{i,j=1,2} \max_{t\in[t_0,T]} |\gamma_{ij}(t)|$, тогда $|\beta_{ij}^{(m)}| \leq e^{2m\gamma_0 h}$, $i,j = 1,2$. Оценим норму остатка $r_m(h)$:

$$\|r_{m+1}(h)\|_X \leq e^{Mh}\|r_m(h)\|_X + 2(\delta_1+\delta_2)e^{2m\gamma_0 h} C h^2,$$

тогда

$$\|r_m(h)\|_X \leq v_m,$$

где v_m — решение разностного уравнения

$$v_{m+1} = e^{Mh} v_m + 2C(\delta_1+\delta_2)e^{2m\gamma_0 h} h^2, \quad v_0 = 0.$$

Пусть $v_m = e^{mMh}q_m$, тогда

$$e^{(m+1)Mh}(q_{m+1} - q_m) = 2C(\delta_1 + \delta_2)e^{2m\gamma_0 h}h^2,$$

поэтому

$$q_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} 2Ch^2(\delta_1 + \delta_2)e^{(2\gamma_0 - M)hk - Mh},$$

$$v_m = 2Ch^2(\delta_1 + \delta_2)\sum_{k=0}^{m-1} e^{Mh(m-k-1)}e^{2k\gamma_0 h} \leq 2Ch^2(\delta_1 + \delta_2)e^{mMh}\frac{e^{2mh\gamma_0} - 1}{e^{2h\gamma_0} - 1}.$$

С учетом очевидного неравенства $e^{2\gamma_0 h} - 1 \geq 2\gamma_0 h$ получим оценку

$$\|r_m(h)\|_X \leq \frac{C(\delta_1 + \delta_2)e^{mMh}(e^{2\gamma_0 mh} - 1)}{\gamma_0}h.$$

Таким образом, неравенство (3.3) выполняется при всех $m = 0, 1, 2, \ldots, s$. В частности, при $m = s$ имеем

$$0 \overset{K}{\leq} x_h(t; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1\beta_{11}^{(s)} + \delta_2\beta_{21}^{(s)})w_1 + (\delta_1\beta_{12}^{(s)} + \delta_2\beta_{22}^{(s)})w_2 + r_s(h). \tag{3.4}$$

При этом

$$\|r_s(h)\|_X \leq \frac{C(\delta_1 + \delta_2)e^{M(T-t_0)}(e^{2\gamma_0(T-t_0)} - 1)}{\gamma_0}h.$$

Переходя в неравенстве (3.4) к пределу при $h \to 0$ $(s \to \infty)$, получаем $\|r_s(h)\|_X \to 0$. В силу леммы 3.1

$$\|x_h(T; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) - x(T; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)\|_X \to 0$$

при $h \to 0$. Также очевидно, что $B^{(s)} \to \Omega^T(T; t_0)$ при $h \to 0$ $(s \to \infty)$, поэтому переход к пределу $h \to 0$ в неравенстве (3.3) завершает доказательство леммы, поскольку T выбрано произвольно.

Лемма 3.3 доказана.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1), удовлетворяющее предположениям 1–6.

Лемма 3.4. *Пусть $x(t; t_0, x_0)$ — решение задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1).*

Тогда при $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$0 \overset{K}{\leq} x(t; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1\psi_{11}(t, t_0) + \delta_2\psi_{12}(t, t_0))w_1 + \\ + (\delta_1\psi_{21}(t; t_0) + \delta_2\psi_{22}(t, t_0))w_2, \tag{3.5}$$

где $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\tau_0 = t_0$. Проведем доказательство леммы 3.4 методом математической индукции по k.

При $k = 0$ $t \in [t_0; \tau_1]$ и утверждение леммы следует из леммы 3.3.

Предположим далее, что утверждение леммы справедливо при $k = m - 1$, т. е.

$$0 \overset{K}{\leq} x(\tau_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1 \psi_{11}(\tau_m, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m, t_0)) w_1 +$$
$$+ (\delta_1 \psi_{21}(\tau_m; t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m, t_0)) w_2.$$

Из предположения индукции следует, что

$$x(\tau_m + 0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) = B_m(x(\tau_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)) x(\tau_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq}$$
$$\overset{K}{\leq} (\delta_1 \psi_{11}(\tau_m, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m, t_0)) B_m(x(\tau_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)) w_1 +$$
$$+ (\delta_1 \psi_{21}(\tau_m, t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m, t_0)) B_m(x(\tau_m; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)) w_2.$$

Оценки (1.3) позволяют установить неравенство

$$x(\tau_m + 0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} (\delta_1 \psi_{11}(\tau_m, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m, t_0))(\delta_{11}^{(m)} w_1 + \delta_{21}^{(m)} w_2) +$$
$$+ (\delta_1 \psi_{21}(\tau_m, t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m, t_0))(\delta_{12}^{(m)} w_1 + \delta_{22}^{(m)} w_2) =$$
$$= [\delta_1(\psi_{11}(\tau_m, t_0)\delta_{11}^{(m)} + \psi_{21}(\tau_m, t_0)\delta_{12}^{(m)}) + \delta_2(\psi_{12}(\tau_m, t_0)\delta_{11}^{(m)} + \psi_{22}(\tau_m, t_0)\delta_{12}^{(m)})] w_1 +$$
$$+ [\delta_1(\psi_{11}(\tau_m, t_0)\delta_{21}^{(m)} + \psi_{21}(\tau_m, t_0)\delta_{22}^{(m)}) + \delta_2(\psi_{12}(\tau_m, t_0)\delta_{21}^{(m)} + \psi_{22}(\tau_m, t_0)\delta_{22}^{(m)})] w_2 =$$
$$= (\delta_1 \psi_{11}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m + 0, t_0)) w_1 + (\delta_1 \psi_{21}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m + 0, t_0)) w_2.$$

Применяя лемму 3.3 и монотонность (по начальным данным) решений задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1), при $t \in (\tau_m, \tau_{m+1}]$ получаем

$$0 \overset{K}{\leq} x(t; \tau_m, x(\tau_m + 0; t_0, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2)) \overset{K}{\leq} x(t; \tau_m, (\delta_1 \psi_{11}(\tau_m + 0, t_0) +$$
$$+ \delta_2 \psi_{12}(\tau_m + 0, t_0)) w_1 + (\delta_1 \psi_{21}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m + 0, t_0)) w_2) \overset{K}{\leq}$$
$$\overset{K}{\leq} [\omega_{11}(t, \tau_m)(\delta_1 \psi_{11}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m + 0, t_0)) +$$
$$+ \omega_{12}(t, \tau_m)(\delta_1 \psi_{21}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{22}(\tau_m + 0, t_0))] w_1 +$$
$$+ [\omega_{21}(t, \tau_m)(\delta_1 \psi_{11}(\tau_m + 0, t_0) + \delta_2 \psi_{12}(\tau_m + 0, t_0)) +$$

$$+\,\omega_{22}(t,\tau_m)(\delta_1\psi_{21}(\tau_m+0,t_0)+\delta_2\psi_{22}(\tau_m+0,t_0))]w_2 =$$

$$= [\delta_1(\omega_{11}(t,\tau_m)\psi_{11}(\tau_m+0,t_0)+\omega_{12}(t,\tau_m)\psi_{21}(\tau_m+0,t_0))+$$

$$+\,\delta_2(\omega_{11}(t,\tau_m)\psi_{12}(\tau_m+0,t_0)+\omega_{12}(t,\tau_m)\psi_{22}(\tau_m+0,t_0))]w_1+$$

$$+\,[\delta_1(\omega_{21}(t,\tau_m)\psi_{11}(\tau_m+0,t_0)+\omega_{22}(t,\tau_m)\psi_{21}(\tau_m+0,t_0))+$$

$$+\,\delta_2(\omega_{21}(t,\tau_m)\psi_{12}(\tau_m+0,t_0)+\omega_{22}(t,\tau_m)\psi_{22}(\tau_m+0,t_0))]w_2.$$

С учетом равенств

$$\psi_{ij}(t;t_0)=\sum_{k=1}^{2}\omega_{ik}(t,\tau_m)\psi_{kj}(\tau_m+0,t_0),\quad i,j=1,2,$$

приходим к завершению доказательства леммы.

Лемма 3.4 доказана.

Теперь с помощью леммы 3.4 можно доказать теорему 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $x_0\in K$, тогда $0\overset{K}{\le} x_0\overset{K}{\le}\|x_0\|_w w$, где $w=\delta_1 w_1+$ $+\delta_2 w_2\in\operatorname{int}K$ и

$$0\le x(t;t_0,x_0)\overset{K}{\le} x(t;t_0,\|x_0\|_w w)\overset{K}{\le}$$

$$\le \|x_0\|_w[(\delta_1\psi_{11}(t;t_0)+\delta_2\psi_{12}(t;t_0))w_1+(\delta_1\psi_{21}(t;t_0)+\delta_2\psi_{22}(t;t_0))w_2].$$

Отсюда, вследствие нормальности конуса K,

$$\|x(t;t_0,x_0)\|_X\le 2a_K\|x_0\|_w c(t_0)(\delta_1+\delta_2)(\|w_1\|_X+\|w_2\|_X).$$

Пусть $\varepsilon>0$. Выберем $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)=\dfrac{\varepsilon}{2a_K c(t_0)(\delta_1+\delta_2)(\|w_1\|_X+\|w_2\|_X)}$. Тогда из неравенства $\|x_0\|_w<\delta$ следует неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\|_X<\varepsilon$ при всех $t\ge t_0$.

Доказательство равномерной устойчивости по Ляпунову в конусе K аналогично.

Асимптотическая устойчивость следует из оценки

$$\|x(t;t_0,x_0)\|_X\le\|x_0\|_w[(\delta_1\psi_{11}(t;t_0)+\delta_2\psi_{12}(t;t_0))\|w_1\|_X+$$

$$+\,(\delta_1\psi_{21}(t;t_0)+\delta_2\psi_{22}(t;t_0))\|w_2\|_X]\to 0$$

при $t\to\infty$.

Теорема доказана.

4. Приложение к системам Такаги – Сугено с импульсным воздействием. Рассмотрим дифференциальную модель Такаги – Сугено с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)A_i x,\quad t\ne\tau_k,$$
$$x(t+0)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)B_i x,\quad t=\tau_k, \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, — структурные матрицы модели Такаги – Сугено, $\mu_i(x)$ — нормированные функции принадлежности некоторых нечетких множеств в $\mathbb{R}^n$, $\mu_i \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) = 1.$$

Относительно моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ предположим, что $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пара положительно полуопределенных матриц (X_1, X_2) называется допустимой парой, если существуют неотрицательные постоянные δ_1, δ_2 такие, что матрица $\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2$ является положительно определенной.

Теорема 4.1. *Предположим, что существуют положительно полуопределенные матрицы X_1 и X_2, образующие допустимую пару, постоянные γ_{ij}, $i, j = 1, 2$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, и неотрицательные постоянные δ_{ij}, $i, j = 1, 2$, такие, что выполняются матричные неравенства*

$$A_i X_1 + X_1 A_i^T \leq \gamma_{11} X_1 + \gamma_{21} X_2, \quad i = \overline{1, r},$$

$$A_i X_2 + X_2 A_i^T \leq \gamma_{12} X_1 + \gamma_{22} X_2, \quad i = \overline{1, r},$$

$$\frac{1}{2}(B_i X_1 B_j^T + B_j X_1 B_i^T) \leq \delta_{11} X_1 + \delta_{21} X_2, \quad i, j = \overline{1, r},$$

$$\frac{1}{2}(B_i X_2 B_j^T + B_j X_2 B_i^T) \leq \delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2, \quad i, j = \overline{1, r},$$

и соотношение $\sup\limits_k \|\Delta e^{\Gamma(\tau_{k+1}-\tau_k)}\| < 1$, *где* $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{i,j=1}^2$, $\Delta = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^2$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (4.1) глобально асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Рассмотрим отображение $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $V(x) = xx^T$, и его производную вдоль решений системы (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i V + V A_i^T), \quad t \neq \tau_k, \\ V(t+0) &= \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) B_i x\right) \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j(x) B_j x\right)^T = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(x) \left(B_i V B_j^T + B_j V B_i^T\right), \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Исходную систему дифференциальных уравнений (4.1) расширим линейной системой сравнения (4.2):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) A_i x, \\
\frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) \mathcal{F}_i V, \quad t \neq \tau_k, \\
x(t+0) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) B_i x, \\
V(t+0) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(x) \mathcal{B}_{ij} V(t), \quad t = \tau_k,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{F}_i X = A_i X + X A_i^T$ — операторы Ляпунова, $\mathcal{B}_{ij} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{B}_{ij} X = \dfrac{1}{2}(B_i X B_j^T + B_j X B_i^T)$.

Рассмотрим решения $(x(t;t_0,x_0), V(t;t_0,x_0,V_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ системы (4.3).

Нетрудно показать, что $V(t;t_0,x_0,V_0) \in K$, где $K \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ — конус симметричных положительно полуопределенных матриц.

Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда система сравнения имеет вид

$$
\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t;t_0,x_0)) \mathcal{F}_i V,
$$

$$
V(t+0) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t;t_0,x_0)) \mu_j(x(t;t_0,x_0)) \mathcal{B}_{ij} V.
$$

Из условия теоремы 4.1 следует, что

$$
\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t;t_0,x_0)) \mathcal{F}_i X_1 \overset{K}{\leq} \gamma_{11} X_1 + \gamma_{21} X_2,
$$

$$
\sum_{j=1}^{r} \mu_j(x(t;t_0,x_0)) \mathcal{F}_i X_2 \overset{K}{\leq} \gamma_{12} X_1 + \gamma_{22} X_2,
$$

$$
\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(\tau_k;t_0,x_0)) \mu_j(x(\tau_k;t_0,x_0)) \mathcal{B}_{ij} X_1 \overset{K}{\leq} \delta_{11} X_1 + \delta_{21} X_2,
$$

$$
\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(\tau_k;t_0,x_0)) \mu_j(x(\tau_k;t_0,x_0)) \mathcal{B}_{ij} X_2 \overset{K}{\leq} \delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2.
$$

Обозначим $X = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2$. На основе леммы 3.4 получаем оценки

$$0 \le V(t; t_0, x_0, V_0) \overset{K}{\le} ||V_0||_X((\delta_1\psi_{11}(t,t_0)+$$
$$+ \delta_2\psi_{12}(t,t_0))X_1 + (\delta_1\psi_{21}(t,t_0) + \delta_2\psi_{22}(t,t_0))X_2),$$

$$\|V(t;t_0,x_0,V_0)\|_X \le a_K\|V_0\|_X((\delta_1\psi_{11}(t,t_0)+$$
$$+ \delta_2\psi_{12}(t,t_0))\|X_1\|_X + (\delta_1\psi_{21}(t,t_0) + \delta_2\psi_{22}(t,t_0))\|X_2\|_X).$$

Здесь a_K — постоянная нормальности конуса K, $\psi_{ij}(t,t_0)$, $i,j = 1,2$, — элементы матриканта $\Psi(t,t_0)$ системы сравнения

$$\frac{du}{dt} = \Gamma u, \quad t \ne \tau_k,$$

$$u(t+0) = \Delta u(t), \quad t = \tau_k.$$

Пусть $V_0 = x_0 x_0^T$. Тогда $V(t;t_0,x_0,V_0) = x(t;t_0,x_0)x^T(t;t_0,x_0)$ и из эквивалентности норм в конечномерном пространстве можно вывести оценку

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \le$$
$$\le C\|x_0\|\sqrt{(\delta_1\psi_{11}(t,t_0) + \delta_2\psi_{12}(t,t_0))\|X_1\|_X + (\delta_1\psi_{21}(t,t_0) + \delta_2\psi_{22}(t,t_0))\|X_2\|_X}.$$

Если выполняется условие теоремы, то существует постоянная $c > 0$ такая, что $\psi_{ij}(t;t_0) \le$ $\le c$, $i,j = 1,2$, $t \ge t_0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{C\sqrt{c(\delta_1+\delta_2)(\|X_1\|_X + \|X_2\|_X)}}$. Тогда $\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$. Из условия теоремы следует, что $\psi_{ij}(t;t_0) \to 0$, $i,j = 1,2$, при $t \to \infty$, и тогда $\|x(t;t_0,x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

5. Заключение. В отличие от классического метода сравнения [12] в данной работе в процессе построения системы сравнения не используется аппарат функций Ляпунова. Исследование нестационарной линейной системы сравнения с импульсным воздействием представляет самостоятельную задачу, решение которой может быть значительно упрощено за счет низкого порядка этой системы. В частности, для линейных систем сравнения второго порядка с постоянными параметрами решение задачи об устойчивости всегда может быть получено в явном виде [11].

Отметим также, что применительно к системам Такаги – Сугено с импульсным воздействием предложенный подход (теорема 4.1) позволяет исследовать случаи, когда все элементы структурных множеств являются неустойчивыми. Представляет некоторый интерес применение полученных результатов к исследованию устойчивости импульсных систем со структурными возмущениями (см., например, [13, 14]).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

2. *Цыпкин Я. З.* Теория импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1958. — 724 с.

3. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

4. *Красносельский М. А.* Операторы сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 331 с.

5. *Перестюк Н. А.* К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем // Год. на ВУЗ : Прилож. мат. — София, 1976. — **11**, кн. 1. — С. 145 — 150.

6. *Перестюк Н. А.* Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. — 1977. — № 19. — С. 71 – 76.

7. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1989. — 275 p.

8. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. — 2004. — **40**, № 2. — С. 112 – 122.

9. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2004. — 416 с.

10. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Исследование устойчивости автономных систем сравнения. — Киев, 1978. — 24 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 78.28).

11. *Двирный А. И.* Об оценке границы робастности линейной системы с импульсным воздействием // Доп. НАН України. — 2003. — № 9. — С. 34 – 39.

12. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод сравнения. — Киев: Наук. думка, 1991. — 243 с.

13. *Мартынюк А. А., Чернецкая Л. Н.* К теории устойчивости движения импульсных систем со структурными возмущениями // Прикл. механика. — 2003. — **39**, № 3. — С. 117 – 125.

14. *Миладжанов В. Г.* Об устойчивости крупномасштабной импульсной системы при структурных возмущениях // Доп. НАН України. — 1992. — № 11. — С. 59 – 62.

Получено 21.04.10,
после доработки — 22.03.11