УДК 517.9

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ЗБУРЕНИХ УЛЬТРАСУБГАРМОНІК СИСТЕМИ З ПІВТОРА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ГАМІЛЬТОНОВОЇ

Ю. Є. Вакал, І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

We consider a 2-D autonomous Hamiltonian system with heteroclinic contour under the impact of a time periodic perturbation. It is shown that the number of ultrasubharmonics in the perturbed system is estimated from below by a function proportional to a square of logarithm of the perturbation parameter when this parameter tends to zero.

Рассматривается двумерная автономная гамильтонова система з гетероклиническим контуром, подвергающаяся воздействию периодического по времени возмущения. Показано, что количество ультрасубгармоник в возмущенной системе при стремлении параметра возмущения к нулю оценивается снизу функцией, пропорциональной квадрату логарифма этого параметра.

1. Вступ. Розглянемо двовимірну автономну гамільтонову систему в типовому випадку, коли деяка область фазової площини розшаровується замкненими лініями рівня гамільтоніана, причому межею зазначеної області є гомоклінічний або гетероклінічний контур. Як відомо [1], у такій області можна ввести змінні дія-кут $(I, \varphi | \mathrm{mod} 2\pi)$, у яких гамільтоніан системи залежатиме лише від змінної дії: $H = H(I)$. Якщо p/q — раціональне число з області значень функції $H'(I)$, а $I_{p/q}$ — таке значення дії, що $H'(I_{p/q}) = p/q$, то лінія рівня $I = I_{p/q}$ складається з початкових значень $2\pi q$-періодичних розв'язків системи, які в координатах дія-кут мають вигляд $I = I_{p/q},\ \varphi = tp/q + \varphi_0$ (φ_0 — довільна стала). Ці розв'язки називають (q/p)-*ультрасубгармоніками* (q-*субгармоніками*, якщо $p = 1$).

Нехай тепер система зазнає малого неавтономного 2π-періодичного за часом збурення. Запишемо збурену систему в змінних дія-кут:

$$\dot{I} = \mu^2 Y(t, I, \varphi), \quad \dot{\varphi} = H'(I) + \mu^2 \Psi(t, I, \varphi). \tag{1}$$

Тут Y та Ψ — 2π-періодичні функції по кожній зі змінних t та φ (інші умови, які мають задовольняти ці функції, будуть описані пізніше), μ — малий додатний параметр. Розв'язки збуреної системи, які мають вигляд

$$I = I_{p/q} + \mu y(t; \mu), \quad \varphi = \frac{p}{q} t + \psi(t; \mu),$$

де $y(t; \mu), \psi(t; \mu)$ — $2\pi q$-періодичні щодо часу функції, називатимемо збуреними (q/p)-*ультрасубгармоніками* (q-*субгармоніками*, якщо $p = 1$). У типовому випадку збурені ультрасубгармоніки вже не утворюють однопараметричної сім'ї. Класичним методом Пуанкаре неважко довести існування збурених (q/p)-ультрасубгармонік для всіх значень параметра μ з деякого малого проміжку $(0, \mu_{p/q})$ (залежного від p/q), якщо виконано дві умови: 1) $H''(I_{p/q}) \neq 0$ — умова невиродженості незбуреного гамільтоніана в точці $I_{p/q}$;

2) наявність хоча б одного простого нуля $\psi_{p/q}$ так званої ультрасубгармонічної функції Пуанкаре

$$P_{q/p}(\psi) := \frac{1}{2\pi q} \int\limits_0^{2\pi q} Y\left(t, I_{p/q}, \frac{p}{q}t + \psi\right) dt,$$

або, що те саме, ультрасубгармонічної функції Мельникова $\mathcal{M}_{q/p}(\theta) = 2\pi p P_{q/p}(\theta p/q)$. Виконання зазначених умов дає змогу в околі точки $(I_{p/q}, \psi_{p/q})$ за допомогою теореми про неявну функцію встановити існування нерухомої точки q-ї ітерації відображення Пуанкаре збуреної системи. При такому підході, як правило, лише констатується факт існування числа $\mu_{p/q}$, однак залишається поза увагою характер його залежності від частоти p/q. Зокрема, залишається відкритим питання: скільки збурених ультрасубгармонік одночасно існують при заданому достатньо малому значенні параметра μ? Технічна складність цього питання обумовлена тим, що коли при фіксованому p спрямувати q до нескінченності, то $I_{p/q} \nearrow I^*$, де I^* — граничне значення змінної дії, яке відповідає гетероклінічному контуру, а при наближенні I до I^* модулі функцій $Y(t, I, \varphi)$, $\Psi(t, I, \varphi)$ та їхніх похідних стають необмеженими. Мета даної роботи якраз і полягає у встановленні нижніх оцінок для кількості збурених ультрасубгармонік.

Слід зауважити, що коли незбурена система має гомоклінічний (а не гетероклінічний) контур, у який в границі при $c \to I^* = \lim\limits_{q\to\infty} I_{1/q}$ перетворюються замкнені лінії рівня $\{I = c\}$, то при всіх досить великих q перша умова виконується автоматично, а для перевірки другої умови у випадку $p = 1$ достатньо переконатися в наявності простих нулів так званої гомоклінічної функції Мельникова $\mathcal{M}(\theta)$, яка, як виявляється, є рівномірною щодо θ границею субгармонічних функцій Мельникова: $\mathcal{M}(\theta) = \lim\limits_{q\to\infty} \mathcal{M}_q(\theta)$ [2, 3]. Більш складний випадок, коли в границі при $c \to I^*$ лінії рівня перетворюються в гетероклінічний контур, розглянуто в [4–6]. У цих роботах з метою вивчення явища буферності у системі (1) (воно полягає в необмеженому наростанні кількості стійких періодичних розв'язків при $\mu \to 0$) було описано структуру часткових границь послідовностей функцій $\left\{M_{q/p}(\theta)\right\}_{q\in\mathbb{N}}$, зокрема показано, яким чином ці границі пов'язані з гетероклінічними функціями Мельникова.

У даній роботі з метою встановлення нижніх оцінок для кількості збурених ультрасубгармонік також використовуються гетероклінічні функції Мельникова, точніше їх p-фільтрації (p-фільтрацією функції Мельникова називаємо функцію, яку отримано з ряду Фур'є функції Мельникова вилученням гармонік з номерами, що не є кратними p). Обмежившись випадком незбуреного гамільтоніана механічного типу, який зображується сумою кінетичної і потенціальної енергій, ми за допомогою p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельникова утворюємо деяку незалежну від q подвійно періодичну функцію $G_p(\theta, \vartheta)$ і показуємо, що кожному раціональному p/q можна поставити у відповідність таке $\vartheta_{p/q}$ (час руху незбуреної системи по чверті дуги циклу $I = I_{p/q}$), щоб функція $G_p(q\psi/p, \vartheta_{p/q})/(2\pi p)$ наближала функцію Пуанкаре $P_{q/p}(\psi)$ з точністю порядку $\sqrt{E^* - E_{p/q}}$, де E^* — рівень енергії гетероклінічного контура, $E_{p/q}$ — рівень енергії (q/p)-ультрасубгармоніки (теорема 3). На основі цього факту ми доводимо основну теорему (теорема 4), суть якої полягає в тому, що при досить природних додаткових обмеженнях на незбурений гамільтоніан у випадку, коли $p = 1$ або p — просте число і хоча б при одному $\vartheta = \vartheta_p$ функція $G_p(\cdot, \vartheta_p)$ змінює знак, кількість (q/p)-ультрасубгармонік при

$\mu \to 0$ зростає не повільніше, ніж $\varsigma \ln^2 \mu$, де ς — додатний коефіцієнт, який виражається через певні характеристики функції G_p. Зауважимо, що допоміжна теорема 1 та її застосування до системи (1) — теорема 2 — дають змогу уникнути перевірки простоти нулів функції $G_p(\cdot, \vartheta_p)$. Використавши ці теореми, можна відмовитися також від умови простоти нулів часткових границь послідовностей функцій $\left\{M_{q/p}(\theta)\right\}_{q\in\mathbb{N}}$, яка вимагалася в [4–6], замінивши її умовою знакозмінності цих часткових границь. Зазначимо також, що ми оцінюємо кількість не всіх довгоперіодичних розв'язків збуреної системи, а лише ультрасубгармонік в сенсі наведеного вище означення. При кожному досить малому значенні μ унаслідок розщеплення сепаратрис в цій системі може з'являтися підкова Смейла, а отже, безліч розв'язків як завгодно великого періоду, але іншої природи — жоден із них при $\mu \to 0$ не перетворюється в одну із незбурених ультрасубгармонік.

2. Допоміжна теорема існування T-періодичного розв'язку T-періодичної системи. Для вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})$ та матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{2n}$ покладемо $|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, \ldots, |x_{2n}|)$, $|\mathbf{A}| = \{|a_{ij}|\}_{i,j=1}^{2n}$ і визначимо їхні норми рівностями

$$\|x\| := \max_i |x_i|, \quad \|\mathbf{A}\| := \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|.$$

Для пари $2n$-вимірних векторів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ нерівність $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ (відповідно $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$) означає, що $x_i \geq y_i$ (відповідно $x_i > y_i$) для всіх $i = 1, \ldots, 2n$. Вектор з додатними (невід'ємними) компонентами називатимемо додатним. Для кожного додатного вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_{2n})$ уведемо позначення

$$B_{\boldsymbol{r}} := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n} : |\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{r}\right\}, \quad S_{\boldsymbol{r}} := \partial B_{\boldsymbol{r}}.$$

Якщо $\boldsymbol{F}(z)$ — деяке векторнозначне неперервне відображення, визначене на деякому компакті $\mathcal{K}$, то через $\max_{z\in\mathcal{K}} \boldsymbol{F}(z)$ позначатимемо вектор, компонентами якого є максимуми по множині $\mathcal{K}$ компонент цього відображення.

Теорему, яка наводиться нижче, слід розглядати як деяку модифікацію відомих результатів про періодичні розв'язки неавтономних систем, встановлених на основі геометричних принципів [7–12]. Оскільки нас насамперед цікавлять оцінки на малий параметр, то наведемо цю теорему з повним доведенням.

Теорема 1. *Нехай система*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

задовольняє такі умови:

(H_1) *система* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ *гамільтонова з гамільтоніаном* $F(t, \boldsymbol{x}) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \times B_{\boldsymbol{r}})$, *тобто* $\boldsymbol{f}(t, x) = \mathbf{J}\nabla_{\boldsymbol{x}} F(t, \boldsymbol{x})$, *де* $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathbf{E}_n$ — n-*вимірна одинична матриця*), *і* T-*періодична за змінною* t, *тобто* $\boldsymbol{f}(t+T, \boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, *причому існує* $(2n \times 2n)$-*вимірна матриця* $\mathbf{L}$ *з невід'ємними елементами така, що*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\nabla_{\boldsymbol{x}} F(s, \boldsymbol{x}_1) - \nabla_{\boldsymbol{x}} F(s, \boldsymbol{x}_2)|\, ds \leq \mathbf{L}\, |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B_{\boldsymbol{r}};$$

(H_2) *функція* $\boldsymbol{g}(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}\times B_{\boldsymbol{r}} \mapsto \mathbb{R}^{2n})$ *локально ліпшицева за змінною* $\boldsymbol{x}$ *і* T*-періодична за змінною* t;

(H_3) *додатні вектори* $\boldsymbol{r}$ *та* $\boldsymbol{M} := \max\limits_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times B_{\boldsymbol{r}}} \{|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})|\}$ *задовольняють нерівність* $T\boldsymbol{M} < \boldsymbol{r}$;

(H_4) *для усередненого гамільтоніана* $\bar{F}(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(t,\boldsymbol{x})\,dt$ *можна вказати додатний вектор* $\boldsymbol{\rho} \le \boldsymbol{r} - T\boldsymbol{M}$ *такий, що* $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in S_{\boldsymbol{\rho}}} \left\|\nabla\bar{F}(\boldsymbol{x})\right\| > 0$, *обертання векторного поля* $\nabla\bar{F}(\boldsymbol{x})$ *на гіперповерхні* $S_{\boldsymbol{\rho}}$ *(степінь відображення* $\dfrac{\nabla\bar{F}}{\left\|\nabla\bar{F}\right\|} : S_{\boldsymbol{\rho}} \mapsto \mathbb{S}^{2n-1}$*) не дорівнює нулю і вектор* $\left|\nabla\bar{F}(\boldsymbol{x})\right| - T\mathbf{L}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$, *де* $\boldsymbol{N} := \max\limits_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times B_{\boldsymbol{r}}} |\mathbf{J}|\,|g(t,\boldsymbol{x})|$, *при кожному* $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{\rho}}$ *має хоча б одну додатну компоненту.*

Тоді система (2) має T*-періодичний розв'язок* $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_*)$ *із значеннями в* $B_{\boldsymbol{r}}$, *причому його початкове значення* $\boldsymbol{x}_*$ *є внутрішньою точкою множини* $B_{\boldsymbol{\rho}}$.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)$ — розв'язок системи (2), що задовольняє початкову умову $\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$. Має місце зображення $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}_0)$, де функція $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}) = \int\limits_0^t \left[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x}))\right] ds.$$

Визначимо множину $\Omega_{\boldsymbol{r}} := \{(t,\boldsymbol{x}) : t\in[0,T], |\boldsymbol{x}| \le \boldsymbol{r} - T\boldsymbol{M}\}$. Застосувавши метод послідовних наближень, неважко показати, що на цій множині функція $\boldsymbol{y}(\cdot,\cdot)$ коректно визначена, неперервна, задовольняє рівність $\boldsymbol{y}(0,\boldsymbol{x}) = 0$ і нерівність

$$|\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})| \le T\boldsymbol{M}. \tag{3}$$

Очевидно, що періодичні розв'язки системи (2) відповідають тим $\boldsymbol{x}$, які задовольняють рівняння $\boldsymbol{y}(T,\boldsymbol{x}) = 0$ або, що те саме, рівняння

$$\int\limits_0^T \left[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x}))\right] ds = 0,$$

яке з урахуванням умови (H_1) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \nabla_{\boldsymbol{x}} F(s,\boldsymbol{x})ds + \frac{1}{T}\int_0^T \left[\nabla_{\boldsymbol{z}} F(s,\boldsymbol{z})\big|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x})} - \nabla_{\boldsymbol{x}} F(s,\boldsymbol{x})\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{x}))\,ds = 0,$$

тобто

$$\boldsymbol{X}(x) + \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{4}$$

де $\boldsymbol{X}(x) = \nabla \bar{F}(\boldsymbol{x})$, а векторне поле $\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})$ з урахуванням (3), умов теореми 1 та вигляду матриці $\mathbf{J}$ задовольняє нерівність $|\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})| \leq T\mathbf{L}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ при $|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{r} - T\boldsymbol{M}$.

Оскільки при довільному $\theta \in [0,1]$ маємо

$$|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) + \theta \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})|_{|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{\rho}} \geq |\boldsymbol{X}(x)|_{|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{\rho}} - T\mathbf{L}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N},$$

а поле $|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})| - T\mathbf{L}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ при кожному $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{\rho}}$ має хоча б одну додатну компоненту, то поле $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) + \theta \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})$ на $S_{\boldsymbol{\rho}}$ не має особливих точок, а тому поля $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})$ і $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ гомотопні. Звідси випливає, що обертання поля $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x})$ на гіперповерхні $S_{\boldsymbol{\rho}}$ не дорівнює 0, а отже, рівняння (4) має принаймні один розв'язок $\boldsymbol{x}_*$ усередині $B_{\boldsymbol{\rho}}$. Тоді $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_*) := \boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}_*)$ — шуканий періодичний розв'язок.

Теорему 1 доведено.

3. Ультрасубгармоніки близької до інтегровної системи з півтора ступенями вільності та 2π-періодичним за часом гамільтоніаном. Нехай маємо двовимірну автономну гамільтонову систему, для якої можна вказати область фазової площини, розшарована замкненими фазовими кривими. Як відомо [1], у цій області можна ввести змінні дія-кут $(I, \varphi$ $|\mathrm{mod} 2\pi)$, у яких гамільтоніан системи залежатиме лише від змінної дії: $H = H(I)$.

Розглянемо тепер збурену систему (1) і припустимо, що функції $H(I)$, $Y(t, I, \varphi)$ та $\Psi(t, I\varphi)$ задовольняють такі умови:

(H_5) $H(\cdot) \in \mathrm{C}^2\left((I_*, I^*) \mapsto \mathbb{R}\right)$, $Y(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\Psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R} \times (I_*, I^*) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\right)$, причому функції $Y(t, I, \varphi)$, $\Psi(t, I, \varphi)$ 2π-періодичні щодо змінних t, φ, а незбурений гамільтоніан невироджений у тому сенсі, що $H''(I) \neq 0$ для всіх $I \in (I_*, I^*)$;

(H_6) функція $P_{q/p}(\psi)$ знакозмінна, а отже, виконується нерівність

$$\eta_{p/q} := \min\left\{\max_{\psi\in[0,2\pi]} P_{q/p}(\psi), -\min_{\psi\in[0,2\pi]} P_{q/p}(\psi)\right\} > 0. \tag{5}$$

Застосуємо теорему 1 для оцінювання інтервалу значень параметра μ, при яких існують збурені (q/p)-ультрасубгармоніки системи (1).

Заміна $I = I_{p/q} + \mu y$, $\varphi = \psi + \dfrac{p}{q}t$ зводить цю систему до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mu Y\left(t, I_{p/q} + \mu y, \frac{p}{q}t + \psi\right), \\ \dot{\psi} &= H'(I_{p/q} + \mu y) - H'(I_{p/q}) + \mu^2 \Psi\left(t, I_{p/q} + \mu y, \frac{p}{q}t + \psi\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Покладемо

$$F(t, y, \psi; \mu) := \frac{H(I_{p/q} + \mu y) - \mu H'(I_{p/q}) y}{\mu} - \mu \int\limits_0^{\psi} Y\left(t, I_{p/q}, \frac{p}{q}t + s\right) ds,$$

$$\boldsymbol{f}(t,y,\psi;\mu) := \begin{pmatrix} \mu Y\left(t, I_{p/q}, \dfrac{p}{q}t+\psi\right) \\ \\ H'(I_{p/q}+\mu y) - H'(I_{p/q}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(t,y,\psi;\mu) := \begin{pmatrix} \mu\left[Y\left(t, I_{p/q}+\mu y, \dfrac{p}{q}t+\psi\right) - Y\left(t, I_{p/q}, \dfrac{p}{q}t+\psi\right)\right] \\ \\ \mu^2\Psi\left(t, I_{p/q}+\mu y, \dfrac{p}{q}\,t+\psi\right) \end{pmatrix}.$$

Нехай ψ_-, ψ_+ — будь-яка пара точок відрізка $[-\pi,\pi]$, в яких $P_{q/p}(\psi)$ досягає відповідно мінімуму та максимуму, причому без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що $\psi_- < \psi_+$ і центр відрізка між точками ψ_+, ψ_- знаходиться в нулі. Покладемо $\rho_\psi := |\psi_+ - \psi_-|/2$.

Далі, припустимо, що для деякого $\delta = \delta_{p/q} > 0$ точка $I_{p/q}$ належить (I_*, I^*) разом зі своїм замкненим δ-околом. При застосуванні теореми 1 до розглядуваного випадку введемо позначення

$$\begin{gathered} D_{p/q} := [0,2\pi]\times\left\{I\in\mathbb{R}:\ \left|I-I_{p/q}\right|\le\delta\right\}\times[0,2\pi], \\ m_{p/q} := \min_{\left|I-I_{p/q}\right|\le\delta}\left|H''(I)\right|, \quad M_{p/q} := \max_{\left|I-I_{p/q}\right|\le\delta}\left|H''(I)\right|, \\ |Y|_{p/q} := \max_{D_{p/q}}|Y(t,I,\varphi)|, \quad |\Psi|_{p/q} := \max_{D_{p/q}}|\Psi(t,I\varphi)|, \\ \left|Y_I'\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}}\left|Y_I'(t,I,\varphi)\right|, \quad \left|Y_\varphi'\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}}\left|Y_\varphi'(t,I_{p/q},\varphi)\right| \end{gathered} \tag{7}$$

і покладемо

$$\bar{F}(y,\psi;\mu) = \frac{H(I_{p/q}+\mu y) - \mu H'(I_{p/q})y}{\mu} - \mu\int\limits_0^\psi P_{q/p}(s)ds,$$

$$T = 2\pi q, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_y \\ r_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho_y + \mu T\,|Y|_{p/q} \\ \\ \rho_\psi + \mu T\left[M_{p/q}r_y + \mu\,|\Psi|_{p/q}\right] \end{pmatrix},$$

де ρ_y — додатне число, вибір якого буде зроблено пізніше. Тоді матриця $\mathbf{L}$ і вектори $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ з теореми 1 у розглядуваному тут випадку задовольнятимуть нерівності

$$\mathbf{L} \le \mu\begin{pmatrix} M_{p/q} & 0 \\ 0 & \left|Y_\varphi'\right|_{p/q} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \le \mu\begin{pmatrix} |Y|_{p/q} \\ M_{p/q}r_y + \mu\,|\Psi|_{p/q} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} \le \mu^2\begin{pmatrix} |\Psi|_{p/q} \\ \left|Y_I'\right|_{p/q} r_y \end{pmatrix},$$

якщо вимагати, щоб

$$\mu r_y = \mu\rho_y + \mu^2 T\,|Y|_{p/q} \le \delta. \tag{8}$$

Водночас виконуватиметься також й умова (H_3).

Далі, в розглянутому випадку

$$S_{\boldsymbol{\rho}} := \{(y,\psi) : |y| = \rho_y,, |\psi| \le \rho_\psi\} \cup \{(y,\psi) : |y| \le \rho_y,, |\psi| = \rho_\psi\}$$

— прямокутник. На його правій і лівій сторонах y-компонента вектора $\nabla \bar{F}$ набуває значень різного знаку і задовольняє умову

$$\left|H'\left(I_{p/q} \pm \mu\rho_y\right) - H'\left(I_{p/q}\right)\right| \ge \mu \min_{\left|I - I_{p/q}\right| \le \mu\rho_y} \left|H''(I)\right| \rho_y \ge \mu m_{p/q}\rho_y,$$

а на верхній і нижній сторонах значень різного знаку набуває ψ-компонента цього вектора, до того ж $\left|P_{q/p}(\psi_\pm)\right| \ge \eta_{p/q}$. Відтак обертання поля $\nabla\bar{F}$ на $S_{\boldsymbol{\rho}}$ дорівнює 1 або -1, а виконання умови (H_4) з урахуванням вигляду $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ і (8) гарантуватимуть нерівності

$$m_{p/q}\rho_y > \mu\left(TM_{p/q}\,|Y|_{p/q} + |\Psi|_{p/q}\right), \tag{9}$$

$$\eta_{p/q} > \mu\left(T\left|Y'_\varphi\right|_{p/q}\left[M_{p/q}r_y + \mu\,|\Psi|_{p/q}\right] + \left|Y'_I\right|_{p/q} r_y\right). \tag{10}$$

Визначивши

$$\nu_{p/q} := \frac{2\pi q\left[M_{p/q} + m_{p/q}\right]|Y|_{p/q} + |\Psi|_{p/q}}{m_{p/q}}, \tag{11}$$

$$\kappa_{p/q} := \left[2\pi q M_{p/q}\left|Y'_\varphi\right|_{p/q} + \left|Y'_I\right|_{p/q}\right]\nu_{p/q} + 2\pi q\left|Y'_\varphi\right|_{p/q}|\Psi|_{p/q}, \tag{12}$$

зауважимо, що вибором ρ_y можна розпорядитися так, щоб виконувалася нерівність (9) і за рахунок мализни різниці $r_y - \mu\nu_{p/q}$ з нерівностей

$$\mu^2\nu_{p/q} < \delta, \quad \eta_{p/q} > \mu^2\kappa_{p/q}$$

випливали відповідно нерівності (8) і (10).

Застосовуючи теорему 1, встановлюємо існування $2\pi q$-періодичного розв'язку системи (6) у прямокутнику $B_{\boldsymbol{r}} = \{|y| \le r_y\} \times \{|\psi| \le r_\psi\}$ з початковим значенням усередині прямокутника $B_{\boldsymbol{\rho}} = \{|y| \le \rho_y\} \times \{|\psi| \le \rho_\psi\}$. Зауважимо, що ті самі умови гарантують існування ще одного $2\pi q$-періодичного розв'язку системи (6), якщо замість відрізка $[\psi_-, \psi_+]$ розглянути відрізок між ψ_+ і найближчою справа від ψ_+ точкою мінімуму функції $P_{q/p}(\psi)$. Отже, кожній послідовній парі точок, в яких функція $P_{q/p}(\psi)$ досягає мінімуму і максимуму, відповідає пара збурених (q/p)-ультрасубгармонік системи (6).

Тепер зауважимо, що, як відомо, функція $P_{p/q}(\psi)$ має період $2\pi/q$. Справді, вибравши цілі числа k, l так, щоб $pk + ql + 1 = 0$, дістанемо

$$P_{q/p}\left(\psi + \frac{2\pi}{q}\right) = \frac{1}{2\pi q}\int\limits_0^{2\pi q} Y\left(t + 2\pi k, I_{p/q}, \frac{p}{q}(t + 2\pi k) + \psi + 2\pi l + \frac{2\pi}{q}\right)dt =$$

$$= P_{q/p}\left(\psi + 2\pi\frac{pk + ql + 1}{q}\right) = P_{q/p}(\psi).$$

Звідси випливає, що на $[0, 2\pi]$ існують принаймні q різних точок мінімумів і q різних точок максимумів функції $P_{q/p}(\psi)$.

З урахуванням викладеного можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Припустимо, що система (1) задовольняє умови* (H_5), (H_6). *Тоді якщо справджуються нерівності* $0 < \delta_{p/q} < \min\left\{I_{p/q} - I_*, I^* - I_{p/q}\right\}$ *та*

$$\min\left\{\frac{\delta_{p/q}}{\nu_{p/q}}, \frac{\eta_{p/q}}{\kappa_{p/q}}\right\} > \mu^2, \tag{13}$$

де $\nu_{p/q}$, $\kappa_{p/q}$ *визначені формулами (11), (12), то існує принаймні* $2q$ *збурених* (q/p)*-ультрасубгармонік системи (1).*

Теорема 2 встановлює умови існування періодичних розв'язків, що зберігаються при руйнуванні індивідуального резонансного циклу незбуреної системи. Її відмінність від класичних результатів Пуанкаре полягає насамперед у тому, що вона не містить умови простоти коренів функції $P_{q/p}(\psi)$. Замість цього вимагається лише, щоб зазначена функція не була тотожно рівною нулю. Як наслідок, замість застосування теореми про неявну функцію для встановлення існування нерухомих точок відображення Пуанкаре використовується елементарна теорія степеня відображення. Аналогічний підхід з дещо іншою метою був застосований нещодавно у роботі [12].

Водночас зауважимо, що зазначена теорема не дає безпосередньої відповіді на питання про те, скільки ультрасубгармонік для різних раціональних частот p/q продовжує існувати в збуреній системі при заданому малому додатному значенні параметра μ. Основна проблема тут полягає в нез'ясованості характеру залежності $\eta_{p/q}$ від p/q. Часткове подолання цієї проблеми полягає в тому, щоб оцінити знизу $\eta_{p/q}$ через $\delta_{p/q}$ за допомогою гетероклінічних функцій Мельникова.

4. Збурені ультрасубгармоніки і функція Мельникова. Розглянемо випадок, коли незбурений гамільтоніан у канонічних координатах (u, v) має вигляд $H(u,v) = \dfrac{v^2}{2} + \Pi(u)$ (сума кінетичної і потенціальної енергій), причому для деякого критичного значення енергії E^* множина $H^{-1}(E^*)$ містить гетероклінічний контур. Точніше, припускаємо, що існують дві послідовні точки u_-^*, u_+^* строгого локального максимуму потенціальної енергії (без обмеження загальності міркувань вважаємо, що $u_-^* < 0$, $u_+^* > 0$), для яких виконуються умови:

(H_7) на відрізку $\left[u_-^*, u_+^*\right]$ потенціальна енергія тричі неперервно диференційовна, досягає мінімального рівного нулю значення в точці $u = 0$, $\Pi(u_\pm^*) = E^*$, $\Pi'(u_\pm^*) = 0$, $\Pi''(u_\pm^*) = -\lambda_\pm^2 < 0$, де $\lambda_\pm := \sqrt{\left|\Pi''(u_\pm^*)\right|}$, і $\Pi(u) < E^* = \Pi(u_\pm^*)$ для всіх $u \in (u_-^*, u_+^*)$.

Згідно з припущенням (H_7), можна вибрати досить близьке до E^* значення $E^\circ < E^*$ і точки $u_-^\circ \in (u_-^*, 0)$, $u_+^\circ \in (0, u_+^*)$ так, щоб $\Pi(u_\pm^\circ) = E^\circ$ і справджувалися нерівності

$$\lambda_\pm^\circ := \min\left\{\sqrt{|\Pi''(u)|} : \pm u_\pm^\circ \le \pm u \le \pm u_\pm^*\right\} > 0, \quad \Pi(u) < E^\circ \quad \forall u \in (u_-^\circ, u_+^\circ).$$

Більш того, поклавши $\Lambda_\pm^\circ := \max\left\{\sqrt{|\Pi''(u)|} : \pm u_\pm^\circ \le \pm u \le \pm u_\pm^*\right\}$, будемо далі вважати, що виконується таке технічне припущення (яке, проте, ми приймаємо лише для спрощення подальших викладок):

(H_8) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\lambda_\pm)^k \le \left(\lambda_\pm^\circ\right)^k \le \sqrt{2}\,(\lambda_\pm)^k$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\lambda_\pm)^k \le \left(\Lambda_\pm^\circ\right)^k \le \sqrt{2}\,(\lambda_\pm)^k$, $k = 1, \ldots, 6.$

Зрозуміло, що $\Pi'(u)u > 0$ на множині $u \in (u_-^*, u_-^\circ] \cup [u_+^\circ, u_+^*]$, а тому при всіх $E \in [E^\circ, E^*]$ рівняння $\Pi(u) = E$ має пару коренів — додатний $u_0^+(E)$ та від'ємний $u_0^-(E)$. При цьому, очевидно, $u_0^\pm(E^\circ) = u_\pm^\circ$, $u_0^\pm(E^*) = u_\pm^*$.

Нехай збурена система в координатах (u, v) має вигляд

$$\dot u = v + \mu^2 U(t,u,v), \quad \dot v = -\Pi'(u) + \mu^2 V(t,u,v). \tag{14}$$

Щодо збурення припускатимемо виконання такої умови:

(H_9) існує опукла область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, яка містить гетероклінічний контур, і на множині $D := \mathbb{R} \times \Omega$ функції $U(\cdot,\cdot,\cdot)$, $V(\cdot,\cdot,\cdot)$ неперервні і 2π-періодичні щодо t разом зі своїми частинними похідними першого порядку, причому модулі цих функцій і їхніх похідних не перевищують одиниці.

Зрозуміло, що умова щодо модулів функцій та їхніх похідних не є суттєвою — її виконання завжди можна досягти перенормуванням малого параметра.

Позначимо через $(u^\pm(t,E), v^\pm(t,E))$ розв'язки задач Коші

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = \pm\sqrt{2\,(E - \Pi(0))}.$$

Якщо $E^\circ \le E < E^*$, то кожен із цих розв'язків періодичний з періодом $T(E) = 2(T_-(E) + T_+(E))$, де

$$T_-(E) := \int\limits_{u_0^-(E)}^{0} \frac{du}{\sqrt{2(E - \Pi(u))}}, \quad T_+(E) := \int\limits_{0}^{u_0^+(E)} \frac{du}{\sqrt{2(E - \Pi(u))}}.$$

При цьому, як відомо, $T_\pm(E) \to \infty$, $E \nearrow E^*$. Неважко показати, що

$$\left(u^-(t,E), v^-(t,E)\right) = \left(u^+(t + 2T_+(E), E), v^+(t + 2T_+(E), E)\right). \tag{15}$$

Зауважимо, що рівняння $u = u^\pm(t, E^*)$, $v = v^\pm(t, E^*)$, $t \in \mathbb{R}$, описують рухи відповідно по верхній і нижній сепаратрисах сідлових положень рівноваги $(u_-^*, 0)$, $(u_+^*, 0)$ незбуреної системи. При цьому

$$u^-(t,E^*) = u^+(-t,E^*), \quad v^-(t,E^*) = -v^+(-t,E^*). \tag{16}$$

Нехай $(I, \varphi\,|\mathrm{mod} 2\pi)$ — змінні дія-кут для системи з гамільтоніаном H поблизу сепаратрисного контура в області $E^\circ < v^2/2 + \Pi(u) < E^*$. У даному випадку [1] $I(E) := \dfrac{1}{2\pi}\oint_{H=E} v du$, обернена функція до $I(E)$ визначає гамільтоніан $H(I)$ як функцію змінної дії, $\varphi := S_I'(I,u)$, $S(I,u) := \left[\int_0^u v du|_{H(u,v)=E}\right]_{E=H(I)}$. Легко бачити, що

$$H'(I) = \left.\frac{2\pi}{T(E)}\right|_{E=H(I)}, \quad H''(I) = -H'(I)\left.\frac{2\pi T'(E)}{T^2(E)}\right|_{E=H(I)} = -\left.\frac{4\pi^2 T'(E)}{T^3(E)}\right|_{E=H(I)}.$$

З наведеної нижче леми 6 випливає, що існує $E_* \in [0, E^*)$ таке, що

$$T'(E) > 0 \quad \forall E \in (E_*, E^*).$$

Покладемо $I_* := I(E_*)$, $I^* := I(E^*)$, $\omega_* := H'(I_*)$. Тоді в розглядуваному випадку справджується припущення (H_6) і функція $H'(I)$ на проміжку $[I_*, I^*]$ монотонно спадає від значення ω_* до $\omega^* := 0$. Отже, для кожного $\omega \in [\omega^*, \omega_*]$ рівняння $H'(I) = \omega$ має єдиний розв'язок $I = I_\omega$. Покладемо $E_\omega := H(I_\omega)$. Зокрема, для кожного раціонального $p/q \in (\omega^*, \omega_*)$ коректно визначено резонансні значення дії $I_{p/q}$ та енергії $E_{p/q}$.

Далі будемо використовувати позначення

$$\Delta := E^* - E^\circ, \quad E^\alpha := \alpha E^\circ + (1-\alpha)E^*, \quad \alpha \in (0,1),$$
$$I^\alpha := I(E^\alpha), \quad \omega^\alpha := H'(I^\alpha) \equiv 2\pi/T(E^\alpha), \quad I^\circ := I(E^\circ), \quad \omega^\circ := H'(I^\circ), \tag{17}$$
$$M_k := \max\left\{\left|\Pi^{(k)}(u)\right| : u_-^* \le u \le u_+^*\right\}.$$

Легко бачити, що з означення I_ω випливає рівність $I_{\omega^\alpha} = I^\alpha$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\omega_* \le \omega^\circ$ і $\Delta < 1$.

Оскільки

$$\dot I = \frac{\mu^2}{H'(I)} f(t,u,v),$$

де $f(t,u,v) := \Pi'(u)U(t,u,v) + vV(t,u,v)$, і в змінних дія-кут права частина перетворюється в $\mu^2 Y(t,I,\varphi)$, то за рахунок зсуву кутової змінної ψ (q/p)-ультрасубгармонічну функцію Пуанкаре можна виразити через так звану ультрасубгармонічну функцію Мельникова

$$\mathcal{M}_{q/p}(\theta) := \int_0^{2\pi q} f\left(t, u^+\left(t+\theta, E_{p/q}\right), v^+\left(t+\theta, E_{p/q}\right)\right) dt,$$

а саме,

$$P_{q/p}(\psi) = \frac{1}{2\pi p}\mathcal{M}_{q/p}\left(\frac{q}{p}\psi\right).$$

За час $2\pi q$ зображувальна точка, рухаючись під дією потоку незбуреної системи по лінії рівня $H(u,v) = E_{p/q}$, здійснює p повних обходів цієї замкненої кривої, послідовно перетинаючи вісь абсцис у точках $u_0^-(E_{p/q})$, $u_0^+(E_{p/q})$. Зрозуміло, що $pT(E_{p/q}) = 2\pi q$.

Відтак нескладно перевірити, що справджується рівність [5, 6]

$$\mathcal{M}_{q/p}(\theta) := \int_0^{2\pi q} f\left(t,\, u^+\left(t+\theta,\, E_{p/q}\right),\, v^+\left(t+\theta,\, E_{p/q}\right)\right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-T_-(E_{p/q})}^{T_+(E_{p/q})} f(t-\theta+kT(E_{p/q}), u^+(t, E_{p/q}), v^+(t, E_{p/q}))dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \int_{T_+(E_{p/q})}^{T(E_{p/q})-T_-(E_{p/q})} f(t-\theta+kT(E_{p/q}), u^+(t, E_{p/q}), v^+(t, E_{p/q)})dt.$$

З урахуванням рівності (15), виконавши заміну $t \to t + 2T_+(E_{p/q})$ в інтегралах другої суми, матимемо

$$\mathcal{M}_{q/p}(\theta) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-T_-(E_{p/q})}^{T_+(E_{p/q})} f\left(t-\theta+\frac{2\pi kq}{p}, u^+(t, E_{p/q}), v^+(t, E_{p/q})\right) dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-T_+(E_{p/q})}^{T_-(E_{p/q})} f\left(t+2T_+(E_{p/q})-\theta+\frac{2\pi kq}{p}, u^-(t, E_{p/q}), v^-(t, E_{p/q})\right) dt. \quad (18)$$

Із зрозумілих причин тепер нас цікавитиме питання про близькість інтегралів

$$\pm \int_{\mp T_-(E_{p/q})}^{\pm T_+(E_{p/q})} f(t-\theta, u^\pm(t, E_{p/q}), v^\pm(t, E_{p/q}))\, dt$$

до відповідних гетероклінічних функцій Мельникова

$$\mathcal{M}^\pm(\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta, u^\pm(t, E^*), v^\pm(t, E^*))\, dt$$

при великих $T\left(E_{p/q}\right)$.

Твердження 1. *Нехай виконано умови* (H_7) – (H_9). *Покладемо*

$$\mathcal{I}^\pm(E,\theta) := \pm \int_{\mp T_-(E)}^{\pm T_+(E)} f(t-\theta, u^\pm(t,E), v^\pm(t,E))\, dt.$$

Тоді рівномірно щодо $\theta \in \mathbb{R}$ існують границі

$$\lim_{E \nearrow E^*} \mathcal{I}^{\pm}(E,\theta) = \mathcal{M}^{\pm}(\theta),$$

причому для довільного $\alpha \in (0,1)$ справджуються нерівності

$$\left|\mathcal{M}^{\pm}(\theta) - \mathcal{I}^{\pm}(E,\theta)\right| \le C^{\pm}(\alpha)\sqrt{E^* - E} \quad \forall E \in [E^{\alpha}, E^*)\,,$$

де $C^{\pm}(\alpha) := C_J^{+}(\alpha) + C_K^{+}(\alpha) + C_J^{-}(\alpha) + C_K^{-}(\alpha) + C_0(\alpha)$, функції $C_J^{+}(\alpha)$, $C_K^{+}(\alpha)$, $C_0(\alpha)$ визначаються наведеними нижче формулами (25)–(27), а $C_J^{-}(\alpha)$, $C_K^{-}(\alpha)$ одержуються з формул (25), (26) заміною знака $+$ на $-$. При цьому $C^{\pm}(\alpha)$ монотонно зростає, має скінченну границю $C^{\pm}(+0)$ і $C^{\pm}(\alpha) \nearrow \infty$, $\alpha \nearrow 1$.

Доведення. Доведемо твердження для $\mathcal{I}^{+}(E^*,\theta)$. Після заміни змінної інтегрування за формулою $\displaystyle\int_0^u \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} = t$ при $E \in (0,E^*)$ та $u \in (u_0^-(E), u_0^+(E))$ матимемо

$$\mathcal{I}^{+}(E,\theta) = \int\limits_{u_0^-(E)}^{u_0^+(E)} \frac{1}{\sqrt{2\,(E-\Pi(u))}} f\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\,(E-\Pi(s))}} - \theta, u, \sqrt{2(E-\Pi(u))}\right) du.$$

Подамо $\mathcal{I}^{+}(E,\theta)$ у вигляді суми $\mathcal{I}_0^{+}(E,\theta) + \mathcal{I}_+^{+}(E,\theta) + \mathcal{I}_-^{+}(E,\theta)$, де

$$\mathcal{I}_0^{+}(E,\theta) = \int\limits_{u_-^\circ}^{u_+^\circ} \frac{1}{\sqrt{2\,(E-\Pi(u))}} f\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\,(E-\Pi(s))}} - \theta, u, \sqrt{2(E-\Pi(u))}\right) du,$$

$$\mathcal{I}_+^{+}(E,\theta) := \int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E)} \frac{1}{\sqrt{2\,(E-\Pi(u))}} f\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\,(E-\Pi(s))}} - \theta, u, \sqrt{2(E-\Pi(u))}\right) du, \tag{19}$$

$$\mathcal{I}_-^{+}(E,\theta) := \int\limits_{u_0^-(E)}^{u_-^\circ} \frac{1}{\sqrt{2\,(E-\Pi(u))}} f\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\,(E-\Pi(s))}} - \theta, u, \sqrt{2(E-\Pi(u))}\right) du,$$

і насамперед оцінимо різницю $\left|\mathcal{I}_{\pm}^{+}(E_1,\theta) - \mathcal{I}_{\pm}^{+}(E_2,\theta)\right|$. Очевидно, з цією метою достатньо розглянути інтеграл (19), який запишемо у вигляді суми $J_+(E,\theta) + K_+(E,\theta)$ (заради спрощення позначень верхнім індексом $+$ нехтуємо), де з урахуванням вигляду функції $f(t,u,v)$

$$J_+\,(E,\,\theta) := \int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E)} U\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\,(E-\Pi\,(s))}} - \theta, u, \sqrt{2\,(E-\Pi\,(u))}\right) \frac{\Pi'\,(u)}{\sqrt{2\,(E-\Pi\,(u))}}\,du,$$

$$K_+(E,\theta) := \int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E)} V\left(\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\left(E-\Pi\left(s\right)\right)}} - \theta, u, \sqrt{2\left(E-\Pi\left(u\right)\right)}\right) du.$$

При $E^\circ < E_2 < E_1 < E^*$ з урахуванням припущення (H_9) маємо

$$|J_+(E_1,\theta) - J_+(E_2,\theta)| \le \sqrt{2(E_1-E_2)} + \int\limits_0^{E_2-E^\circ} \int\limits_{u_0^+(E_2-x)}^{u_0^+(E_1-x)} \frac{ds}{\sqrt{2(E_1-\Pi(s))}} \frac{dx}{\sqrt{2x}} +$$

$$+ \int\limits_0^{E_2-E^\circ} \int\limits_0^{u_0^+(E_2-x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\left(E_2-\Pi(s)\right)}} - \frac{1}{\sqrt{2\left(E_1-\Pi(s)\right)}}\right) ds \frac{dx}{\sqrt{2x}} +$$

$$+ \int\limits_0^{E_2-E^\circ} \left(u_0^+(E_1-x) - u_0^+(E_2-x)\right) \frac{dx}{\sqrt{2x}}.$$

У подальшому нам знадобиться оцінка знизу для $\Pi'(u_0^+(E))$ при $E \in [E^\circ, E^*)$. Оскільки $\Pi'(u_+^*) = 0$, то

$$\Pi'\left(u_0^+(E)\right) \ge \min_{u_0^+(E)\le u\le u_+^*} \left|\Pi''(u)\right| \left(u_+^* - u_0^+(E)\right) \ge \left(\lambda_+^\circ\right)^2 \left(u_+^* - u_0^+(E)\right).$$

Водночас $E^*-E = \Pi(u_+^*)-\Pi(u_0^+(E)) = -\frac{1}{2}\Pi''(\tilde\theta)\left((u_+^* - u_0^+(E)\right)^2$ при відповідному виборі $\tilde\theta \in (u_0^+(E), u_+^*)$, звідки $\max\limits_{u_0^+(E)\le u\le u_+^*} |\Pi''(u)| \left((u_+^* - u_0^+(E)\right)^2 \ge 2(E^*-E)$ і

$$u_+^* - u_0^+(E) \ge \frac{\sqrt{2\left(E^*-E\right)}}{\Lambda_+^\circ}.$$

Таким чином,

$$\Pi'\left(u_0^+(E)\right) \ge \frac{\left(\lambda_+^\circ\right)^2 \sqrt{2\left(E^*-E\right)}}{\Lambda_+^\circ}. \tag{20}$$

Звідси

$$\Pi'\left(u_0^+(E_1-y)\right) \ge \frac{\sqrt{2y}\left(\lambda_+^\circ\right)^2}{\Lambda_+^\circ}$$

і, виконавши заміну змінної інтегрування $y = E_1 - \Pi(s)$, отримаємо

$$\int\limits_{u_0^+(E_2-x)}^{u_0^+(E_1-x)} \frac{ds}{\sqrt{2(E_1-\Pi(s))}} = \int\limits_x^{E_1-E_2+x} \frac{dy}{\Pi'(u_0^+(E_1-y))\sqrt{2y}} \le \frac{\Lambda_+^\circ}{2\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\left[\ln\left(1+\frac{E_1-E_2}{x}\right)\right].$$

Тоді для $E_1 > E_2 \geq E^\alpha$ матимемо

$$\int\limits_0^{E_2-E^\circ} \int\limits_{u_0^+(E_2-x)}^{u_0^+(E_1-x)} \frac{ds}{\sqrt{2(E_1-\Pi(s))}} \frac{dx}{\sqrt{2x}} \leq \frac{\Lambda_+^\circ}{\sqrt{2}\left(\lambda_+^\circ\right)^2} \int\limits_0^{\sqrt{E_2-E^\circ}} \left[\ln\left(1+\frac{E_1-E_2}{z^2}\right)\right] dz =$$

$$= \frac{\Lambda_+^\circ}{\sqrt{2}\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\left[\ln\left(1+\frac{E_1-E_2}{E_2-E^\circ}\right)\sqrt{E_2-E^\circ}+2\sqrt{(E_1-E_2)}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{E_2-E^\circ}}{\sqrt{E_1-E_2}}\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\Lambda_+^\circ}{\sqrt{2}\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+\pi\right)\sqrt{E_1-E_2}. \tag{21}$$

Тепер, виконавши заміну змінної інтегрування $y = E_2 - \Pi(s)$, оцінимо

$$\int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E_2-x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\left(E_2-\Pi(s)\right)}}-\frac{1}{\sqrt{2\left(E_1-\Pi(s)\right)}}\right) ds =$$

$$= \int\limits_x^{E_2-E^\circ} \left(\frac{1}{\sqrt{2y}}-\frac{1}{\sqrt{2(E_1-E_2+y)}}\right) \frac{dy}{\Pi'\left(u_0^+(E_2-y)\right)} \leq$$

$$\leq \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2} \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{E_2-E^\circ}} \left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{E_1-E_2+z^2}}\right) dz =$$

$$= \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\left[\ln\left(1+\sqrt{1+\tfrac{E_1-E_2}{x}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{1+\tfrac{E_1-E_2}{E_2-E^\circ}}\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\ln\left(1+\frac{E_1-E_2}{2x}\right). \tag{22}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{E_2-E^\circ} \frac{1}{\sqrt{2x}} \int\limits_0^{u_+^\circ} \left(\frac{1}{\sqrt{2\left(E_2-\Pi(s)\right)}}-\frac{1}{\sqrt{2\left(E_1-\Pi(s)\right)}}\right) ds\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{2(E_2-E^\circ)} \int\limits_0^{u_+^\circ} \frac{\sqrt{E_1-E_2}}{\sqrt{2\left(E_1-\Pi(s)\right)\left(E_2-\Pi(s)\right)}} ds \leq \sqrt{2}T_+(E^\circ)\sqrt{E_1-E_2},$$

то з огляду на (21), (22) при $E_1 > E_2 \geq E^\alpha$ будемо мати

$$\int\limits_0^{E_2-E^\circ} \frac{1}{\sqrt{2x}} \int\limits_0^{u_0^+(E_2-x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\,(E_2 - \Pi(s))}} - \frac{1}{\sqrt{2\,(E_1 - \Pi(s))}} \right) ds\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{2} T_+(E^\circ) \sqrt{E_1 - E_2} + \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2} \int\limits_0^{E_2-E^\circ} \frac{1}{\sqrt{2x}} \left[\ln\left(1 + \frac{E_1 - E_2}{2x}\right) \right] dx \leq$$

$$\leq \left[\sqrt{2} T_+(E^\circ) + \frac{\Lambda_+^\circ}{\sqrt{2}\left(\lambda_+^\circ\right)^2} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \pi \right) \right] \sqrt{E_1 - E_2}. \tag{23}$$

Нарешті, оцінимо зверху $u_0^+(E_1) - u_0^+(E_2)$ за умови, що $E^\circ \leq E_2 \leq E_1 \leq E^*$:

$$E_1 - E_2 = \Pi\left(u_0^+(E_1)\right) - \Pi\left(u_0^+(E_2)\right) \geq \frac{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}{2} \left(u_0^+(E_1) - u_0^+(E_2)\right)^2,$$

звідки

$$u_0^+(E_1) - u_0^+(E_2) \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_+^\circ} \sqrt{E_1 - E_2}. \tag{24}$$

Тепер з урахуванням (21), (23), (24) остаточно при $E^\alpha < E_2 < E_1 < E^*$ дістаємо

$$|J_+(E_1, \theta) - J_+(E_2, \theta)| \leq C_J^+(\alpha) \sqrt{E_1 - E_2},$$

де з огляду на припущення (H_8)

$$C_J^+(\alpha) := \sqrt{2} \left[1 + \frac{2}{\lambda_+} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \pi \right) + T_+(E^\circ) + \frac{2}{\lambda_+} \right]. \tag{25}$$

Далі, при тих самих умовах на E_1, E_2, що й вище, маємо

$$|K_+(E_1, \theta) - K_+(E_2, \theta)| \leq \left(u_0^+(E_1) - u_0^+(E_2)\right) +$$

$$+ \int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E_2)} \int\limits_0^u \left(\frac{1}{\sqrt{2\,(E_2 - \Pi(s))}} - \frac{1}{\sqrt{2\,(E_1 - \Pi(s))}} \right) ds\, du +$$

$$+ \int\limits_{u_+^\circ}^{u_0^+(E_2)} \left(\sqrt{2\,(E_1 - \Pi(u))} - \sqrt{2\,(E_2 - \Pi(u))} \right) du.$$

Після заміни змінної інтегрування $x = E_2 - \Pi(u)$ в другому доданку, з урахуванням нерівності $\Pi'\left(u_0^+(E_2 - x)\right) \geq \sqrt{2x}\left(\lambda_+^\circ\right)^2 \Big/ \Lambda_+^\circ$, яка випливає з (20), а також (23) та (24) отримуємо

$$|K_+(E_1,\theta) - K_+(E_2,\theta)| \leq C_K^+(\alpha)\sqrt{E_1 - E_2},$$

де

$$C_K^+(\alpha) := \frac{2}{\lambda_+} + \sqrt{2}(u_+^* - u_+^\circ) + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_+}\left[T_+(E^\circ) + \frac{1}{\lambda_+}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \pi\right)\right]. \tag{26}$$

Нарешті, легко бачити, що при тих самих умовах на E_1, E_2, що й вище,

$$\left|\mathcal{I}_0^+(E_1,\theta) - \mathcal{I}_0^+(E_2,\theta)\right| \leq M_1 \int\limits_{u_-^\circ}^{u_+^\circ} \frac{\sqrt{E_1 - E_2}du}{\sqrt{2\left(E^\circ - \Pi(u)\right)}\sqrt{E^\alpha - E^\circ}} +$$

$$+ M_1 \int\limits_{u_-^\circ}^{u_+^\circ} \left[\max\left\{\left|\int\limits_0^{u_\pm^\circ}\left(\frac{\sqrt{E_1 - E_2}}{\sqrt{2\left(E^\circ - \Pi(s)\right)}\sqrt{E^\alpha - E^\circ}}\right) ds\right|\right\} + \sqrt{2(E_1 - E_2)}\right] \frac{du}{\sqrt{2(E^\circ - \Pi(u))}} +$$

$$+ \int\limits_{u_-^\circ}^{u_+^\circ} \max\left\{\left|\int\limits_0^{u_\pm^\circ} \frac{\sqrt{2(E_1 - E_2)}ds}{\sqrt{2(E^\circ - \Pi(s))}}\right|\right\} \frac{du}{\sqrt{2\left(E^\circ - \Pi(u)\right)}} + \left[u_+^\circ - u_-^\circ\right]\sqrt{2(E_1 - E_2)} \leq$$

$$\leq C_0(\alpha)\sqrt{E_1 - E_2},$$

де

$$C_0(\alpha) := \frac{T(E^\circ)}{2}\left[\frac{M_1(1 + \max\{T_\pm(E^\circ)\})}{\sqrt{(1-\alpha)\,\Delta}} + \sqrt{2}\left(M_1 + \max\{T_\pm(E^\circ)\}\right)\right] +$$

$$+ \sqrt{2}\left[u_0^+(E^\circ) - u_0^-(E^\circ)\right]. \tag{27}$$

Остаточно для довільного $\alpha \in (0,1)$ маємо нерівність

$$\left|\mathcal{I}^+(E_1,\theta) - \mathcal{I}^+(E_2,\theta)\right| \leq C^\pm(\alpha)\sqrt{E_1 - E_2} \quad \forall E_1, E_2 \in [E^\alpha, E^*),$$

з якої випливає, що існує рівномірна щодо $\theta \in \mathbb{R}$ границя $\mathcal{M}^+(\theta) = \lim\limits_{E \nearrow E^*} \mathcal{I}^+(E,\theta)$. Спрямувавши E_1 до E^* і поклавши $E_2 = E$, дістанемо шукану оцінку для $|\mathcal{M}^+(\theta) - \mathcal{I}^+(E,\theta)|$.

Властивості функції $C^\pm(\alpha)$ безпосередньо випливають з її явного вигляду.

Твердження 1 доведено.

З урахуванням (18) уведемо до розгляду функції

$$F_{p/q}^\pm(\theta) := \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{M}^\pm\left(\theta - \frac{2\pi qk}{p}\right), \quad G_{p/q}(\theta,\vartheta) := F_{p/q}^+(\theta) + F_{p/q}^-(\theta - 2\vartheta).$$

Зауважимо, що функції $G_{p/q}(\theta, T_+(E_{p/q}))$ утворюються з $\mathcal{M}_{q/p}(\theta)$ шляхом граничного переходу при $E_{p/q} \to \infty$ лише під знаком функцій $u^{\pm}(t, E_{p/q})$, $v^{\pm}(t, E_{p/q})$ та в межах $T_{\pm}(E_{p/q})$ інтегралів, які фігурують у (18).

Твердження 2. *Функція $F^{\pm}_{p/q}(\theta)$ має період $\dfrac{2\pi}{p}$ і її ряд Фур'є має вигляд*

$$F^{\pm}_{p/q}(\theta) = p \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}^{\pm}_{pl} e^{-ipl\theta}, \tag{28}$$

де $f_n(u,v) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t,u,v)e^{-int}dt$, $\hat{f}^{\pm}_n := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{int} f_n\left(u^{\pm}(t,E^*), v^{\pm}(t,E^*)\right) dt$. При цьому справджується рівність $\hat{f}^{+}_0 + \hat{f}^{-}_0 = 0$, якщо компоненти усередненого за часом збурення

$$U_0(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(t,u,v)\,dt, \quad V_0(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} V(t,u,v)\,dt$$

задовольняють хоча б одну з двох умов:

1) $U_0(u,-v) = -U_0(u,v)$, $V_0(u,-v) = V_0(u,v)$ (умова оборотності);

2) існує функція $h_0(u,v)$ така, що $U_0(u,v) = h'_{0v}(u,v)$, $V_0(u,v) = -h'_{0u}(u,v)$ (умова гамільтоновості).

Доведення. З одного боку, оскільки функції Мельникова 2π-періодичні, то таку ж властивість мають і функції $F^{\pm}_{p/q}(\theta)$. З іншого боку, ці функції $\dfrac{2\pi q}{p}$-періодичні. Справді,

$$F^{\pm}_{p/q}\left(\theta - \frac{2\pi q}{p}\right) := \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{M}^{\pm}\left(\theta - \frac{2\pi q(k+1)}{p}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \mathcal{M}^{\pm}\left(\theta - \frac{2\pi qk}{p}\right) + \mathcal{M}^{\pm}(\theta - 2\pi q) = F^{\pm}_{p/q}(\theta).$$

Але якщо (l,m) — розв'язок діофантового рівняння $ql + pm = 1$, то

$$F^{\pm}_{p/q}\left(\theta + \frac{2\pi}{p}\right) = F^{\pm}_{p/q}\left(\theta + \frac{2\pi(ql+pm)}{p}\right) = F^{\pm}_{p/q}\left(\theta + \frac{2\pi ql}{p} + 2\pi m\right) = F^{\pm}_{p/q}(\theta)$$

і, отже, функції $F^{\pm}_{p/q}(\theta)$ мають період $\dfrac{2\pi}{p}$. Відтак ряди Фур'є функцій $F^{\pm}_{p/q}(\theta)$ розкладаються за гармоніками вигляду $e^{ipl\theta}$, $l \in \mathbb{Z}$. А саме, оскільки $\mathcal{M}^{\pm}(\theta) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^{\pm}_n e^{-in\theta}$, то

$$F^{\pm}_{p/q}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^{\pm}_n e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi inqk/p},$$

і формула (28) випливає з рівності

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi inqk/p} = \begin{cases} p, & \text{якщо} \quad n/p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{якщо} \quad n/p \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рівність $\hat{f}_0^+ + \hat{f}_0^- = 0$ при виконанні оборотності перевіряється безпосередніми обчисленнями з використанням рівностей (16). Якщо ж виконується умова гамільтоновості, то

$$\hat{f}_0^+ = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} h_0(u^+(t, E^*), v^+(t, E^*))dt = h_0(u_-^*, 0) - h_0(u_+^*, 0),$$

$$\hat{f}_0^- = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} h_0(u^-(t, E^*), v^-(t, E^*))dt = h_0(u_+^*, 0) - h_0(u_-^*, 0).$$

Твердження 2 доведено.

Наслідок 1. *Функції $F_{p/q}^{\pm}(\theta)$, $G_{p/q}(\theta)$ визначаються лише числом p і не залежать від q, тобто*

$$F_p^{\pm}(\theta) := F_{p/1}^{\pm}(\theta), \quad G_p(\theta, \vartheta) := F_p^+(\theta) + F_p^-(\theta - 2\vartheta)$$

для всіх взаємно простих p, q, причому $\int_0^{2\pi} G_p(\theta, \vartheta) d\theta = 0$, якщо компоненти усередненого за часом збурення задовольняють хоча б одну з умов — оборотності або гамільтоновості.

Функцію $F_p^{\pm}(\theta)$ назвемо *p-фільтрацією функції Мельникова $\mathcal{M}^{\pm}(\theta)$.*

Підсумком проведеного аналізу є такий результат про апроксимацію ультрасубгармонічної функції Пуанкаре.

Теорема 3. *Нехай $\alpha \in (0, 1)$ є довільним. Тоді якщо для раціонального p/q відповідне резонансне значення енергії $E_{p/q}$ належить проміжку $[E^{\alpha}, E^*)$, тобто $p/q \le \omega^{\alpha}$, то*

$$\left| \frac{1}{2\pi p} G_p\left(\tfrac{q}{p}\psi, T_+(E_{p/q})\right) - P_{q/p}(\psi) \right| \le \frac{C^{\pm}(\alpha)}{\pi} \sqrt{E^* - E_{p/q}}$$

для всіх $\psi \in \mathbb{R}$, де $C^{\pm}(\alpha)$ визначено у твердженні 1.

Використаємо тепер теорему 3 для оцінювання знизу чисел $\eta_{p/q}$ в (5) за допомогою p-фільтрацій функцій Мельникова у випадку, коли хоча б при одному $\vartheta = \vartheta_p$ функція $G_p(\theta, \vartheta_p)$ є знакозмінною на $[0, 2\pi]$, а отже, справджується припущення

(H_{10}) знайдуться числа $\gamma_p > 0$ та $\vartheta_p \in [0, 2\pi)$ такі, що

$$\min\left\{ \max_{\theta \in [0, 2\pi]} G_p(\theta, \vartheta_p), -\min_{\theta \in [0, 2\pi]} G_p(\theta, \vartheta_p) \right\} \ge \gamma_p.$$

Зауважимо, що при виконанні хоча б однієї з умов твердження 2 — оборотності або гамільтоновості — згідно з наслідком 1 для кожного фіксованого $\vartheta \in [0, 2\pi]$ функція

$G_p(\cdot, \vartheta)$ має нульове середнє. А отже, у випадку, коли $G_p(\theta, \vartheta)$ не є тотожним нулем, її максимальне значення є додатним, а мінімальне — від'ємним, тобто справджується припущення (H_{10}).

Покладемо

$$\Gamma_p := \max_{\theta \in [0,2\pi]} \left| \left[F_p^+(\theta)\right]' \right| + \max_{\theta \in [0,2\pi]} \left| \left[F_p^-(\theta)\right]' \right|$$

і далі вважатимемо виконаною додаткову умову

$$\gamma_p < \min\left\{ \frac{3p(\lambda_+ + \lambda_-)}{\lambda_+\lambda_-}, \frac{\pi\Gamma_p\lambda_-}{p(\lambda_+ + \lambda_-)} \right\}, \tag{29}$$

яка має суто технічний характер, не обмежує загальності міркувань та спрощує подальші викладки.

5. Оцінка кількості збурених ультрасубгармонік. У цьому пункті ми маємо намір з'ясувати, наскільки швидко для заданого p може зростати кількість збурених (q/p)-ультрасубгармонік системи (14) при $\mu \to +0$. З цією метою достатньо оцінити кількість раціональних чисел вигляду p/q, які при фіксованому достатньо малому значенні μ одночасно задовольняють умови теореми 2 для системи вигляду (1), утвореної з системи (14) внаслідок переходу до змінних дія-кут. Якщо координати (u, v) пов'язані з координатами дія-кут співвідношеннями $u = u(I, \varphi)$, $v = v(I, \varphi)$, то неважко знайти зв'язок між функціями у правих частинах цих систем:

$$\begin{aligned} Y(t, I, \varphi) &= u'_\varphi(I, \varphi)V(t, u(I, \varphi), v(I, \varphi)) - v'_\varphi(I, \varphi)U(t, u(I, \varphi), v(I, \varphi)), \\ \Psi(t, I, \varphi) &= v'_I(I, \varphi)U(t, u(I, \varphi), v(I, \varphi)) - u'_I(I, \varphi)V(t, u(I, \varphi), v(I, \varphi)). \end{aligned} \tag{30}$$

(Тут використано той факт, що оскільки координати дія-кут теж канонічні, то $dv \wedge du = dI \wedge d\varphi$, а отже, якобіан перетворення дорівнює одиниці: $v'_I u'_\varphi - u'_I v'_\varphi = 1$.)

Перш ніж переходити до формулювання основної теореми даної роботи, нагадаємо один факт із теорії діофантових наближень. Для довільного невід'ємного числа t через $\langle t \rangle$, $\lfloor t \rfloor$, $\lceil t \rceil$ позначимо відповідно відстань від t до множини $\mathbb{Z}$, найбільше ціле, що не перевищує t (цілу частину t) та найменше ціле, не менше за t. Відомо [13, с. 87], що для майже кожного ірраціонального числа $\mathfrak{a}$ знайдеться стала $A > 0$ така, що $q\langle q\mathfrak{a}\rangle \geq 1/(A\ln^2 q)$. В цьому випадку кажуть, що $\mathfrak{a}$ має тип $< A\ln^2(\cdot)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення (H_7)–(H_{10}), число $\mathfrak{a} := \dfrac{\lambda_-}{2(\lambda_+ + \lambda_-)}$ має тип $< A\ln^2(\cdot)$ (тут λ_+, λ_- — числа, визначені в припущенні (H_7)), а p — просте число або одиниця. Тоді кількість збурених (q/p)-ультрасубгармонік системи (14) при $\mu \to 0$ зростає не повільніше, ніж $\varsigma\ln^2\mu$, де ς — довільне додатне число, менше за*

$$\varsigma_p := \left(\frac{p\gamma_p \max\{p-1, 1\}}{2\pi^2\lambda\Gamma_p} \right)^2.$$

Одразу зазначимо, що наведена вище оцінка не є рівномірною щодо ς в тому сенсі, що функція $\varsigma\ln^2\mu$ оцінює кількість (q/p)-ультрасубгармонік знизу при $\mu \in (0, \mu_p(\varsigma))$, де функція $\mu_p(\varsigma)$ в загальному випадку прямує до нуля, якщо $\varsigma \nearrow \varsigma_p$. Насправді, в процесі доведення буде встановлено конкретнішу оцінку, яка, проте, має досить громіздкий вигляд. А саме, буде вказано сталу $B_p > 0$ і такі дві функції $Q_p(\cdot,\cdot) : (0,\infty) \times (0,1) \mapsto \mathbb{Z}_+$ з асимптотикою $Q_p(z;\beta) \sim \dfrac{p}{\pi\lambda} \ln \dfrac{1}{z}$ при $z \searrow 0$, рівномірною щодо $\beta \in (0,\beta_0]$ при довільному $\beta_0 \in (0,1)$, та $q_p(\cdot) : (0,1) \mapsto \mathbb{N}$ з асимптотикою $q_p(\beta) \sim \dfrac{p\ln 2}{2\pi\lambda\beta}$ при $\beta \searrow 0$, за допомогою яких кількість збурених (q/p)-ультрасубгармонік при $\mu \searrow 0$ оцінюється знизу числом

$$\left[\frac{(1-\beta)\gamma_p \max\{p-1,1\}}{2\pi\Gamma_p} \left(Q_p(\mu/\beta;\beta) - q_p(\beta) - 1\right) - B_p \ln^3\left(Q_p(\mu/\beta;\beta) - q_p(\beta)\right)\right]^2, \quad (31)$$

звідки й випливає потрібний результат. Зрозуміло, що ця оцінка стає змістовною при $\mu \in (0, \beta\bar{z}_p(\beta))$, де $\bar{z}_p(\beta)$ визначається з рівняння $Q_p(z;\beta) = q_p(\beta) + 1$.

Перейдемо до обґрунтування теореми 4, яке включає в себе низку окремих тверджень.

Твердження 3. *Нехай виконується припущення* (H_{10}). *Тоді для довільного* $\beta \in (0,1)$ *існує відрізок* J_p *довжини* $(1-\beta)\sigma_p < 1$, *де* $\sigma_p := \dfrac{p\gamma_p}{2\pi\Gamma_p}$, *такий, що при кожному* $\tau \in J_p$ *справджується нерівність*

$$\min\left\{\max_{\theta\in[0,2\pi]} G_p\left(\theta, \frac{2\pi}{p}\tau\right), -\min_{\theta\in[0,2\pi]} G_p\left(\theta, \frac{2\pi}{p}\tau\right)\right\} \geq \beta\gamma_p. \quad (32)$$

Доведення. Введемо функцію

$$F_p(t,\tau) := F_p^+\left(\frac{2\pi}{p}(t+\tau)\right) + F_p^-\left(\frac{2\pi}{p}(t-\tau)\right) \equiv G_p\left(\frac{2\pi}{p}(t+\tau), \frac{2\pi}{p}\tau\right).$$

Нехай $\tau^* = \arg\max\limits_{\tau\in[0,1]}\left(\min\left\{\max\limits_{t\in[0,1]} F_p(t,\tau), -\min\limits_{t\in[0,1]} F_p(t,\tau)\right\}\right)$. Тоді за визначенням γ_p існують точки $t^* \in [0,1]$, $t_* \in [0,1]$ такі, що $F_p(t^*,\tau^*) \geq \gamma_p$, $F_p(t_*,\tau^*) \leq -\gamma_p$. Відтак

$$F_p(t^*,\tau) \geq \gamma_p - \frac{2\pi\Gamma_p}{p}|\tau-\tau^*| \geq \beta\gamma_p, \quad F_p(t_*,\tau) \leq -\gamma_p + \frac{2\pi\Gamma_p}{p}|\tau-\tau^*| \leq -\beta\gamma_p,$$

якщо $|\tau-\tau^*| \leq (1-\beta)\sigma_p$. Отже, зауваживши, що

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]}(\min) G_p(\theta+c,\vartheta) = \max_{\theta\in[0,2\pi]}(\min) G_p(\theta,\vartheta)$$

для довільного c, можемо покласти $J_p := \{\tau : |\tau-\tau^*| \leq (1-\beta)\sigma_p\}$.

Твердження 3 доведено.

Нехай $\mathfrak{a}$ є числом типу $< A\ln^2(\cdot)$, а число p — простим або дорівнює 1. Позначимо через $\mathbb{N}_p$ підмножину натуральних чисел, взаємно простих з p, якщо p є простим, і $\mathbb{N}_1 := \mathbb{N}$. Очевидно, що $\mathbb{N}_p = \mathbb{N}\setminus\{lp\}_{l\in\mathbb{N}}$, якщо p —просте число. Розглянемо послідовність $\{\tau_q := \mathfrak{a}q + \tau_0\}_{q\in\mathbb{N}_p}$, де τ_0 — фіксоване дійсне число. Для довільних $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ і натуральних $Q_1 < Q_2$ позначимо через $\#([x_1, x_2); Q_1, Q_2)_p$ кількість членів послідовності $\{\tau_q \,|\mathrm{mod} 1\}_{q\in\mathbb{N}_p \bigcap (Q_1,Q_2]}$, які лежать в $[x_1, x_2)$. Число

$$\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2) = \sup_{0\le x_1<x_2\le 1} \left| \frac{\#([x_1, x_2); Q_1, Q_2)_p}{\#([0, 1); Q_1, Q_2)_p} - (x_2 - x_1) \right|$$

є мірою рівномірності розподілу послідовності $\{\tau_q \,|\mathrm{mod} 1\}_{q\in\mathbb{N}_p \bigcap (Q_1,Q_2]}$ на відрізку $[0, 1]$ (див. [14]). Очевидно, що

$$\#([x_1, x_2); Q_1, Q_2)_p \ge \#([0, 1); Q_1, Q_2)_p \left[(x_2 - x_1) - \mathrm{D}_p(Q_1, Q_2)\right]. \tag{33}$$

При цьому $\#([0, 1); Q_1, Q_2)_1 = Q_2 - Q_1$, а якщо p — просте число, то

$$\#([0, 1); Q_1, Q_2)_p = Q_2 - Q_1 - \lfloor Q_2/p \rfloor + \lfloor Q_1/p \rfloor. \tag{34}$$

Наслідком теореми Ердьоша – Турана є нерівність (див. [14, с. 127])

$$\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2) \le \bar{C} \left(\frac{1}{m} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \left| \frac{1}{\#([0, 1); Q_1, Q_2)_p} \sum_{q\in\mathbb{N}_p \bigcap (Q_1,Q_2]} e^{2\pi i j \tau_q} \right| \right)$$

з довільним натуральним m, де $\bar{C}$ — абсолютна стала. Якщо $p = 1$, то за лемою 3.2 з [14] маємо оцінку

$$\mathrm{D}_1(Q_1, Q_2) \le \bar{C} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{Q_2 - Q_1} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j \langle j\mathfrak{a} \rangle} \right),$$

а тоді, використавши результат із вправи 3.12 [14], дістанемо оцінку

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j \langle j\mathfrak{a} \rangle} = O\left(\ln^3(m)\right).$$

Поклавши $m = Q_2 - Q_1$, можна зробити висновок, що при відповідному виборі числа $B_1 > 0$ справджується нерівність $\mathrm{D}_1(Q_1, Q_2) < B_1 \dfrac{\ln^3(Q_2 - Q_1)}{Q_2 - Q_1}$.

Якщо p — просте число, то з теореми Ердьоша – Турана випливає нерівність

$$\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2) \le \bar{C} \left(\frac{1}{m} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \left| \frac{1}{\#([0, 1); Q_1, Q_2)_p} \left[\sum_{k=Q_1+1}^{Q_2} e^{2\pi i j \tau_k} - \sum_{l=[Q_1/p]+1}^{[Q_2/p]} e^{2\pi i j \tau_{pl}} \right] \right| \right),$$

звідки аналогічно попередньому

$$\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2) \le \bar{C} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\#([0, 1); Q_1, Q_2)_p} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j \langle j\mathfrak{a} \rangle} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j \langle jp\mathfrak{a} \rangle} \right] \right).$$

Зауваживши, що $p\mathfrak{a}$ — число типу $< pA\ln^2(p\cdot)$, при відповідному виборі числа $B_p > 0$ отримаємо нерівність

$$\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2) < B_p \frac{\ln^3(Q_2 - Q_1)}{\#([0,1); Q_1, Q_2)_p}. \tag{35}$$

Твердження 4. *Нехай p — фіксоване просте число або 1, виконано умови твердження 3 і $\mathfrak{a} := \dfrac{\lambda_-}{2(\lambda_+ + \lambda_-)}$ — число типу $A\ln^2(\cdot)$. Тоді для довільного $\alpha \in (0,1)$ і довільних $Q_1, Q_2 \in \mathbb{N}$ таких, що $pT(E^\alpha)/(2\pi) \le Q_1 < Q_2$, серед раціональних чисел вигляду p/q, де $q \in (Q_1, Q_2]$ знайдеться не менше ніж $\#([0,1); Q_1, Q_2)_p(1-\beta)\sigma_p - B_p\ln^3(Q_2 - Q_1)$ таких, що $\eta_{p/q}$, визначене в (5), задовольняє нерівність*

$$\eta_{p/q} \ge \frac{\beta\gamma_p - C_p(\alpha)\sqrt{E^* - E_{p/q}}}{2\pi p}.$$

Тут $C_p(\alpha) := 2pC^{\pm}(\alpha) + \Gamma_p\left(C_+ + \mathfrak{a}C\right)$, а C_+, C визначено в лемах 1, 2.

Доведення. Згідно з лемою 3 $T_+(E_{p/q}) = \dfrac{2\pi\mathfrak{a}q}{p} + \Xi + \chi_{p/q} = \dfrac{2\pi\tau_q}{p} + \chi_{p/q}$, де

$$\tau_q = \mathfrak{a}q + \tau_0, \quad \tau_0 := p\Xi/(2\pi). \tag{36}$$

Зрозуміло, що кількість раціональних чисел вигляду p/q, де $q \in (Q_1, Q_2]$, для яких нерівність (32) справджується при $\tau = \tau_q$, не менша за $\#(J_p; Q_1, Q_2)_p$. А тоді не менше ніж $\#(J_p; Q_1, Q_2)_p$ раціональних чисел зазначеного вигляду задовольняють нерівність

$$\min\left\{\max_{\theta\in[0,2\pi]} G_p\left(\theta, T_+(E_{p/q})\right), -\min_{\theta\in[0,2\pi]} G_p\left(\theta, T_+(E_{p/q})\right)\right\} \ge \beta\gamma_p - \Gamma_p\chi_{p/q}.$$

Залишилося скористатись теоремою 3 та нерівністю

$$\#(J_p; Q_1, Q_2)_p \ge \#([0,1); Q_1, Q_2)_p(1-\beta)\sigma_p - B_p\ln^3(Q_2 - Q_1),$$

яка випливає з (33) та оцінки (35) для $\mathrm{D}_p(Q_1, Q_2)$.

Твердження 4 доведено.

З явного вигляду $C_p(\alpha)$ випливає, що рівняння $\sqrt{\alpha\Delta}C_p(\alpha) = \beta(1-\beta)\gamma_p$ відносно $\alpha \in \in (0,1)$ має єдиний корінь $\alpha_*(\beta)$, до того ж $\alpha_*(\beta) \sim \dfrac{\gamma_p\beta^2}{C_p^2(0)\Delta}$ при $\beta \searrow 0$ і $\alpha_*(\beta) \to 0$, при $\beta \nearrow 1$.

Твердження 5. *Нехай $0 < \alpha \le \alpha_*(\beta)$. Тоді для раціональних чисел, які задовольняють умови твердження 4, виконується нерівність $\eta_{p/q} > \dfrac{\gamma_p\beta^2}{2\pi p}$.*

Доведення. Зауважимо, що $E^* - E_\omega < \alpha\Delta$ для всіх $\omega < \omega^\alpha = 2\pi/T(E^\alpha)$. Тепер потрібна нерівність для $\eta_{p/q}$ випливає з твердження 4 та означення $\alpha_*(\beta)$.

Твердження 5 доведено.

З огляду на лему 7 визначимо

$$\alpha_p(\beta) := \min\left\{\alpha_*(\beta), \alpha^\circ(\beta)\right\}, \quad \xi_p(\beta) := \frac{1}{2\pi\lambda}\left[\ln\frac{2}{1-\beta} + c\sqrt{\alpha_p(\beta)\Delta}\right],$$

$$q_p(\beta) := \left\lceil p\max\left\{\xi_p(\beta)/\beta, T\left(E^{\alpha_p(\beta)}\right)\Big/(2\pi) + \xi_p(\beta)\right\}\right\rceil.$$

Неважко переконатися в тому, що $\alpha_p(+0) = \alpha_p(1-0) = 0$, $0 \le \alpha_p(\beta) < 1$ для всіх $\beta \in (0,1)$ і $\alpha_p(\beta) \sim \alpha_*(\beta)$ при $\beta \searrow 0$. А тоді з урахуванням асимптотики $T(E^\alpha)$ при $\alpha \searrow 0$ дістаємо $q_p(\beta) \sim p(\ln 2)/(2\pi\lambda\beta)$ при $\beta \searrow 0$.

Якщо знаменник раціонального числа $\omega = p/q$ задовольняє нерівність $q \ge q_p(\beta)$, то для ω виконуються умови леми 7 при $\alpha = \alpha_p(\beta)$, а отже, справджуються нерівності (42). Поклавши $\Delta_\omega := E^* - E_\omega$, $\delta = \delta_\omega := \beta\Delta_\omega/\omega$, з оцінок (44) отримаємо нерівності для величин, визначених у (7) (заради скорочення записів аргументами у $c_2(\alpha,\beta)$, $c_3(\alpha,\beta)$, $C_T(\alpha)$, $c_T(\alpha,\beta)$ нехтуємо):

$$m_\omega \ge \frac{c_T(1-\beta)\omega^3}{2\pi(1+\beta)^3\Delta_\omega},\ M_\omega \le \frac{C_T\omega^3}{2\pi(1-\beta)^4\Delta_\omega},\ |Y|_\omega \le \frac{2\pi c_1(1+\beta)}{\omega},\ |\Psi|_\omega \le \frac{c_2 C_T\omega}{2\pi(1-\beta)^2\Delta_\omega},$$

$$\left|Y_I'\right|_\omega \le \frac{c_3 C_T}{(1-\beta)\Delta_\omega}, \quad \left|Y_\varphi'\right|_\omega \le \frac{4\pi^2 c_4(1+\beta)^2}{\omega^2},$$

наслідком яких є нерівності для величин (11), (12)

$$\nu_\omega \le \frac{K_\nu(\alpha_p(\beta),\beta)}{\omega^2}, \quad \kappa_\omega \le \frac{K_\kappa(\alpha_p(\beta),\beta)}{\omega^2\Delta_\omega},$$

де

$$K_\nu(\alpha,\beta) := c_1 4\pi^2 p(1+\beta)\left(\frac{C_T(1+\beta)^3}{c_T(1-\beta)^5} + 1\right) + \frac{c_2 C_T(1+\beta)^3}{c_T(1-\beta)^3},$$

$$K_\kappa(\alpha,\beta) := \frac{C_T}{(1-\beta)^2}\left(\frac{\left(4\pi^2 p c_4(1+\beta)^2 + c_3(1-\beta)^3\right)K_\nu}{(1-\beta)^2} + 4\pi^2 c_2 c_4(1+\beta)^2\right).$$

При цьому з урахуванням зауваження 1 існують скінченні границі

$$K_\nu(+0,+0) = K_\nu^* = 20\pi^2 p c_1 + 4c_2^*, \quad K_\kappa(+0,+0) = K_\kappa^* = \frac{2}{\lambda}\left[\left(4\pi^2 p c_4 + c_3^*\right)K_\nu^* + 4\pi^2 c_2^* c_4\right].$$

Неважко перевірити, що з огляду на нерівність (29) при виконанні умов леми 7 справджується нерівність $\xi_p(\beta) > \ln\left[2/(1-\beta)\right]/(2\pi\lambda) > \gamma_p\beta^2/(2\pi p)$, а тоді й $\omega\gamma_p\beta/(2\pi p) < 1$. Відтак, поклавши $K_p(\beta) := \max\left\{K_\nu(\alpha_p(\beta),\beta), K_\kappa(\alpha_p(\beta),\beta)\right\}$, нерівність (13) можемо забезпечити умовою

$$\frac{\gamma_p\beta^2}{2\pi p}\omega^2\Delta_\omega \ge K_p(\beta)\mu^2,$$

для виконання якої при $\omega = p/q$ з урахуванням леми 4 достатньо, щоб

$$q + \frac{p}{\pi\lambda}\ln q \le \frac{p}{\pi\lambda}\ln\frac{\beta z_p(\beta)}{\mu},$$

де

$$z_p(\beta) := \sqrt{\frac{p\gamma_p \exp(\lambda(\Theta - C\sqrt{\alpha_p(\beta)\Delta}))}{2\pi K_p(\beta)}}.$$

Зауважимо, що функція $z_p(\beta)$ неперервна на $(0,1)$ і має додатну границю в нулі:

$$z_p(+0) = \sqrt{\frac{p\gamma_p \exp(\lambda\Theta)}{2\pi \max\{K_\nu^*, K_\kappa^*\}}}.$$

Позначимо через $Q_p(z;\beta)$ цілу частину кореня рівняння відносно q вигляду

$$q + \frac{p}{\pi\lambda}\ln q = \frac{p}{\pi\lambda}\ln\frac{z_p(\beta)}{z}.$$

Легко бачити, що $Q_p(z;\beta)$ визначена для всіх $z > 0$, $\beta \in (0,1)$, задовольняє нерівність

$$\left\lfloor \frac{p}{\pi\lambda}\ln\frac{z_p(\beta)}{z} - \frac{p}{\pi\lambda}\ln\left(\frac{p}{\pi\lambda}\ln\frac{z_p(\beta)}{z}\right)\right\rfloor \le Q_p(z;\beta) \le \left\lfloor \frac{p}{\pi\lambda}\ln\frac{z_p(\beta)}{z}\right\rfloor,$$

а отже, має асимптотику $Q_p(z;\beta) \sim \dfrac{p}{\pi\lambda}\ln\dfrac{1}{z}$ при $z \searrow 0$ рівномірно щодо $\beta \in (0,\beta_0]$ при фіксованому $\beta_0 \in (0,1)$. Тепер достатню умову існування збурених (q/p)-ультрасубгармонік при кожному $\beta \in (0,1)$ можна подати у вигляді системи таких умов:

$$q_p(\beta) \le q \le Q_p(\mu/\beta;\beta), \quad \tau_q\,|\mathrm{mod}1 \in J_p, \quad q \in \mathbb{N}_p,$$

де відрізок J_p визначено у твердженні 3, а послідовність τ_q — формулою (36). Згідно з твердженням 4 знайдеться не менше ніж

$$N_p(\mu/\beta;\beta) := \left\lfloor \#([0,1);q_p(\beta)-1, Q_p(\mu/\beta;\beta))_p(1-\beta)\sigma_p - B_p\ln^3\left(Q_p(\mu/\beta;\beta) - q_p(\beta)\right)\right\rfloor$$

раціональних чисел вигляду p/q, які задовольняють зазначену систему умов, і кожному такому раціональному числу за теоремою 2 відповідають принаймні $2q$ збурених (q/p)-субгармонік. Залишилось підрахувати сумарну кількість цих субгармонік.

З цією метою зауважимо, що $\tau_q\,|\mathrm{mod}1 \in J_p$ тоді і лише тоді, коли $\tau_q \in \bigcup_{k\ge 0}\{J_p + k\}$, де $J_p + k := \{\tau \in \mathbb{R} : \tau - k \in J_p\}$ — зсув інтервалу J_p вправо на k одиниць, і, крім того, з (29) випливає, що $\tau_{q+1} - \tau_q > (1-\beta)\sigma_p = |J_p|$. Тому в кожному інтервалі $J_p + k$ міститься не більше одного члена послідовності $\{\tau_q\}$. Тепер уже неважко зрозуміти, що кількість збурених (q/p)-субгармонік можна оцінити знизу числом

$$\sum_{q=q_p(\beta)}^{q_p(\beta)+N_p(\mu/\beta;\beta)-1} 2q > N_p^2(\mu/\beta;\beta).$$

Звідси з урахуванням (34) і випливає, що $N_p^2(\mu/\beta;\beta)$ не менше, ніж число, визначене в (31).

6. Допоміжні леми та оцінки. Відомо, що $T(E) = O(|\ln(E^* - E)|)$. На підставі результатів [5] можна записати асимптотичне зображення для $T_\pm(E)$ при $E \nearrow E^*$. Лема, яка наводиться нижче, конкретизує точність відповідних асимптотичних зображень у розглядуваному нами випадку (щодо позначень див. (17)).

Лема 1. *Функція* $T_\pm(E)$ *задовольняє нерівність*

$$\left|T_\pm(E) - \frac{1}{2\lambda_\pm}\ln\frac{1}{E^*-E} - \Theta_\pm\right| \le C_\pm\sqrt{E^*-E} \quad \forall E \in [E^\circ, E^*),$$

де $\lambda_\pm := \sqrt{\left|\Pi''\left(u_\pm^*\right)\right|}$,

$$C_\pm := \frac{8M_3}{3\lambda_\pm^4} + \frac{\max\{T_\pm(E^\circ), 1\}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \Theta_\pm := \frac{1}{2\lambda_\pm}\ln 4E^* \pm \frac{1}{2\lambda_\pm}\int\limits_0^{u_\pm^*}\frac{\lambda_\pm\sqrt{2\left(E^*-\Pi(s)\right)} \mp \Pi'(s)}{E^*-\Pi(s)}\,ds$$

(*інтеграл у визначенні* $\Theta_\pm$ *збіжний*).

Доведення. Розглянемо випадок, який відповідає знаку $+$. При доведенні використовуватимемо спрощені позначення

$$u := u_0^+(E), \quad u^\circ := u_+^\circ, \quad u^* := u_+^*. \tag{37}$$

Подамо $T_+(E)$ у вигляді суми $T_+(E) = \displaystyle\int_0^{u^\circ}\frac{ds}{\sqrt{2\left(E-\Pi(s)\right)}} + \int_{u^\circ}^{u}\frac{ds}{\sqrt{2\left(E-\Pi(s)\right)}}$ і зауважимо, що перший доданок задовольняє нерівність

$$0 < \int_0^{u^\circ}\frac{ds}{\sqrt{2\left(E-\Pi(s)\right)}} - \int_0^{u^\circ}\frac{ds}{\sqrt{2\left(E^*-\Pi(s)\right)}} \le T_+(E^\circ)\sqrt{\frac{E^*-E}{\Delta}}.$$

Проаналізуємо поведінку при $E \nearrow E^*$ другого доданка. Визначимо $z = \zeta(y)$ як корінь рівняння $\sqrt{2(E^*-\Pi(u^*-z))} = \lambda_+ y$. Функція в лівій частині неперервно диференційовна на інтервалі $(0, u^*-u^\circ)$ і монотонно зростає. Тому $\zeta(y)$ є неперервно диференційовною функцією аргументу $y \in \left(0, \sqrt{2\Delta}/\lambda_+\right)$. При цьому для деякого $\theta_1 \in (u^\circ, u^*)$ маємо

$$\lambda_+^\circ\zeta(y) \le \sqrt{-\Pi''(\theta_1)}\zeta(y) = \lambda_+ y \le \Lambda_+^\circ\zeta(y),$$

звідки

$$\frac{\lambda_+}{\Lambda_+^\circ}y \le \zeta(y) \le \frac{\lambda_+}{\lambda_+^\circ}y, \quad \zeta'(+0) = \lim_{y\to+0}\frac{\zeta(y)}{y} = 1.$$

Крім того, знайдеться $\theta_1 \in (u^\circ, u_*)$ таке, що

$$|\lambda_+ y - \lambda_+\zeta(y)| = \lambda_+\zeta(y)\left|\sqrt{1+\Pi'''(\theta_1)\zeta(y)/(3\lambda_+^2)} - 1\right| \le \zeta^2(y)M_3/(6\lambda_+).$$

Тоді

$$\frac{\lambda_+\lambda_+^\circ}{\left(\Lambda_0^+\right)^2} \le \zeta'(y) = \frac{\lambda_+^2 y}{\Pi'(u^*-\zeta(y))} \le \frac{\lambda_+\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}$$

і

$$\left|\frac{\zeta'(y)-1}{y}\right| \le \frac{\lambda_+^2(y-\zeta(y))}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2 y\zeta(y)} + \frac{M_3\zeta(y)}{2\left(\lambda_+^\circ\right)^2 y} \le \frac{2\lambda_+ M_3}{3\left(\lambda_+^\circ\right)^3}.$$

Тепер в інтегралі $\displaystyle\int_{u^\circ}^{u} \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} = \int_{u^*-u}^{u^*-u^\circ} \frac{dz}{\sqrt{2(E-\Pi(u^*-z))}}$ виконаємо заміну $z = \zeta(y)$ і, поклавши $\varepsilon^\circ = \dfrac{\sqrt{2(E^*-E^\circ)}}{\lambda_+}$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{2(E^*-E)}}{\lambda_+}$ та $\varpi(y) := \dfrac{\zeta'(y)-1}{y}$, подамо його у вигляді

$$\frac{1}{\lambda_+}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^\circ} \frac{\zeta'(y)dy}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}} = \frac{1}{\lambda_+}\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^\circ} \frac{dy}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon^2}^{(\varepsilon^\circ)^2} \frac{\varpi(\sqrt{s})ds}{\sqrt{s-\varepsilon^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_+}\left[\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\varepsilon^\circ + \sqrt{(\varepsilon^\circ)^2-\varepsilon^2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{((\varepsilon^\circ)^2)} \frac{\varpi(\sqrt{s})ds}{\sqrt{s}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_+}\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\varepsilon^2} \frac{\varpi(\sqrt{s})ds}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon^2}^{(\varepsilon^\circ)^2} \varpi\left(\sqrt{s}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{s-\varepsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{s}}\right]ds\right].$$

Скориставшись оцінками

$$\ln(2\varepsilon^\circ) - \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^\circ)^2} \le \ln\left(\varepsilon^\circ + \sqrt{(\varepsilon^\circ)^2-\varepsilon^2}\right) \le \ln(2\varepsilon^\circ), \quad \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\varepsilon^2} \frac{|\varpi(\sqrt{s})|\,ds}{\sqrt{s}} \le \varepsilon\frac{2\lambda_+ M_3}{3\left(\lambda_+^\circ\right)^3},$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon^2}^{(\varepsilon^\circ)^2} \left|\varpi\left(\sqrt{s}\right)\right|\left[\frac{1}{\sqrt{s-\varepsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{s}}\right]ds \le \varepsilon\frac{2\lambda_+ M_3}{3\left(\lambda_+^\circ\right)^3},$$

припущенням (H_7) та рівністю $\displaystyle\int_{0}^{(\varepsilon^\circ)^2} \frac{\varpi(\sqrt{s})ds}{\sqrt{s}} = \int_{u^\circ}^{u^*} \frac{\lambda_+\sqrt{2\left(E^*-\Pi(s)\right)} - \Pi'(s)}{E^*-\Pi(s)}\,ds$ (з наведених вище оцінок випливає збіжність цього інтеграла), отримаємо твердження леми, якщо визначимо

$$\Theta_+ = \frac{1}{2\lambda_+}\ln 4\Delta + \int\limits_{0}^{u^\circ} \frac{ds}{\sqrt{2(E^*-\Pi(s))}} + \frac{1}{2\lambda_+}\int\limits_{u^\circ}^{u^*} \frac{\lambda_+\sqrt{2\left(E^*-\Pi(s)\right)} - \Pi'(s)}{E^*-\Pi(s)}ds.$$

Зауважимо, що $\Theta_\pm$ насправді від u° не залежить, а отриманий для нього вираз коректно визначений для всіх $u^\circ \in [0, u^*]$. Залишилося спрямувати u° до нуля.

Лему 1 доведено.

Простим наслідком леми 1 є таке твердження.

Лема 2. *Для всіх* $E \in [E^\circ, E^*)$ *період* $T(E)$ *задовольняє нерівність*

$$\left| T(E) - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{E_* - E} - \Theta \right| \le C\sqrt{E^* - E},$$

де $\lambda := \lambda_+\lambda_- / (\lambda_+ + \lambda_-)$, $\Theta := 2(\Theta_+ + \Theta_-)$, $C := 2\,(C_+ + C_-)$.

Взявши до уваги рівність $2\,[T_+(E_\omega) + T_-(E_\omega)] = T(E_\omega) = 2\pi/\omega$, на підставі леми 2 отримаємо нерівності

$$\frac{2\pi}{\omega} - \Theta - C\sqrt{E^* - E_\omega} \le \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{E^* - E_\omega} \le \frac{2\pi}{\omega} - \Theta + C\sqrt{E^* - E_\omega}$$

для кожного $\omega \in (0, \omega^\circ]$, які доводять такі твердження.

Лема 3. *Для кожного* $\omega \in (0, \omega^\circ]$ *справджується рівність*

$$T_+(E_\omega) = \frac{\pi\lambda}{\lambda_+\omega} + \Xi + \chi_\omega,$$

де $\Xi := \dfrac{\lambda_+\Theta_+ - \lambda_-\Theta_-}{\lambda_+ + \lambda_-}$ *і* $|\chi_\omega| \le \left[C_+ + \dfrac{\lambda C}{2\lambda_+}\right]\sqrt{E^* - E_\omega}$.

Лема 4. *Нехай* $\alpha \in (0, 1)$. *Тоді для кожного* $\omega \in (0, \omega^\alpha]$ *справджуються нерівності*

$$\exp\left[-\frac{2\pi\lambda}{\omega} + \lambda\left(\Theta - C\sqrt{\alpha\Delta}\right)\right] \le E^* - E_\omega \le \exp\left[-\frac{2\pi\lambda}{\omega} + \lambda\left(\Theta + C\sqrt{\alpha\Delta}\right)\right].$$

Зауважимо, що лема 3 в розглядуваному випадку дає змогу уточнити зображення для $T_+(E_{p/q})$, одержане в [4, 5].

Лема 5. *Нехай* $\alpha \in (0, 1)$ *і* $E_1 \ge E_2 \ge E^\alpha$. *Тоді*

$$T(E_1) - T(E_2) \le \frac{1}{\lambda}\left[\ln \frac{2(E^* - E_2)}{E^* - E_1} + c\sqrt{\alpha\Delta}\right],$$

де $c := \dfrac{8M_3}{3\min\left\{\lambda_\pm^3\right\}}$.

Доведення. Поклавши $\varepsilon_k = \dfrac{\sqrt{2(E^* - E_k)}}{\lambda_+}$, $k = 1, 2$, на основі тих самих міркувань, що й при доведенні леми 1, будемо мати

$$T_+(E_1) - T_+(E_2) \le \int\limits_{u_0^+(E_2)}^{u_0^+(E_1)} \frac{ds}{\sqrt{2(E_1 - \Pi(s))}} = \frac{1}{\lambda_+}\left[\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \varepsilon_1^2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon_1^2}^{\varepsilon_2^2} \frac{\varpi\left(\sqrt{s}\right) ds}{\sqrt{s - \varepsilon_1^2}}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_+}\left[\ln \frac{1}{\varepsilon_1} + \ln(2\varepsilon_2) + \frac{2M_3\sqrt{2\alpha\Delta}}{3\left(\lambda_+^\circ\right)^3}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_+}\left[\frac{1}{2}\ln \frac{2(E^* - E_2)}{E^* - E_1} + \frac{2M_3\sqrt{2\alpha\Delta}}{3\left(\lambda_+^\circ\right)^3}\right].$$

Аналогічну нерівність, із заміною індексів $+$ на $-$, задовольняє різниця $T_-(E_1)-T_-(E_2)$. Лему 5 доведено.

Для заданого $\beta \in (0,1)$ розглянемо рівняння відносно $\alpha \in (0,1)$ вигляду

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)^{3/2}} = \frac{\beta}{\lambda T(E^\circ)}.$$

Воно має єдиний корінь $\alpha = \alpha^\circ(\beta)$, який допускає зображення $\alpha^\circ(\beta) \sim \beta/\left(\lambda T(E^\circ)\right)$ при $\beta \searrow 0$, причому ліва частина рівняння не перевищує праву при $\alpha \in (0, \alpha^\circ(\beta)]$.

Лема 6. *Нехай* $\beta \in (0,1)$. *Якщо* α *задовольняє умову*

$$0 < \alpha \leq \alpha^\circ(\beta), \tag{38}$$

то справджуються нерівності

$$\frac{c_T(\alpha,\beta)}{E^*-E} \leq T'(E) \leq \frac{C_T(\alpha)}{E^*-E} \quad \forall E \in \left(E^\alpha, E^*\right),$$

де $c_T(\alpha,\beta) := \dfrac{(1-\beta)\sqrt{1-\alpha}}{2\lambda}$, $C_T(\alpha) := \dfrac{2}{\lambda}\left(1+\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}\right)$.

Доведення. Оцінимо $T'_+(E)$ при $E \in (E^\alpha, E^*)$. Використовуючи позначення (37), записуємо $T_+(E)$ у вигляді

$$T_+(E) = \int\limits_0^{u^\circ} \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} + \int\limits_{u^\circ}^{u} \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}}.$$

Для похідної першого доданка маємо

$$-\frac{T_+(E^\circ)}{2(1-\alpha)\Delta} \leq -\int\limits_0^{u^\circ} \frac{ds}{\left[2(E-\Pi(s))\right]^{3/2}} \leq -\frac{u^\circ}{(2E^*)^{3/2}} < 0.$$

У другому інтегралі виконаємо заміну $y = E - \Pi(s)$:

$$\int\limits_{u^\circ}^{u} \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} = \int\limits_0^{E-E^\circ} \frac{dy}{\sqrt{2y}\Pi'(u_0^+(E-y))}.$$

Тоді похідна другого інтеграла набирає виляду

$$\frac{1}{\sqrt{2(E-E^\circ)}\Pi'(u^\circ)} + \int\limits_0^{E-E^\circ} \frac{\left|\Pi''(u_0^+(E-y))\right|}{\sqrt{2y}\left[\Pi'(u_0^+(E-y))\right]^2} \frac{du_0^+(E-y)}{dE}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(E-E^\circ)}\Pi'(u^\circ)} + \int\limits_0^{E-E^\circ} \frac{\left|\Pi''(u_0^+(E-y))\right|}{\sqrt{2y}\left[\Pi'(u_0^+(E-y))\right]^3}\, dy.$$

З урахуванням (20) та (24) дістаємо

$$\frac{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}{\Lambda_+^\circ}\sqrt{2(E^*-E+y)} \le \Pi'\left(u_0^+(E-y)\right) \le$$

$$\le \left(\Lambda_+^\circ\right)^2\left(u_+^* - u_0^+(E-y)\right) \le \frac{\left(\Lambda_+^\circ\right)^2}{\lambda_+^\circ}\sqrt{2(E^*-E+y)}. \tag{39}$$

Оскільки при $E\in(E^\alpha,E^*)$

$$\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{E^*-E} \le \int\limits_0^{E-E^\circ}\frac{dy}{\sqrt{y\cdot(E^*-E+y)^3}} \le \frac{2}{E^*-E},$$

то

$$\frac{\sqrt{1-\alpha}\left(\lambda_+^\circ\right)^5}{2\left(\Lambda_+^\circ\right)^6(E^*-E)} \le \int\limits_0^{E-E^\circ}\frac{\left|\Pi''(u_0^+(E-y))\right|}{\sqrt{2y}\left[\Pi'(u_0^+(E-y))\right]^3}\,dy \le \frac{\left(\Lambda_+^\circ\right)^5}{2\left(\lambda_+^\circ\right)^6(E^*-E)}.$$

Отже, при $E\in(E^\circ,E^*)$, враховуючи (39) при $E=E^\circ$, $y=0$, маємо

$$\frac{1}{E^*-E}\left[\frac{\sqrt{1-\alpha}\left(\lambda_+^\circ\right)^5}{2\left(\Lambda_+^\circ\right)^6} - \frac{\alpha T_+(E^\circ)}{2(1-\alpha)}\right] < T_+'(E) < \frac{1}{E^*-E}\left[\frac{\left(\Lambda_+^\circ\right)^5}{2\left(\lambda_+^\circ\right)^6} + \frac{\alpha\Lambda_+^\circ}{2\sqrt{1-\alpha}(\lambda_+^\circ)^2}\right].$$

Функція $T_-'(E)$ оцінюється аналогічно, і відтак з огляду на рівність $T(E)=2[T_+(E)+$ $+T_-(E)]$ та з урахуванням припущення (H_7) твердження леми стає очевидним.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай виконується умова (38), числа $\beta\in(0,1)$, $\xi>0$ та $\omega>0$ задовольняють нерівності*

$$2\pi\lambda\xi \ge c\sqrt{\alpha\Delta} + \ln\left[2/(1-\beta)\right], \tag{40}$$

$$\omega \le \min\left\{\frac{\beta}{\xi}, \frac{\omega^\alpha}{1+\xi\omega^\alpha}\right\} = \min\left\{\frac{\beta}{\xi}, \frac{2\pi}{T(E^\alpha)+2\pi\xi}\right\}, \tag{41}$$

де ω^α визначено в (17), c — стала з леми 5. Покладемо $\delta_\omega := \dfrac{\beta}{\omega}\left(E^*-E_\omega\right)$.

Тоді $[I_\omega-\delta_\omega, I_\omega+\delta_\omega]\subset[I^\alpha,I^*)$ і на відрізку $[I_\omega-\delta_\omega, I_\omega+\delta_\omega]$ справджуються нерівності

$$(1-\beta)(E^*-E_\omega) \le E^*-H(I) \le \frac{E^*-E_\omega}{1-\beta}, \quad \frac{2\pi(1-\beta)}{\omega} \le T(H(I)) \le \frac{2\pi(1+\beta)}{\omega}. \tag{42}$$

Доведення. Покладаючи $\omega' := \omega/(1-\xi\omega)$, з огляду на (41) маємо нерівності $\omega<\omega'\le$ $\le\omega^\alpha$. Відтак коректно визначено значення $I_{\omega'}\ge I_{\omega^\alpha}=I^\alpha$. Зауважимо, що для довільних $\omega_1,\omega_2\in[0,\omega^\alpha]$, $\omega_1\le\omega_2$, справджуються нерівності

$$\omega_1\left(I_{\omega_1}-I_{\omega_2}\right) \le E_{\omega_1}-E_{\omega_2} \le \omega_2\left(I_{\omega_1}-I_{\omega_2}\right).$$

Тому $I_\omega - I_{\omega'} \geq (E_\omega - E_{\omega'})/\omega'$. Для того щоб оцінити знизу $E_\omega - E_{\omega'}$, застосуємо лему 5. Згідно з нею отримуємо

$$2\pi\xi = T(E_\omega) - T(E_{\omega'}) \leq \frac{1}{\lambda}\left[\ln\frac{2(E^* - E_{\omega'})}{E^* - E_\omega} + c\sqrt{\alpha\Delta}\right]$$

(тут $c = c(\Delta)$), звідки $E^* - E_{\omega'} \geq e^{2\pi\lambda\xi - c\sqrt{\alpha\Delta}}(E^* - E_\omega)/2$, а отже, з урахуванням (40), (41)

$$I_\omega - I_{\omega'} \geq (E_\omega - E_{\omega'})/\omega' \geq (1-\beta)\left[e^{2\pi\lambda\xi - c\sqrt{\alpha\Delta}}\Big/2 - 1\right](E^* - E_\omega)/\omega \geq \delta_\omega.$$

Таким чином, $I_\omega - \delta_\omega \geq I_{\omega'} \geq I_{\omega^\alpha}$. Тепер, поклавши $\omega'' := \omega/(1+\xi\omega)$, покажемо, що $I_{\omega''} \geq I_\omega + \delta_\omega$. Оскільки $2\pi\xi = T(E_{\omega''}) - T(E_\omega)$, то подібно до викладеного вище одержуємо нерівності $E^* - E_{\omega''} \leq 2e^{c\sqrt{\alpha\Delta} - 2\pi\lambda\xi}$ і

$$I_{\omega''} - I_\omega \geq (E_{\omega''} - E_{\omega'})/\omega \geq \left[1 - 2e^{c\sqrt{\alpha\Delta} - 2\pi\lambda\xi}\right](E^* - E_\omega)/\omega \geq \delta_\omega.$$

Таким чином, доведено, що $[I_\omega - \delta_\omega, I_\omega + \delta_\omega] \subset [I_{\omega'}, I_{\omega''}] \subset [I_{\omega^\alpha}, I^*)$. З урахуванням цього факту для всіх $I \in [I_\omega - \delta_\omega, I_\omega + \delta_\omega]$ отримуємо нерівності

$$E^* - H(I) \leq E^* - H(I_\omega - \delta_\omega) \leq E^* - E_\omega + H'(I_\omega - \delta_\omega)\delta_\omega \leq$$
$$\leq E^* - E_\omega + \omega'\delta_\omega = \left(1 + \omega'\beta/\omega\right)(E^* - E_\omega) \leq \frac{E^* - E_\omega}{1-\beta},$$

$$E^* - H(I) \geq E^* - H(I_\omega + \delta_\omega) = E^* - E_\omega + [H(I_\omega) - H(I_\omega + \delta_\omega)] \geq (1-\beta)(E^* - E_\omega)$$

і, нарешті,

$$2\pi(1-\beta)/\omega \leq 2\pi/\omega' = T(E_{\omega'}) \leq T(H(I)) \leq T(E_{\omega''}) = 2\pi/\omega'' \leq 2\pi(1+\beta)/\omega.$$

Лему 7 доведено.

Тепер оцінимо похідні функцій $u(I,\varphi)$, $v(I,\varphi)$ на множині $[I^\alpha, I^*) \times [0, 2\pi]$.

Лема 8. *Нехай α задовольняє умову (38). Покладемо*

$$c_u(\alpha,\beta) := \max\left\{\frac{\sqrt{2}\left(1 + \lambda\Theta\sqrt{\alpha\Delta} + \lambda C\alpha\Delta\right)}{(1-\beta)\sqrt{1-\alpha}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}T_\pm(E^\circ)}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{2}{\lambda_\pm}\right] + u_0^\pm(E^\circ)\right\},$$

$$c_v(\alpha,\beta) := c_u(\alpha,\beta)M_2 + M_1 + \frac{\sqrt{2}\lambda\alpha\Delta}{(1-\beta)\sqrt{(1-\alpha)E^\circ}}.$$

Тоді при всіх $I \in [I^\alpha, I^*)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ справджуються нерівності

$$\left|u'_\varphi\right| \leq \frac{\sqrt{2E^*}T(E)}{2\pi}, \quad \left|v'_\varphi\right| \leq \frac{M_1 T(E)}{2\pi},$$

$$\left|u_I'\right| \leq \frac{2\pi c_u(\alpha,\beta)T'(E)}{T^2(E)}, \quad \left|v_I'\right| \leq \frac{2\pi c_v(\alpha,\beta)T'(E)}{T(E)},$$

$$\left|u_{\varphi\varphi}''\right| \leq \frac{M_1 T^2(E)}{4\pi^2}, \quad \left|v_{\varphi\varphi}''\right| \leq \frac{M_2\sqrt{2E^*}T^2(E)}{4\pi^2},$$

$$\left|u_{\varphi I}''\right| \leq \left[\frac{\sqrt{2E^*}}{T(E^\alpha)} + c_v(\alpha,\beta)\right]T'(E), \quad \left|v_{\varphi I}''\right| \leq \frac{(c_u(\alpha,\beta)M_2 + M_1)T'(E)}{T(E)},$$

в яких слід покласти $E = H(I)$.

Доведення. Покажемо, як одержати оцінки похідних в області, де $v(I,\varphi) \geq 0$. Випадок, коли $v(I,\varphi) < 0$, розглядається аналогічно. Покладемо задля скорочення записів

$$u = u(I,\varphi), \quad v = \sqrt{2(E - \Pi(u(I,\varphi)))}, \quad E = H(I).$$

Оскільки $\dot u = v$, $\dot I = 0$, $\dot\varphi = H'(I)$, то

$$u_\varphi' = v/H'(I), \tag{43}$$

звідки відразу дістаємо нерівність $\left|u_\varphi'\right| \leq \sqrt{2E^*}T(E)/(2\pi)$. Використовуючи рівність

$$H'(I)\int\limits_0^{u(I,\varphi)} \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} = \varphi,$$

маємо

$$u_I' = vH'(I)\int\limits_0^u \frac{ds}{[2(E-\Pi(s))]^{3/2}} - \frac{vH''(I)}{H'(I)}\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}}.$$

Якщо $u \in (0, u^\circ)$, то

$$v\int\limits_0^u \frac{ds}{[2(E-\Pi(s))]^{3/2}} \leq \frac{1}{v}\int\limits_0^{u^\circ} \frac{ds}{\sqrt{2(E^\circ - \Pi(s))}} \leq \frac{T_+(E^\circ)}{\sqrt{2(1-\alpha)\Delta}}.$$

Якщо ж $u \in \left[u^\circ, u_0^+(E)\right)$, то з урахуванням (20) інтеграл у лівій частині не перевищує

$$\frac{T_+(E^\circ)}{\sqrt{2(1-\alpha)\Delta}} + \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2}\frac{v}{\sqrt{2\left(E^*-E\right)}}\int\limits_{E-\Pi(u)}^{E-E^\circ} \frac{dy}{(2y)^{3/2}} \leq \frac{T_+(E^\circ)}{\sqrt{2(1-\alpha)\Delta}} + \frac{\Lambda_+^\circ}{\left(\lambda_+^\circ\right)^2\sqrt{2\left(E^*-E\right)}}.$$

Крім того, очевидно, що $\dfrac{v\left|H''(I)\right|}{H'(I)}\displaystyle\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2(E-\Pi(s))}} \leq \frac{T'(E)u_0^+(E^*)}{T^2(E)}$. Випадок $u \in$ $\in \left(u_0^-(E), 0\right)$ розглядається аналогічно. Отже, з урахуванням нерівності

$$\frac{T(E)}{T'(E)} \leq \frac{\sqrt{E^*-E}\left(1/\lambda + \Theta\sqrt{\alpha\Delta} + C\alpha\Delta\right)}{c_T(\alpha,\beta)}$$

отримуємо

$$\left|u_I'\right| \le \frac{2\pi}{T(E)} \max\left\{\frac{T_\pm(E^\circ)}{\sqrt{2(1-\alpha)\Delta}} + \frac{\Lambda_\pm^\circ}{\left(\lambda_\pm^\circ\right)^2\sqrt{2\left(E^*-E\right)}} + \frac{T'(E)u_0^\pm(E^*)}{T(E)}\right\} \le \frac{2\pi c_u(\alpha,\beta)T'(E)}{T^2(E)}.$$

Оскільки $v(I,0) = \sqrt{2H(I)}$ і $v_\varphi'(I,\varphi)H'(I) = -\Pi'(u(I,\varphi))$, то

$$v(I,\varphi) = -\int\limits_0^\varphi \frac{\Pi'(u(I,s))}{H'(I)}\,ds + \sqrt{2H(I)}.$$

Звідси

$$\left|v_\varphi'\right| \le \frac{M_1}{H'(I)} = \frac{M_1T(E)}{2\pi},$$

$$\left|v_I'\right| \le 2\pi\left[\frac{M_2}{H'(I)}\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|u_I'\right| + \frac{M_1H''(I)}{(H'(I))^2}\right] + \frac{H'(I)}{\sqrt{2H(I)}} \le$$

$$\le 2\pi\left[M_2c_u + M_1\right]\frac{T'(E)}{T(E)} + \frac{2\pi}{T(E)\sqrt{2E^\circ}} \le \frac{2\pi c_v(\alpha,\beta)T'(E)}{T(E)}.$$

Нарешті, використовуючи рівність (43) та нерівність $T(E) \ge T(E^\alpha)$, одержуємо

$$\left|u_{\varphi\varphi}''\right| \le \frac{\left|v_\varphi'\right|}{H'} \le \frac{M_1T^2(E)}{4\pi^2}, \quad \left|v_{\varphi\varphi}''\right| \le \frac{M_2\left|u_\varphi'\right|}{H'(I)} \le \frac{M_2\sqrt{2E^*}T^2(E)}{4\pi^2},$$

$$\left|u_{I\varphi}''\right| \le \frac{|v|\left|H''(I)\right|}{\left[H'(I)\right]^2} + \frac{\left|v_I'\right|}{\left|H'(I)\right|} \le \frac{\sqrt{2E^*}T'(E)}{T(E)} + \frac{\left|v_I'\right|T(E)}{2\pi} \le \left[\frac{\sqrt{2E^*}}{T(E^\alpha)} + c_v(\alpha,\beta)\right]T'(E),$$

$$\left|v_{I\varphi}''\right| \le \frac{M_2\left|u_I'\right|}{\left|H'(I)\right|} + \frac{M_1\left|H''(I)\right|}{\left[H'(I)\right]^2} \le \frac{M_2\left|u_I'\right|T(E)}{2\pi} + \frac{M_1T'(E)}{T(E)} \le \frac{(c_u(\alpha,\beta)M_2 + M_1)T'(E)}{T(E)}.$$

Лему 8 доведено.

Насамкінець оцінимо в області $[0,2\pi]\times[I_\omega-\delta_\omega, I_\omega+\delta_\omega]\times[0,2\pi]$ функції (30) та їхні частинні похідні, які фігурують у (7). На основі леми 8 та з урахуванням припущення (H_9) отримуємо нерівності

$$|Y| \le c_1T(E), \;\; |\Psi| \le c_2(\alpha,\beta)T'(E)/T(E), \;\; \left|Y_I'\right| \le c_3(\alpha,\beta)T'(E), \;\; \left|Y_\varphi'\right| \le c_4T^2(E), \quad (44)$$

де $E = H(I)$ і

$$c_1 := \frac{\sqrt{2E^*}+M_1}{2\pi}, \quad c_2(\alpha,\beta) := 2\pi\left(\frac{c_u(\alpha,\beta)}{T(E^\alpha)} + c_v(\alpha,\beta)\right),$$

$$c_3(\alpha,\beta) := \frac{c_u(\alpha,\beta)\left(\sqrt{2E^*}+M_1+M_2\right)+\sqrt{2E^*}+M_1}{T(E^\alpha)} + c_v(\alpha,\beta)(1+\sqrt{2E^*}+M_1),$$

$$c_4 := \frac{\left(\sqrt{2E^*} + M_1\right)^2 + M_1 + M_2\sqrt{2E^*}}{4\pi^2}.$$

Зауваження 1. Функції $c_u(\alpha, \beta)$ та $c_v(\alpha, \beta)$ монотонно зростають по кожному аргументу, мають скінченні границі $c_u^* := \max\left\{2/\lambda_\pm + u_\pm^\circ\right\}$, $c_v^* := c_u^* M_1 + M_2$ при $\alpha \searrow 0$, $\beta \searrow 0$. Функції $c_2(\alpha, \beta)$, $c_3(\alpha, \beta)$ також мають скінченні границі $c_2^* := 2\pi c_v^*$, $c_3^* := c_v^* \left(1 + \sqrt{2E^*} + M_1\right)$ при $\alpha \searrow 0$, $\beta \searrow 0$.

7. Висновки. В роботі досліджено задачу про збереження (q/p)-ультрасубгармонік двовимірної автономної гамільтонової системи механічного типу з гетероклінічним контуром, яка підлягає впливу 2π-періодичного в часі збурення. При розв'язанні зазначеної задачі класичним методом Пуанкаре доводиться перевіряти умову існування простих нулів ультрасубгармонічної функції Пуанкаре або, що те саме, ультрасубгармонічної функції Мельникова $\mathcal{M}_{q/p}(\theta)$, а при достатньо великих q — умову існування простих нулів часткових границь послідовності $\{\mathcal{M}_{q/p}(\theta)\}_{q\in\mathbb{N}}$.

У даній роботі встановлено ефективну оцінку апроксимації ультрасубгармонічної функції Пуанкаре деякою лінійною комбінацією p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельникова. Це дало змогу виразити достатні умови існування збурених ультрасубгармонік при фіксованому натуральному p через певні характеристики p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельникова і, як наслідок, отримати такі достатні умови, які є рівномірними щодо натуральних взаємно простих з p чисел q з деякого проміжку довжини $O(|\ln\mu|)$. При цьому вдалося уникнути необхідності перевірки умови простоти нулів часткових границь послідовності $\{\mathcal{M}_{q/p}(\theta)\}_{q\in\mathbb{N}}$, замінивши її умовою знакозмінності згаданої вище лінійної комбінації p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельникова, яка апроксимує функцію Пуанкаре. На основі такого підходу в даній роботі для випадку нерозкладного на прості множники фіксованого числа p встановлено, що за додаткових природних обмежень на функцію потенціальної енергії кількість збурених (q/p)-ультрасубгармонік зростає з прямуванням μ до нуля не повільніше, ніж $\varsigma \ln^2 \mu$, де ς — деякий числовий коефіцієнт.

Отримані результати можна поширити на системи загальнішого вигляду та застосувати до конкретних математичних моделей, що описуються системами з півтора ступенями вільності, близькими до гамільтонових.

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
2. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. — New York: Springer, 1983. — 453 p.
3. *Козлов В. В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Успехи мат. наук. — 1986. — **41**, № 5. — С. 177–178.
4. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в системах с полутора степенями свободы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2006. — **46**, № 9. — С. 1582–1593.
5. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Труды Ин-та математики и механики УРО РАН. — 2006. — **12**, № 1. — С. 109–141.
6. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* О предельных значениях функций Мельникова на периодических орбитах // Дифференц. уравнения. — 2007. — **43**, № 2. — С. 176–190.
7. *Берштейн И., Халанай А.* Индекс особой точки существования периодических решений систем с малым параметром // Докл. АН СССР. — 1956. — **111**, № 5. — С. 923–925.

8. *Красносельский М. А., Перов А. И.* Об одном прицipе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1958. — **123**, № 2. — С. 235 – 238.

9. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, № 4. — С. 82 – 93.

10. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 184 с.

11. *Buica A., Llibre J.* Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree // Bull. Sci. Math. — 2004. — **128**. — P. 7 – 22.

12. *Макаренков О.Ю.* Индекс Пуанкаре и периодические решения возмущенных автономных систем // Труды Моск. мат. о-ва. — 2009. — **70**. — С. 1 – 30.

13. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. — 112 с.

14. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. — М.: Наука, 1985. — 408 с.

Одержано 30.08.10